...TECA NAZ.
...o Emanuele III
...XXIV
F
33
NAPOLI

XXXIV. 7. 33.

# GLI ELEMENTI
## TEORICO-PRATICI
## DELLE MATEMATICHE PURE

*DEL PADRE*

ODOARDO GHERLI

DOMENICANO

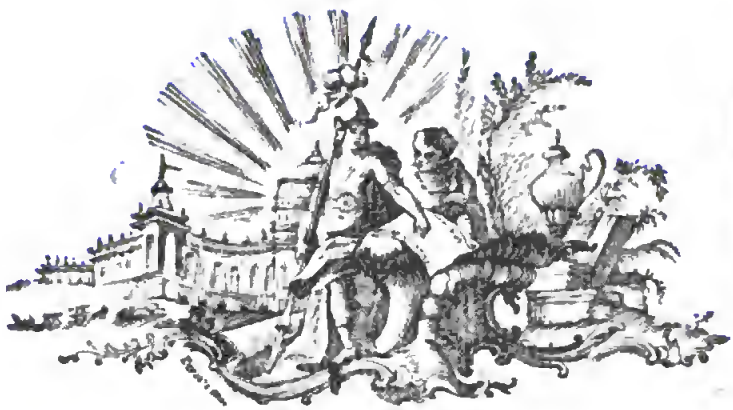
PROFESSORE DI TEOLOGIA DOGMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI MODENA

*RESI PUBBLICI*

DA DOMENICO POLLERA.

*TOMO II.*

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO E. MANUELE III NAPOLI



B. R. NAPOLI

IN MODENA MDCCLXXI.

PRESSO LA SOCIETA' TIPOGRAFICA.

*CON LICENZA DE' SUPERIORI.*

Digitized by Google

*AL REVERENDISSIMO PADRE*

# PAOLO MARIA PACIAUDI

C. R. T.

BIBLIOTECARIO, ED ANTIQUARIO DI S. A R.

# L' INFANTE D. FERDINANDO

DUCA DI PARMA,

STORIOGRAFO DEL SACRO MILITAR ORDINE GEROSOLIMITANO, MEMBRO DELLA REALE ACCADEMIA DI PARIGI DELLE ISCRIZIONI, E BELLE LETTERE ec. cc. cc.

F. ODOARDO GHERLI
D. D. D.

*LE singolari virtù, REVERENDISSIMO PADRE, e il raro voſtro merito tanto dappertutto celebrato, che ho avuto campo di ammirare, allorchè anni ſono l' onore ho partecipato di conoſcervi, e trattarvi, hanmi ſempre in poi fatta una dolce violenza a cercare occaſione di darvi qualche pubblica dimoſtrazione dell' oſſequioſa divozione, e della profonda inalterabil mia ſtima. Nel pubblicare pertanto il ſecondo Tomo de' miei Elementi di Matematica ho io a un tempo ſteſſo penſato e ad effettuare queſto mio deſiderio, e a nobilitare in faccia al Mondo col chiariſſimo voſtro Nome le deboli mie fatiche, le quali ſorte miglior certamente incontrar non potevano, che*

*l' eſſere avvalorate dal favore, e dalla protezione d' uno de' primi Letterati d' Europa, quale Voi ſiete. E bene il mio dire giuſtifica-no le tante eccellenti opere da Voi pubblicate in così diverſe materie, nelle quali gareggian del pari, nè ſi ſa qual più debbaſi ammirare, ſe o la vaſta erudizione ſacra, e profana, o la ſoda cognizione nel-le filoſofiche facoltà, o la purezza dello ſtile latino, o la profonda intelligenza della lingua greca; onde poi mercè di queſte voſtre fati-che diſtinguendovi fra gli ottimi, tra i più onorevoli applauſi riſcoſ-ſi da tutta la letteraria Repubblica quella ſomma riputazione acqui-ſtata vi ſiete, che vi ha reſo celebre non nell' Italia ſola, ma in ogni paeſe al di là dell' Alpi, e de' Mari, ove ſi coltivano, e in pregio ſono i buoni ſtudj. A Voi perciò, che lo ſtudio della più oſ-cura, e difficile antichità fatto avete familiare voſtra occupazione, debitori ſi riconoſcono con immortal voſtra gloria gli eruditi della ſpiegazione de' più pregevoli, e intatti monumenti: E quanto non ſi dolgono, che le eſcavazioni de' reſti di* Veleja *abbian ſempre pro-dotti monumenti tronchi, e mancanti? Benchè non diffidano, che fia-te per renderne pubbliche le voſtre oſſervazioni, che ſaranno ſempre intereſſanti. Qual meraviglia adunque, che queſti voſtri talenti vi abbiano poi aperta ampia ſtrada a meritare inſieme colla ſtima, e coll' amicizia degli uomini per dottrina più rinomati in Europa, che vi riguardano, e conſultano come maeſtro del vero ſapere, illuſtri, e ragguardevoli impieghi. Queſti talenti vi attirarono l' onorevole ca-*

*rica di Storiografo dell' insigne Ordine Gerosolimitano: questi vi procurarono, che a gara le prime Accademie cercassero di potervi annoverare tra il loro ceto, fra le quali quella di Parigi delle Iscrizioni, e belle lettere di non usate distinzioni volle ricolmarvi. Mercè di questi chiamato foste dal sempre glorioso D. FILIPPO a Parma per lo stabilimento della pubblica Real Biblioteca; e questo augusto monumento della munificenza de' Reali Sovrani FILIPPO, e FERDINANDO da Voi ideato, condotto, e perfezionato in poco più di quattro anni fa conoscere abbastanza nella copia, e nella scelta de' libri impressi, e manoscritti, che l' ammirazione formano de' più dotti viaggiatori, l' alta vostra cognizione nella Bibliografia, la vostra attività, il vostro gusto squisitissimo, e il più giusto elogio somministra del vostro incontrastabil valore. Quindi a gran ragione allorchè il Reale Infante D. FERDINANDO sempre vegliante alla vera felicità de' fortunati suoi sudditi, animato da quel genio sublime per gli ottimi studj, ne' quali è stato educato con saggia, e provvida disposizione il magnanimo cuore, e l' instancabil mente rivolse allo risorgimento d' una fiorente Università, a Voi ben tosto le mire diresse, e tutto il grande affar ne commise. E come poi non giubilò la comune espettazione nel vedere, mercè la sagace vostra direzione, la grande idea felicemente eseguita, e perfezionata? I più sinceri encomj riscuotono l' ordine, la disciplina, il regolamento delle Regie Scuole per opera vostra stabilito, e sopra tutto l' erezione de' tre Tea-*

*tri di Fisica sperimentale, di Anatomia, e di Chimica a Voi dovuta con tanto decoro dell' Università, e vantaggio dello Stato. Giacchè adunque degli studj il protettor siete, e il promotore, non isdegnate, che col vostro nome illustrata comparire ardisca un' Opera, che se non in riguardo alla fiacchezza del talento di chi ve l' offre, in riguardo certamente alla materia, che vi si tratta, viene ad essere non indegna di Voi. Voi pertanto colla solita vostra umanità accoglietela, e l' Autor suo col favore, e colla protezion vostra graziosamente risguardate.*

# IL CALCOLO DELLE QUANTITÁ INDETERMINATE.

# PREFAZIONE.

DElla parte più intereſſante fra le Matematiche comincio a trattare in queſto ſecondo Tomo. Tale è il Calcolo delle quantità indeterminate, la di cui eccellenza, e ſublimità accoppiata a un ſommo vantaggio ha avvalorato, e ſtimolato i primi ingegni da in circa due ſecoli in quà a promoverne con ogni premura, e impegno i fortunati progreſſi. E ben meritamente è egli ſtato, ed è tuttavia lo ſcopo delle più profonde meditazioni, e delle principali ricerche, avvegnachè il fondamento ſia, e la guida alle più importanti, e ſtrepitoſe ſcoperte. Quantunque poi appreſſo noi incontraſtabile ſia l' Epoca pur ora fiſſata, non è però da negarſi avere per lo meno i più inſigni Matematici antichi Euclide, Teone, Pappo, Archimede, Apollonio da lungi veduto il lume, e ſeguite le traccie di queſta ſorprendente ſcienza, il di cui ſpirito vedeſi di tratto in tratto nell' Opere loro maeſtrevolmente brillare. Il primo, e ſolo fra i Greci, che ſu di queſta materia abbia ſcritto è ſtato Diofanto Aleſſandrino autor poſteriore alla naſcita di Gesù Criſto giuſta il comune conſenſo, che tredici libri compoſe circa il modo di riſolvere i problemi ſemideterminati riguardanti i numeri quadrati, e cubi, de' quali i ſei primi ritrovati furono, e pubblicati nel 1575. per opera di Guglielmo Xilandro. Avanti per altro l'edizione di queſti ſei libri trattata fu l'Algebra fino alle equazioni quadrariche da F. Luca Paciolo Minore Conventuale da Borgo S. Sepolcro, il di cui libro intitolato *Somma d' Aritmetica, e Geometria* fu ſtampato a Venezia nell' anno 1494. La promoſſero in ſeguito verſo la metà del decimo ſeſto ſecolo Nicolò Tartaglia, Girolamo Cardano, e Scipione Ferreo, il quale ritrovò la riſoluzione delle equazioni cubiche pubblicata poſcia dal Cardano unitamente a quella delle equazioni quadrato-quadrate inventata da Lodovico de' Ferrari. Era ciò non pertanto in allora l' Algebra naſcente tuttavia, e bambina, e a parlar con rigore altro propriamente non era, che una regola d' Aritmetica, poichè non altrimenti, che coi numeri eſprimevanſi le quantità cognite. Ma non molto tardò ad acquiſtarſi quella faccia di generalità, che con indicibile utilità ſopra l' antica ora gode. Era queſta gloria riſerbata al tanto celebre Franceſco Vieta onor della Francia, di mezzo al cui ſeno ſpuntò ſu la fine del decimo ſeſto ſecolo. Con ſoſtituire ai numeri le lettere dell' Alfabeto per diſegnare non meno le quantità incognite, che le cognite, ſollevò dal grado di ſchiavitù, e dipendenza l'Algebra inſegnata dal Tartaglia, e dal Bombelli: nè qui ſi arreſtò quaſi limitata la ſagace induſtria, e lo ſpirito inventore del gran Geometra. Immaginò egli quaſi tutte le trasformazioni coi loro uſi; inſegnò come dalle radici, allorchè ſono tutte poſitive, ſi formino le equazioni; introduſſe il paragone d' una equazione indeterminata con una data a fine di ſcoprirne le radici, onde poi facil coſa gli fu paſſare alla generale riſoluzione delle equazioni di terzo, e quarto grado; e finalmente a imitazione dell' eſtrazione delle radici la riſoluzione ecumenica propoſe delle equazioni numeriche. Ben è vero però, che non preſe a conſiderare le radici negative, e immaginarie, che il Bombelli aveva introdotte nel calcolo, lo che fece in ſeguito Tommaſo Harriot, e di poi con maggiore eſtenſione l' immortale Carteſio, fra le cui mani videſi d'improvviſo l'Algebra quaſi rinaſcere, e più amplo dominio

minio acquistando prender nuovo assai più interessante aspetto. Per quanto spetta all' Algebra pura, introdusse esso l'uso degli esponenti, e però i fondamenti gettò del loro calcolo: oltre le radici reali tanto positive, che negative, ravvisò, e distinse le impossibili, che colle reali il numero riempiono delle dimensioni delle equazioni: la maniera scoprì di determinar il numero delle radici positive, e negative nelle equazioni aventi tutte le radici reali, e sì felicemente propose il metodo degli indeterminati, che meritò d' esserne comunemente riguardato come l'inventore. Tutto però un tale, e tanto edifizio non potevasi così tosto inalzare, e a perfezione condurre, nè dato era a pochi di formare una scienza, la quale un ammirevole sforzo contrassegnando dell' umano intendimento, tanto su gli altri tutti s'inalza, e signoreggia: per lo che non è meraviglia, se a quanti sono venuti in poi è tuttavia restato un vasto campo, a cui o perfezionando i metodi già trovati, o inventandone nuovi, le sempre feconde loro idee vantaggiosamente estendere. Fra questi special menzione, e somma lode esige l' incomparabil Filosofo, e Matematico Isacco Newton, cui siamo debitori de' metodi più sublimi nel calcolo, de' quali tratterò a suo luogo, e per ora mi contenterò d' indicare la sua formola generale per l' elevazione d'una quantità a qualsivoglia potestà, e per l' estrazione di qualunque radice; il metodo d' indagare il numero delle radici immaginarie nelle equazioni; e la maniera di fissare i limiti alle radici reali, al che pensò egli a fine di giungere alla cognizione delle radici nelle equazioni superiori al quarto grado, oltre le quali non si estendevano le ritrovate risoluzioni. Questa risoluzione delle equazioni superiori quanto importante al compimento, e alla perfezione di questo studio, altrettanto trovasi fra dense tenebre avvolta, a rischiarare le quali contribuì in parte il Newton, coll' accennato metodo, ma non già in tutto, che perciò vi hanno di poi i loro sforzi impiegati i Signori Claitaut, Mayer, Euleto, e Bezout. I loro metodi sono degni di questi grand' uomini, ma come all' esito corrispondano lo vedremo allorchè ne dovremo fare parola. Soverchiamente mi estenderei se volessi nominatamente encomiare chiunque o in una, o in un' altra parte ha in seguito l' Algebra arricchita. Celebri sono e i nomi, e le scoperte de' gran Geometri, che tutt' ora le fatiche, e gli studj loro consacrano in un così utile, e profittevol lavoro. Ne ho io in gran parte approfittato per questo secondo Tomo, in cui ho avuto in vista di trattarne la materia (siccome mi sono prefisso di fare rispetto alle altre parti, che devono seguire) con quella estensione, e precisione, che a tutta ragione esigono il pregio dell' opera, l'esattezza di chi vuole scrivere, e il diritto di quelli, pe' quali si scrive, onde costretti non si trovino d'andar cercando altrove ciò, che qui poteva, e doveva esser trattato. La mira pertanto di dare un compiuto trattato d' Algebra puta ha resa non mediocre la mole del libro, quantunque abbia procurato di unire alla possibile chiarezza la maggiore brevità: Ma l'abbondanza delle materie non mi ha permesso altrimenti; nè io no giudicato bene di regolarmi su la condotta comunemente tenuta dagli scrittori di libri elementari, i quali per non ispaventare a prima faccia colla grossezza del libro gli studiosi amano di ommettere molte anche importantissime cose a solo oggetto di preferire la brevità, mentre questo non volere spaventar molti, che per altro dalla sola velleità son condotti, è piuttosto un non voler servir quelli, che vogliono veramente imparare, e pei quali unicamente devesi scrivere. Mi sono fatto carico di esporre le cose con tutta chiarezza, a fine di facilitare a chiunque questo studio così indispensabile, e necessario a chi vuol mover passo, e avanzarsi nelle matematiche. Veramente anzi che la sostanza, egli è piuttosto il nome d' Algebra,

e l'este-

e l'esteriore apparato delle operazioni ciò, che sgomenta i principianti, e glie ne fa parer difficile l'acquisto, del che per rimanerne convinto basta riflettere, che tutta questa scienza si appoggia, e si aggira su le prime operazioni del calcolo, che altro in realtà non sono, che operazioni Aritmetiche, nelle quali in luogo de' numeri si usano le lettere dell'Alfabeto. Per inoltrarsi con ispeditezza, e franchezza basta intendere, e rendersene familiare il linguaggio, quale agevolmente si acquista con uno studio ordinato, e riflessivo. Di tratto in tratto secondo il bisogno ho applicato a qualche problema le regole esposte a fine di mostrarne la pratica, e facilitarne la intelligenza, non approvando di ammassarne fuori di proposito in copia, come sogliono fare gli scrittori d' Algebra, ben sicuro, che chi si impossesserà delle esposte dottrine, anzi che aver bisogno di mendicare da altri le risoluzioni de' problemi saprà da se con tutta facilità ritrovarle. Per quanto riguarda l'ordine, e le materie in questo Tomo trattate, rimetto i lettori all'indice, che immediatamente segue, poichè parlando egli abbastanza non istimo a proposito, anzi giudico superfluo il farne due: soltanto mi contenterò di soggiugnere, che quì si troveranno molte cose, che negli altri Libri elementari d'Algebra nemmeno si vedono accennate.

# INDICE DELLE MATERIE.

## CAPO I.

Delle prime Nozioni d'Algebra tanto nelle quantità intere, come nelle fratte, e assimetre.


| | Pag. | Num. |
|---|---|---|
| ART. I. *Delle necessarie nozioni preliminari.* | 1 | 1 |
| ART. II. *Delle quantità positive, e negative.* | 2 | 16 |
| ART. III. *Del Calcolo delle quantità incomplesse.* | 5 | 28 |
| ART. IV. *Del Calcolo delle potestà imperfette sì positive, che negative.* | 16 | 119 |
| ART. V. *Del Calcolo delle quantità radicali monomie.* | 18 | 130 |
| ART. VI. *Delle quantità monomie immaginarie, e loro calcolo.* | 23 | 160 |
| ART. VII. *Della Somma, e Sottrazione delle quantità complesse.* | 26 | 181 |
| ART. VIII. *Della Moltiplicazione, e Divisione delle quantità complesse.* | 28 | 193 |
| ART. IX. *Modo di trovare tutti i divisori di una data quantità algebraica, e tra due quantità il massimo comun divisore.* | 32 | 211 |
| ART. X. *Del Calcolo delle frazioni.* | 33 | 220 |
| ART. XI. *Modo d' inalzare una quantità Algebraica complessa a qualsivoglia potestà tanto determinata, come indeterminata: Della formola Nevvtoniana, e della maniera di servirsene.* | 38 | 237 |
| ART. XII. *Dell' Estrazione delle radici.* | 51 | 266 |
| ART. XIII. *Del Calcolo delle quantità complesse radicali, e immaginarie.* | 56 | 282 |


## CAPO II.

Della maniera di usare il Calcolo Algebraico nella soluzione de' Problemi.


| | | |
|---|---|---|
| ART. I. *Del modo di esprimere algebraicamente i Problemi, delle equazioni di primo grado, e della loro risoluzione.* | 63 | 306 |
| *Delle Formole generali per la eliminazione delle incognite dalle equazioni di primo grado aventi più incognite.* | 77 | 345 |
| *Formole suddette Tavola IV.* | 92 | |
| ART. II. *Della risoluzione delle equazioni di secondo grado.* | 98 | 379 |
| *Modo di fare sparire i radicali da una data formola.* | 107 | 407 |
| *Della risoluzione delle equazioni della forma* $x^{2m} \pm px^m \pm q = 0$. | 108 | 411 |
| *Modo di estrarre la radice quadrata dai binomj radicali quadrati.* | 110 | 414 |
| ART. III. *Dei Problemi più che determinati, indeterminati, semideterminati, e degli artifizj di Diofanto.* | 115 | 421 |
| *Osservazioni sulle equazioni finali.* | 134 | 453 |


## CAPO III.

Teoria generale delle equazioni, e della loro risoluzione.


| | | |
|---|---|---|
| ART. I. *Della genesi, e delle proprietà a qualsivoglia equazione comuni.* | 136 | 459 |
| *Modo di rendere omogenei i termini di una equazione* | 142 | 489 |


Modo

| | Pag. | Num. |
|---|---|---|
| *Modo di togliere da una equazione il ſecondo termine.* | 143 | 494 |
| *Modo di togliere il terzo termine dalle equazioni.* | 145 | 498 |
| ART. II. *Modo di diſtinguere le diverſe ſpecie di radici nelle equazioni.* | 146 | 499 |
| ART. III. *Delle trasformazioni delle equazioni.* | 155 | 519 |
| ART. IV. *Delle equazioni, che contengono radici uguali, e del modo di ritrovarle.* | 161 | 547 |
| ART. V. *Modo di ritrovare le formole generali per la eliminazione di una, di due ec. incognite per mezzo di due, di tre ec. equazioni di qualſivoglia grado a due, a tre ec. incognite.* | 164 | 558 |
| ART. VI. *Della riſoluzione delle equazioni di terzo grado.* | 188 | 571 |
| *Modo di eſtrarre la radice cuba da un binomio radicale cubo.* | 194 | |
| ART. VII. *Della riſoluzione delle equazioni di quarto grado.* | 197 | 593 |
| ART. VIII. *De' metodi fin' ora trovati per la riſoluzione delle equazioni ſuperiori.* | 204 | 615 |
| *Metodo I. Per mezzo de' diviſori ſemplici, e compoſti.* | 205 | 616 |
| *Metodo II. Mediante il ſupporre una radice dell' equazione di queſta forma* $x=m+n+p$ *ec., in cui il numero delle Lettere* $m, n$ *ec. dee eſſere uguale al grado dell' equazione da riſolverſi diminuito d' una unità.* | 219 | 638 |
| *Metodo III. Per tutte le equazioni, che ammettono una radice della forma* $\sqrt[n]{\frac{1}{2}m+\sqrt{\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{27}p^n}}+\sqrt[n]{\frac{1}{2}m-\sqrt{\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{27}p^n}}$ | 222 | 647 |
| *Metodo IV. Mediante il ritrovare i limiti, fra i quali cadono le radici dell' equazione.* | 230 | 665 |
| *Modo di approſſimarſi ai veri valori delle radici irrazionali delle equazioni.* | 235 | 675 |
| *Formola generale per queſta approſſimazione.* | 236 | 676 |
| *Metodo V. Mediante il conſiderare l' equazione da riſolverſi come il riſultato di due equazioni a due incognite, delle quali una è ſtata eliminata.* | 239 | 679 |
| *Metodo VI. In cui ſi ſuppone, che la radice reale, che ha ſempre un' equazione di grado impari eſpreſſo da n ſia della forma* $p\sqrt[n]{u}+q\sqrt[n]{u^2}\ldots.+t\sqrt[n]{u^{n-1}}$. | 242 | 686 |
| ART. IX. *Metodo generale, e facile di trovare tutte le radici di qualſivoglia equazione.* | 248 | 690 |
| ART. X. *Modo di trovare la maſſima radice poſitiva, e la maſſima radice negativa di qualſivoglia equazione.* | 270 | 733 |
| ART. XI. *Modo di eſtrarre da un compleſſo di radicali una qualunque radice.* | 273 | 734 |


## CAPO IV.

### Delle eſpreſſioni Algebraiche delle Ragioni, Proporzioni, Progreſſioni, Logaritmi ec., e loro formole generali.


| | | |
|---|---|---|
| ART. I. *Delle ragioni, proporzioni, e progreſſioni.* | 285 | 746 |
| *Modo di trovare tra due quantità un qualſivoglia numero di medj proporzionali geometrici.* | 293 | 765 |
| ART. II. *Delle eſpreſſioni Logaritmiche, e delle equazioni eſponenziali.* | 295 | 765 |
| ART. III. *Delle formole ecumeniche riſguardanti i numeri figurati.* | 303 | 787 |
| *Della ſomma di qualſivoglia poteſtà proveniente dai termini della ſerie naturale.* | 306 | 792 |

Pag. Num.

ART. IV. *Delle formole generali per le combinazioni, e permutazioni.* 312 804

## CAPO V.

### Delle Serie.

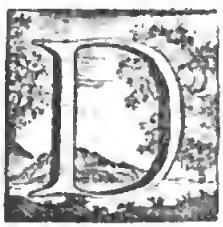
ART. I. *Della natura, diſtinzione, e geneſi delle Serie.* 314 807
*Modo di ſpezzare una frazione in più frazioni.* 329 834
ART. II. *delle Frazioni continue.* 337 854
ART. III. *Della moltiplicazione, diviſione, elevazione a poteſtà, eſtrazione di radici nelle ſerie infinite.* 354 870
ART. IV. *Del regreſſo delle Serie.* 370 895
ART. V. *Modo di ſommare le Serie.* 373 906
*Modo di ſommare le Serie Algebraiche.* 378 917
*Modo di ſommare le Serie Geometriche.* 399 948
*Modo di ſommare le Serie Algebraico-Geometriche.* 401 954
*Modo di ſommare le Serie che naſcono dalla ſucceſſiva moltiplicazione, e diviſione de' termini di Serie Algebraiche.* 422 975
ART. VI. *Della interpolazione delle Serie.* 435 995

# CAPO I.

## DELLE PRIME OPERAZIONI D'ALGEBRA TANTO NELLE QUANTITA' INTERE, COME NELLE FRATTE, E ASSIMETRE.

### ARTICOLO I.

*Delle neceſſarie nozioni preliminari.*

1.  Ef. 1. L'Algebra non è altro, che un'arte di calcolare generalmente qualunque ſorte di quantità, mediante l'eſprimerla con ſegni univerſali, quali ſono le lettere dell'Alfabeto, che, eſſendo per ſe ſteſſe indeterminate a ſignificare piuttoſto una quantità, che un'altra, ſi poſſono ad arbitrio uſare per denominarne quale più piace.

2. Ed ecco il perchè ho detto, che ella è un'arte di calcolare generalmente, avvegnachè in luogo di ſervirſi de' numeri, i quali eſprimono determinatamente, adoperi le lettere dell'Alfabeto, ſotto cui ſi può intendere qualunque coſa più ſi voglia. Per lo che qualora ſaranno propoſte alcune quantità da calcolarſi, ſe ne denominerà ciaſcuna con una lettera, indi ſi calcoleranno queſte lettere giuſta le regole, che eſporrò in appreſſo. Compita poi l'operazione, ſi ſoſtituiranno in luogo delle lettere i valori, che dalle medeſime erano eſpreſſi, e in queſto modo ſi avrà ciò, che col calcolo ſi ricercava. Per Eſempio volendo ſapere lo ſpazio, che in 17 minuti di tempo avrà percorſo un Corpo, il quale ſi muove con tre gradi di velocità, colla lettera $a$ io diſegno i dati tre gradi di velocità, e colla lettera $b$ eſprimo i 17. minuti; indi calcolo queſte due lettere $a$, $b$ nella maniera, che eſigono le regole da trattarſi, e fattane l'operazione, rimetto il 3 in vece di $a$, e il 17 in vece di $b$, e in queſto modo ritrovo quello che ricercava.

3. Il Calcolo, che ſi fa colle lettere, è ordinato a rappreſentare nella maniera la più ſemplice, che ſia poſſibile, il riſultato di una, o più operazioni aritmetiche.

4. Nell'Algebra due parti ſi diſtinguono: La prima è il metodo di calcolare; la ſeconda è la maniera di ſervirſi di queſto calcolo nella ſoluzione de' Problemi.

5. Le quantità dello ſteſſo genere ſi eſprimono colla medeſima lettera, e le quantità di diverſo genere ſi eſprimono con diverſe lettere. Che ſe di due quantità dello ſteſſo genere, o ſimili, una ſarà doppia, tripla, quadrupla ec. dell'altra, eſſa ſi eſprimerà bensì colla medeſima lettera, con cui ſi è indicata l'altra, ma a tale lettera ſi dovrà preſiggere quel numero, ſecondo cui ella è moltiplice dell'altra: Come ſe di due quantità la prima ſarà quintupla della ſeconda, e queſta ſi chiami $a$, l'altra ſi dovrà eſprimere per $5a$.

6. Def. 2. Codeſti numeri preſiſſi alle lettere chiamanſi i loro coefficienti. L'uffizio pertanto dei coefficienti è di additare quante volte debbaſi prendere la quantità da tale lettera diſegnata.

7. Corol. Alle lettere pertanto, che non hanno prefisso alcun numero, devesi sempre intendere prefisso l'unità, avvegnachè rappresentino una quantità presa una sola volta.

8. Poichè colle lettere si denotano le quantità; io in avvenire chiamerò quantità le lettere stesse.

9. Def. 3. Quantità incomplessa, o monomia, cioè a dire di un sol termine, e quella, che costa di una sola lettera; o pure di più lettere, che però frammezzate non sono da alcun segno; come $a$; $cb$; $bde$. ec.

10. Def. 4. Quantità complessa è quella, che costa di più lettere insieme unite per mezzo de' segni $+$, o $-$; come $a+b$; $a+bd-ce$ ec. Se la quantità complessa costa di due termini, come $b+cd$, dicesi binomia; Se di tre, come $ad-f+g$, dicesi trinomia ec. E generalmente si chiama polinomia. Se poi risulterà da un numero infinito, o sia indefinito di termini, ella si chiamerà infinitinomia, o indefinitinomia.

11. Def. 5. Quantità complessa simile ad un' altra è quella, in cui tutti i termini sono simili rispettivamente ai termini dell'altra. E qui si osservi, che la diversità dei coefficienti numerici non turba la simiglianza, o dissimiglianza di due termini, ma la sola diversità delle lettere, come costa dal num. 5.

12. Qui si richiami la spiegazione de' segni data nel primo Tomo al num. 51. ec. Ai segni colà esposti si aggiunga il segno $\infty$, che esprime l'Infinito, onde $x=\infty$ vuol dire, che la $x$ è infinita, cioè infinitamente grande.

13. Poichè (giusta il num. 3.) i Calcoli algebraici altro non sono, che operazioni aritmetiche indicate, ben si scorge che in Algebra si opera più speditamente, che in Aritmetica; e siccome le lettere, che sono i segni, con cui si calcola, sono generali, così pure generali sono le operazioni, che ne risultano, così che fatta una volta una operazione, ella può servire per infiniti casi consimili mediante la sostituzione d' infiniti diversi valori in luogo delle quantità letterali; laddove in Aritmetica ad ogni caso particolare richiedesi una nuova operazione, a motivo che i numeri sono quantità determinate, cui non si possono sostituire altri numeri senza fare una nuova operazione. In oltre, perchè le lettere non si confondono tra loro come fanno i numeri, in un sol colpo di vista si vede tutta distintamente l' operazione Algebraica.

14. Dall' Aritmetica distinguesi in questo ancora l'Algebra, che non solo è applicabile alla risoluzione, e dimostrazione di qualsifia sorte di Problemi, ma di più serve all' invenzione de' Teoremi, a motivo che le sue operazioni generalissime sono, ed invariabili.

15. Questa scienza, che è stato un parto sorprendente dell'umano intendimento, e a cui certamente niun'altra umana invenzione puossi pareggiare, serve a scuoprire con somma facilità, e con maravigliosa prontezza le più astruse, e incognite verità mediante un piccol numero di dati, alle quali artifiziosamente conduce con una occulta ordinatissima serie di raziocinj; e con legare le idee a semplicissimi segni solleva gli sforzi della memoria, e dell'immaginazione, che altronde sarebbero stati indispensabili per conservare presenti allo spirito le diverse cognizioni necessarie allo scopo; e colla combinazione di questi segni si convertono in linguaggio sensibile lunghe serie di argomenti, che senza un tale soccorso esigerebbero una attenzione la più seria, e costante, affine di tracciarne il legame. A tutto ciò si aggiunge, lo che è più sorprendente, che sovente in questa scienza si esprimono tante verità in una sola linea, che coll'ordinaria maniera di esporre, e dimostrare richiederebbero un intero volume.

AR-

## ARTICOLO II.

*Delle quantità positive, e negative.*

16. DEf. Le quantità positive, e negative non sono altro, che quantità, le quali vicendevolmente si oppongono secondo qualche rispetto, e però una secondo il medesimo rispetto, esclude l' altra.

17. Corol. 1. Siccome l' opposizione è vicendevole, però di due quantità opposte sarà arbitrio il prendere quale di loro più si voglia per positiva, o per negativa. Fissata però che ne sia una per positiva, l' altra sarà negativa, nè su di loro si potrà più arbitrare. Il costume introdotto egli è di prendere per positiva quella, che da se si esibisce la prima alla nostra considerazione.

18. Corol. 2. Poichè le quantità negative non sono tali, se non a motivo dell' opposizione, che dicono alle quantità positive, in quanto che cioè a loro si attacca un' idea contraria all' idea delle quantità positive, quindi è che non si danno, nè si possono dare realmente, e assolutamente quantità negative isolate, e solitarie, mentre prese in questo modo astrattamente niuna idea rappresenterebbero allo spirito, essendo che la quantità negativa non ha la sua esistenza come tale, se non per la opposizione, che involve, alla quantità positiva.

19. Corol. 3. Essendo la sola quantità negativa in istato di opposizione, laddove la quantità positiva è in istato assoluto, però la quantità positiva sussiste solitaria, nè ha bisogno, che di se stessa, per essere chiaramente concepita.

20. Corol. 4. Quindi la differenza, che passa tra le quantità positive, e negative, sussistendo soltanto nel loro stato di opposizione, lo che non muta l' intrinseco costitutivo di quantità, ma soltanto dinota una diversa situazione a loro estrinseca, perciò sono vere quantità reali tanto le positive, come le negative.

21. Ma per determinare in che consista l' opposizione, che si considera fra le quantità positive, e negative, eccomi all' Esempio. Fingasi che un Corriere debba partire da Modena per andare a Roma: Perchè il viaggio da Modena a Roma si presenta per se stesso naturalmente nella fatta supposizione alla nostra considerazione, perciò lo prendiamo per una quantità positiva, e perchè la strada di Reggio è in una direzione totalmente opposta a quella di Roma, quindi viene ella risguardata per una quantità negativa: Onde è, che se l' anzidetto Corriere avrà fatto una certa porzione di strada verso Roma, si dirà, che egli ha tanto viaggio positivo; ma se in vece d' incamminarsi verso Roma, si sarà incamminato verso Reggio, si dirà, che egli ha altrettanto viaggio negativo, quanta strada avrà fatto.

22. Comunemente gli Scrittori d' Algebra si sono intesi di spiegare le quantità positive, e negative con dire, che le prime sono quantità maggiori del zero, o sia del nulla, e le seconde ne sono minori, ma una tale spiegazione è appoggiata a un' idea totalmente falsa, e inconcepibile, avvegnachè niuna cosa esista, nè possa esistere, e conseguentemente non si possa concepire minore del niente, la di cui giusta idea distrugge onninamente qualunque altra idea di cosa a lui minore. Ben è vero, che tanto le quantità positive, come le negative terminano nel zero, che è di amendue il limite comune, ma ciò non nasce dall' essere le quantità positive maggiori del zero, e le negative minori dello stesso zero, ma dall' essere tanto le une, come le altre vere quantità reali, cui conviene il finire nel zero, o da lui cominciare.

23. Le quantità positive, e negative si distinguono nel calcolo mediante i segni +, e —. Alle positive si prefigge il segno +, come + *a* significa, che *a* è una quntità positiva; alle negative si prefigge il segno —, onde — *a* significa, che *a* è

una quantità negativa. Ordinariamente però alle quantità positive, o siano sole, o siano nel principio di una quantità complessa, non si prefigge alcun segno; onde è, che qualora s' incontrerà qualche quantità da nessun segno affetta, si dovrà sempre intendere affetta dal segno +. Questi segni pertanto +, e — denotano lo stato relativo di contrarietà delle quantità, laddove le lettere rappresentano soltanto il loro stato assoluto, in quanto che si considerano puramente come quantità.

24. Poichè le quantità positive, e negative sono in istato di contrarietà, e opposizione, perciò esse vicendevolmente si distruggono: Onde è, che una quantità positiva si può ridurre a niente coll' aggiungervi una quantità negativa eguale, come sarebbe $3 - 3 = 0$; ovvero può restare positiva coll' aggiungervi una quantità negativa minore, come $9 - 5 = 4$; o pure può passare ad essere negativa, o per dir meglio se ne avrà un risultato negativo coll' aggiungervi una quantità negativa maggiore, come $2 - 7 = -5$. Acciò la cosa rendasi più evidente la spiego con un Esempio. Supponiamo che Pietro sia in possesso di 80. Ducati, ma che nel tempo stesso sia pure debitore di 80. Ducati. Poichè si considera come quantità positiva il denaro, di cui Pietro è in possesso, quindi è, che i di lui debiti si dovranno considerare come quantità negativa; e però avendo Pietro 80. Ducati, ma altronde essendo debitore di 80. Ducati, la somma del suo denaro sarà zero, perchè col pagare il suo debito nulla gli rimane, Che se Pietro essendo in possesso di 80. Ducati ne sarà debitore solamente di 30., la somma del suo denaro sarà di 50. Ducati poichè $80 - 30 = 50$, cioè, pagato che abbia il suo debito, gli restano 50. Ducati. Se poi Pietro essendo in possesso di 80. Ducati, ne sarà debitore di 135. in tal caso la somma del suo denaro sarà — 55. Ducati, cioè a dire non solo non gli rimarrà alcun denaro, ma in oltre resterà tuttavia debitore di 55. Ducati dopo avere pagati gli 80., di cui era in possesso.

25. Qualora si parla delle quantità negative, si deve intendere di quelle veramente tali, come sarebbe $-a$, o pure $a - b$, in cui $b$ sia maggiore di $a$, che se $b$ sarà minore di $a$, la quantità $a - b$ non sarà negativa, ma positiva giusta il num. 24.

24. Sogliono originarsi nel calcolo le quantità negative dalla poco giusta enunciazione de' Problemi, mentre si suppone in una falsa posizione qualche quantità, la quale poi nel progresso del calcolo risulta affetta dal segno —, con che il calcolo stesso, che sovente ci scuopre moltissime verità, che non si cercavano, e alle quali nemmeno si pensava, corregge un errore, che nell' Ipotesi fatto si era. Che per altro se il Problema fosse stato giustamente enunciato, quella quantità, che è risultata negativa, sarebbe comparsa nel vero suo stato positivo. Ma questo punto sarà rischiarato più abbasso.

27. Hanno preteso alcuni, che tra le quantità positive, e negative non si possa dare ragione geometrica, e che però nè l' una, nè l' altra sussista delle due seguenti proporzioni $1 : -1 :: 1 : -1$, e $1 : -1 :: -1 : 1$, ma in ciò a mio giudizio si scostano molto dal vero; imperocchè ( pel num. 464. del Tomo I. ) nelle ragioni, e proporzioni si considerano i puri numeri esprimenti le quantità non già le quantità stesse, e molto meno i segni +, e —, ai quali soltanto si attacca ( pel num. 33. ) la nozione relativa di contrarietà: Di fatto e non si divide, o moltiplica forse 1 per — 1, ovvero — 1 per 1? Eppure queste operazioni fare non si possono senza che stia ( pel num. 495. del Tomo I. ) l' unità al quoziente, come il divisore al dividendo, o pure l' unità a un fattore, come l' altro fattore al prodotto.

AR-

## ARTICOLO III.

*Del Calcolo delle quantità incompleſſe.*

28. PRob. 1. Debbanſi ſommare alcune quantità algebraiche monomie.

29. Riſol. Le quantità date da ſommarſi o poſſono eſſere diſſimili, cioè eſpreſſe da differenti lettere, o poſſono eſſere ſimili, cioè eſpreſſe dalle ſteſſe lettere; e queſte o affette dallo ſteſſo ſegno, o affette da ſegni diverſi.

Se le quantità da ſommarſi ſono diſſimili, ſe ne farà la ſomma collo ſcriverle una dopo l' altra coi loro ſegni ſenz' altra operazione.

### *ESEMPIO I.*

30. Prob. 2. Cercaſi ſe dalla ſomma di due numeri pari riſulti un numero pari, o impari.

31. Riſol. Poichè col moltiplicarſi per 2 un qualunque numero, ne riſulta ſempre un numero pari, però dovendo per Ipoteſi eſſer pari i due numeri da ſommarſi, uno ſi chiami $2a$, e l' altro $2c$, la di cui ſomma ſarà $2a + 2c$, la quale eſſendo diviſibile per 2, che moltiplica l' una, e l' altra quantità, ben ſi vede, che la ſomma di due numeri pari è un numero pari: E ſiccome ( pel num. 14. ) dalle operazioni Algebraiche, ſtante la loro univerſalità, ſe ne deducono i Teoremi, quindi dalla precedente operazione naſce il ſeguente

32. Teorema 1. La ſomma di più numeri pari è un numero pari.

33. Se $2c$ in vece di eſſere poſitivo foſſe ſtato negativo, cioè $-2c$, la loro ſomma ſarebbe $2a - 2c$

34. Qualora le quantità da ſommarſi ſaranno ſimili, e affette dallo ſteſſo ſegno, la loro ſomma cadrà ſolamente ſopra i coefficienti, cioè a dire ſi farà la loro ſomma con prefiggere a quella quantità ſimile la ſomma de' coefficienti, ſe poi ſaranno affette da ſegni diverſi, in tal caſo dal coefficiente maggiore ſi levi il coefficiente minore, e al reſiduo, che deveſi prefiggere alla quantità ſimile, ſi dia il ſegno, da cui era affetto il coefficiente maggiore: Che ſe queſte due quantità avranno coefficiente eguale, dalla loro ſomma ne riſulterà il zero. Per altro a parlare propriamente le quantità negative non ſi ſommano colle poſitive, che anzi ſi ſottraggono ( pel num. 24 )

### *ESEMPIO II.*

35. Prob. 3. Cercaſi quante miglia abbia fatto un Uomo in 3. ore, il quale nella prima ora fece 5. miglia, nella ſeconda ne fece 3., e nella terza ne fece uno.

36. Riſol. Un miglio ſi dica $= a$, dunque nella prima ora egli fece $5a$, nella ſeconda ha fatto $3a$, nella terza ha fatto $a$, la di cui ſomma $3a$ ( pel num. 29. ) ſarebbe $5a + 3a + a$. Ma perchè queſta operazione ſi può fare d' una maniera più ſemplice, eſſendo che la quantità $a$ preſa cinque volte più la ſteſſa quantità $a$ preſa tre volte più la medeſima quantità $a$ è eguale a tale quantità $a$ preſa nove volte, però la cercata ſomma ſarà $9a$ ( giuſta il num. 34 ), e il viaggio fatto dal detto uomo in 3. ore ſarà di 9. miglia.

37. Se

37. Se si fosse cercato il viaggio fatto da un uomo, che dopo avere fatto 15 miglia è ritornato indietro, e ha fatto 7 miglia, con chiamare un miglio $= a$, l'espressione algebraica sarebbe stata $15a - 7a$, cioè $8a$, e però egli avrebbe fatto 8 miglia. Se fosse ritornato indietro per 15 miglia, l'espressione sarebbe stata $15a - 15a = 0$, cioè nulla di viaggio avrebbe fatto.

38. Dovendosi sommare insieme due quantità negative, si uniscono egualmente coi segni, che hanno: Così la somma di $-a$ con $-b$ è $-a-b$; e la somma di $-2b$ con $-b$ è $-3b$.

39. La quantità pertanto negativa aggiunta a una negativa la aumenta nella sua negazione; aggiunta a una positiva la scema nell'essere suo positivo. La quantità positiva aggiunta a una negativa la scema nella sua negazione, e aggiunta a una positiva la aumenta nel suo essere positivo.

40. Questa somma algebraica non è altro, che la maniera d'indicare (pel num. 3.) la corrispondente operazione aritmetica: Onde quando per avere la somma di $a$ con $b$ scrivo $a+b$, non faccio altro, che indicare, che se con $a$ si disegna un numero, e con $b$ un altro, a tenore dell'espressioci da $a+b$, bisognerà sommare insieme questi due numeri, il di cui risultato sarà differente secondo i valori numerici, che si assegneranno ad $a$, e $b$.

41. Def. La sottrazione è una operazione, mediante la quale la quantità da sottrarsi si pone in uno stato contrario a quello, che da prima aveva, onde indicarne la differenza dall'altra.

42. E quì bisogna osservare di non confondere il sottrarre col diminuire, mentre col diminuire, la quantità diminuita risulta sempre minore, laddove nel sottrarre, la quantità, da cui si è fatta la sottrazione, molte volte risulta maggiore di quello, che ella era, come or ora vedremo.

43. Prob. 4. Da una quantità incomplessa se ne debba sottrarre un'altra.

44. Risol. Alla quantità, da cui devesi fare la sottrazione, si scriva apresso la quantità da sottrarsi col segno mutato, così che se la quantità da sottrarsi aveva il segno positivo, vi si deve scrivere appresso col segno negativo; se aveva il segno negativo, vi si deve scrivere appresso col segno positivo.

45. Dim. Pel num. 41. la sottrazione è una operazione, in cui la quantità da sottrarsi si colloca in istato contrario a quello, che aveva; ma (pel num. 23.) questo stato di contrarietà viene espresso dai segni $+$, e $-$: Dunque se la quantità da sottrarsi era affetta dal segno $+$ devesi scrivere col segno $-$; e se era affetta dal segno $-$ devesi scrivere col segno $+$. Lo che dovevasi dimostrare.

46. Quando l'una, e l'altra quantità sia simile devesi avvertire di farne la riduzione, quale deve cadere soltanto sopra i coefficienti, con sommare cioè questi coefficienti, quando i loro segni sono simili, o con sottrarne uno dall'altro quando i loro segni sono dissimili (giusta il num. 34.).

## ESEMPIO I.

47. Prob. 5. Cercasi se dal sottrarsi un numero pari da un numero pari resti un numero pari, o impari.

48. Risol. Poichè questi due numeri devono essere pari, si chiami $2c$ il numero, che si deve sottrarre e $2a$ il numero, da cui si deve fare la sottrazione (e quì si noti l'artifizio, che si usa per esprimere questi due numeri pari con $2a$, $2c$, mentre se si fossero chiamati $a$, $c$ si avrebbe bensì con queste due lettere potuto rappresentare due numeri, ma non si sarebbero espressi due numeri pari) e l'ope-

razio-

razione sarà $2a-2c$. Quindi questa differenza essendo divisibile per 2, ella è un numero pari, onde ne nasce il seguente

49. Teorema 2. La differenza di due numeri pari è un numero pari.

*ESEMPIO II.*

50. Prob. 6. Cercasi di quanto Pietro, che è in possesso di 100. scudi, sia più ricco di Paolo, il quale ha di debito 38 scudi.

51. Risol. I 100 scudi di Pietro si chiamino $=a$; il debito di Paolo di 38 scudi si dica $=-b$ (pel num. 24.); ma perchè vuolsi sapere di quanto Pietro sia più ricco di Paolo bisogna sottrarre quello, che ha Paolo da ciò, che ha Pietro, cioè $-b$ da $a$ così $a+b$; e sostituendo in queste due lettere i loro valori numerici, si trova che Pietro è più ricco di Paolo di 138 scudi. Di fatto la ricchezza di Pietro sopra Paolo è ciò, che possiede Pietro più una somma eguale al debito di Paolo.

52. Ed ecco come si verifichi ciò, che ho detto al num. 42., cioè che molte volte dalla sottrazione risulta una differenza maggiore della quantità, da cui la sottrazione si è fatta. Qui poi nasce per se stessa una osservazione da farsi, ed è, che le quantità negative sono tanto minori, quanto da numeri più alti sono espresse, per lo che sarà $-7<-3$. Di fatto col sottrarsi una quantità da un' altra non si può avere un residuo positivo, se la quantità, da cui si fa la sottrazione, non è maggiore della quantità, che si sottrae: Ma col sottrarre da una quantità negativa una parimente negativa espressa da un numero più alto, che l'altra, ne risulta un residuo positivo; come col sottrarsi $-7$ da $-3$ si ha $+4$. Dunque le quantità negative sono tanto minori, quanto da numeri più alti sono espresse.

53. Ilestamente dovendosi sottrarre $3b$ da $7b$ la differenza sarà $7b-3b=4b$; o pure dovendosi sottrarre $-3b$ da $7b$ la differenza sarà $7b+3b=10b$; o sia dovendosi sottrarre $7b$ da $3b$ la differenza sarà $3b-7b=-4b$. Così pure dovendosi sottrarre $3b$ da $-7b$ la differenza sarà $-7b-3b=-10b$; ovvero dovendosi sottrarre $-3b$ da $-7b$ la differenza sarà $-7b+3b=-4b$; o pure da $-3b$ volendosi sottrarre $-7b$ la differenza sarà $-3b+7b=4b$.

54. Per lo che una quantità negativa sottratta da una negativa la scema nella sua negazione; sottratta da una positiva l'aumenta nell'essere suo positivo. Una quantità positiva sottratta da una negativa l'aumenta nella sua negazione; sottratta da una positiva la scema nell'essere suo positivo.

55. Osserverò qui pure di passaggio quello che ho detto al num. 40., e ciò si applichi a tutte l'altre operazioni algebraiche, che questa sottrazione algebraica non è altro, che la maniera d'indicare la corrispondente operazione aritmetica; e però quando per avere la differenza di $b$ da $a$ scrivo $a-b$, non faccio altro, che indicare, che se con $a$ sarà espresso un numero, e con $b$ un altro, a norma di quanto esprime $a-b$, bisognerà sottrarre il numero espresso da $b$ dal numero espresso da $a$ per averne la differenza.

56. Prob. 7. Debbasi moltiplicare una quantità incomplessa per un' altra pure incomplessa.

57. Risol. Quanto alla moltiplicazione delle quantità esse si scrivano immediatamente una unita all' altra: Quanto poi al segno, che si deve prefiggere al prodotto, si osservi se l'uno, e l'altro dei fattori è affetto dallo stesso segno, o pure da segni contrarj. Se l'uno, e l'altro fattore è affetto dallo stesso segno, o egli sia $+$, o egli sia $-$, al prodotto si deve prefiggere il segno $+$; se poi i due fattori sono affetti da segni contrarj, al prodotto si deve prefiggere il segno $-$.

58. Dim. Pel num. 106. del Tomo I. la moltiplicazione non è altro, che una re-

replicata addizione, mediante cui tante volte si pone il moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore; quindi se l'uno e l'altro sarà affetto dal segno +, perchè in tal caso il moltiplicando deve si porre tante volte nello stato indicato dal moltiplicatore, cioè nello stato assoluto, quante sono le unità dello stesso moltiplicante, però il prodotto deve essere affetto dal segno +: Che se l'uno, e l'altro fattore sarà affetto dal segno —, poichè il moltiplicatore è affetto dal segno —, dovrassi porre il moltiplicando tante volte nello stato a lui contrario, quante unità sono nel moltiplicatore, e lo stato contrario a quello del moltiplicando, che è negativo, essendo il positivo, perciò al prodotto si dovrà dare il segno +. Per la stessa ragione se il moltiplicando sarà affetto dal segno +, e il moltiplicatore dal segno —, al prodotto si dovrà prefiggere il segno —, perchè stante il segno contrario del moltiplicatore, il moltiplicando deve si porre nello stato opposto, cioè nello stato negativo, poichè egli era positivo. Finalmente se il moltiplicando sarà affetto dal segno —, e il moltiplicante dal segno +, poichè questo moltiplicatore non importa stato contrario, ma stato assoluto, il moltiplicando dovrassi porre tante volte nello stato, in cui è, quante unità sono nel moltiplicatore, e siccome lo stato del moltiplicando è negativo, perciò al prodotto si dovrà prefiggere il segno —. Lo che si doveva dimostrare.

59. Il modo di scrivere le quantità una unita all'altra per averne il prodotto ha sempre luogo, o le quantità da moltiplicarsi siano diverse, o siano simili, e nel caso che siano simili, il prodotto di due si dice quadrato (pel num. 725. del Tom. I.), il prodotto di tre si dice cubo (pel num. 727. del Tomo I.) ec.

## *ESEMPIO I.*

60. Prob. 8. Cercasi quanto abbia di forza viva un corpo, la di cui massa è 2, e la velocità è 3.

61. Risol. La massa 2 si dica $= a$, la velocità $3 = b$; poichè la forza viva secondo il Leibnitz si misura dalla massa moltiplicata nel quadrato della velocità, però moltiplicandosi $b$ per $b$ si avrà $bb$, che è il quadrato della velocità, e questo quadrato moltiplicandosi per la massa $a$, si avrà $abb$, che è l'espressione della forza viva cercata. Ora se in $abb$ si rimetteranno i corrispondenti valori, si avrà 18 per la cercata forza viva.

62. Che se si dovrà moltiplicare $ab$ in $-d$ il prodotto sarà $-abd$; e dovendosi moltiplicare $-ac$ in $-bd$ il prodotto sarà $abcd$.

63. Quantunque non sia necessario, è però ben fatto in qualunque termine disporre le lettere secondo l'ordine alfabetico; onde in vece di scrivere $cdab$, si scriverà $abcd$.

64. Qualunque quantità letterale prefissa ad un'altra ha ragione di coefficiente, come del termine $ax$ il coefficiente è $a$; per lo che nella quantità $abd$ si può prendere tanto $a$ per coefficiente di $bd$, come $ab$ per coefficiente di $d$.

65. Se le quantità letterali avranno coefficienti numerici, questi coefficienti si dovranno moltiplicare fra loro; e però il prodotto di $3e$ in $7d$ sarà $21de$.

66. I prodotti nati dalla moltiplicazione di quantità letterali rappresentano dei piani, dei solidi, e delle potenze più elevate: Così il prodotto $ab$ rappresenta un piano, di cui un lato è espresso dalla lettera $a$, e l'altro lato dalla lettera $b$: Parimente $abd$, rappresenta un solido, di cui la base è espressa per esempio da $ab$, e l'altezza da $d$.

67. Ecco pertanto, lo che si vedrà sempre più chiaramente in appresso, come (giusta il num. 13.) le quantità nel calcolo algebraico non si confondono tra loro, come

come fanno le quantità numeriche, mentre moltiplicandoſi fra loro due fattori numerici nel prodotto non ſi diſtinguono più queſti fattori, i quali ſi diſtinguono benissimo nel calcolo letterale, poichè moltiplicate fra loro due quantità *a*, *b*, tuttavia appariſcono nel prodotto *ab* queſti fattori. Ciò poi naſce a motivo, che (come più volte ho detto) le operazioni algebraiche non ſono, che operazioni Aritmetiche indicate.

68. Def. 2. Dimenſione di un termine non è altro, che quel numero, il quale indica quante lettere concorrono a formare queſto termine: Così *abc* è di tre dimenſioni, perchè coſta di tre lettere: Parimente *adcfb* è di cinque dimenſioni. Quel numero poi, che moſtra da quante lettere riſulta un termine, chiamaſi eſponente delle dimenſioni di quel tal termine.

69. La moltiplicazione ſi ſuole rappreſentare il più delle volte mediante il ſegno X, lo che ſpeſſiſſimo per più capi è comodo, come ſi vedrà a ſuo luogo.

70. Prob. 9. Debbaſi dividere una quantità incompleſſa per un' altra pure incompleſſa.

71. Riſol. Se nel dividendo vi ſaranno le ſteſſe lettere del diviſore, dal dividendo ſi cancellino le lettere del diviſore, e ciò che rimarrà ſarà il quoziente cercato. Quanto poi al ſegno, che deveſi prefiggere al quoziente, la regola ſarà, che ſe tanto il dividendo, come il diviſore ſarà affetto dal medeſimo ſegno, o egli ſia +, o ſia —, al quoziente deveſi prefiggere il ſegno +; ſe poi il dividendo, e il diviſore ſaranno affetti da ſegni contrarj, al quoziente ſi dovrà dare il ſegno —.

72. Dim. della prima parte. La diviſione è una operazione, la quale riſolve ciò, che la moltiplicazione ha compoſto; ma (pel num. 57.) il prodotto riſulta dai due fattori inſieme uniti; dunque ſe per uno de' fattori ſi dividerà il prodotto, ne riſulterà di quoziente l' altro fattore; e però il quoziente non è altro, che il reſiduo riſultante dal levarſi dal dividendo le lettere del diviſore. Lo che ſi doveva in primo luogo dimoſtrare.

73. Dim. della ſeconda parte. Pel num. 57. il prodotto di due quantità affette dai medeſimi ſegni deve avere il ſegno +; e il prodotto di due quantità affette da diverſi ſegni deve avere il ſegno —: Ma (pel num. 132. del Tomo I) il dividendo è il prodotto del quoziente nel diviſore, per lo che in ogni diviſione non altro ſi cerca per quoziente, che quella quantità, la quale moltiplicata nel diviſore produce il dividendo; dunque ſe il ſegno del dividendo ſarà poſitivo, il ſegno del quoziente ſarà eguale al ſegno del diviſore; ſe poi il ſegno del dividendo ſarà negativo, il ſegno del quoziente ſara contrario al ſegno del diviſore; e però ſe il dividendo, e il diviſore ſaranno affetti dal medeſimo ſegno, il ſegno del quoziente dovrà eſſere poſitivo, ſe poi ſaranno affetti da ſegni contrarj, il ſegno del quoziente dovrà eſſere negativo. Lo che ſi doveva in ſecondo luogo dimoſtrare.

## *ESEMPIO.*

74. Prob. 10. Cercaſi la larghezza di un Fiume, di cui è data la ſezione regolare *ab*, e l'altezza *b*.

75. Riſol. Poichè la ſezione riſulta dall' altezza moltiplicata nella larghezza, ſe colla data altezza *b* ſi dividerà la ſezione *ab*, il quoziente darà la cercata larghezza; e ſiccome tanto nel diviſore, come nel dividendo ha luogo la ſteſſa quantità *b*, però dall' uno, e dall'altro ella ſi cancelli, onde rimarrà *a*, che darà il quoziente, o ſia la larghezza cercata: Se pertanto la propoſta ſezione *ab* ſoſſe = 210 paſſi

ſuperfiziali, e l'altezza $b = 5$ paſſi, il quoziente trovato $a$ ſarebbe $= 42$ paſſi; e però tale la larghezza, che erali propoſto di trovare.

76. Quantunque ſia vero, che nella diviſione delle quantità monomie devonſi ſupprimere le quantità comuni al diviſore, e al dividendo, non però deveſi inferire, che col dividerſi $abd$ per $abd$, ſoppreſſe le lettere ſimili del diviſore, e del dividendo, riſulti per quoziente il zero, poichè in tal caſo il quoziente è 1, dove tutte le lettere veramente ſpariſcono, come preſcrive la regola; ma ſiccome (pel num. 7.) a qualunque quantità algebraica deveſi intendere prefiſſa l'unità per coefficiente, però le due quantità propoſte ſaranno $1abd$, $1abd$, e dividendoſi una per l'altra il quoziente ſarà $\frac{1}{1} = 1$. Di fatto il dividere una quantità per un'altra non è altro, che cercare quante volte una è contenuta nell'altra; ora una quantità è contenuta in ſe ſteſſa una volta; dunque col dividerſi una quantità letterale per un'altra quantità letterale uguale il quoziente ſarà l'unità.

77. Se nel diviſore, e nel dividendo vi ſaranno coefficienti, ſi dividano tra loro queſti coefficienti, e cancellate le lettere ſimili nel diviſore, e nel dividendo, alle rimanenti lettere ſi prefigga il quoziente, che naſce dalla diviſione de' coefficienti: Come dividendoſi $15abdc$ per $5ac$ il quoziente ſarà $3bd$.

78. Quando nel diviſore, e nel dividendo non ſianvi le medeſime lettere, in tal caſo ſi eſprima la diviſione a modo di frazione: Come dovendoſi dividere $dc$ per $ab$, ſi farà $\frac{dc}{ab}$.

79. Se poi il diviſore, e il dividendo avranno qualche lettera ſimile, ſi cancellino le lettere comuni, e ciò che rimane ſi eſprima a modo di frazione: Come dovendoſi dividere $3adm$ per $2bd$ ſi farà $\frac{3adm}{2bd} = \frac{3am}{2b}$. E queſta operazione, quale non è altro, che la riduzione di una frazione a minimi termini, coſta dal num. 227. del Tomo I.

80. Alle volte ſuccederà, che ſi poſſano dividere le quantità letterali, e non i coefficienti, come qualora ſi debba dividere $7a$ per $3a$, ed il quoziente ſarà $\frac{7a}{3a} = \frac{7}{3}$; o pure dovendoſi dividere $5am$ per $4m$ il quoziente ſarà $\frac{5am}{4m} = \frac{5a}{4}$; o ſuccederà che ſi poſſano dividere i coefficienti, ma non già le quantità letterali, come dovendoſi dividere $8bc$ per $4a$, il quoziente ſarà $\frac{8bc}{4a} = \frac{2bc}{a}$.

81. Riſpetto poi ai ſegni dovendoſi dividere $-adm$ per $-dm$ il quoziente ſarà $a$; e dovendoſi dividere $-adm$ per $dm$, o $adm$ per $-dm$ il quoziente ſarà $-a$. E poichè il quoziente è ſempre negativo ogniqualvolta il diviſore, e il dividendo hanno ſegni contrarj, però dovendoſi dividere $-am$ per $n$ ſarà lo ſteſſo tanto a ſcrivere $\frac{-am}{n}$, che a ſcrivere $\frac{am}{-n}$, così dovendoſi dividere $am$ per $-n$ ſarà lo ſteſſo tanto a ſcrivere $\frac{am}{-n}$, che a ſcrivere $\frac{-am}{n}$.

82. Alcuni in vece di rappreſentare la diviſione così $\frac{a}{c}$ ſi ſono ſerviti di due punti in queſto modo $a:c$, o pure hanno ſcritto $a \div c$.

83. Prob. 11. Debbaſi inalzare ad una qualunque poteſtà una data quantità incompleſſa.

84. Ri-

84. Riſol. Poichè per elevare una quantità a una cercata poteſtà biſogna moltiplicare tale quantita tante volte in ſe ſteſſa una meno, quante unità contiene la cercata poteſtà, però eſſendo propoſta una quantità letterale da inalzarſi a qualche poteſtà, ella ſi dovrà moltiplicare (giuſta il num. 57.) tante volte in ſe ſteſſa una meno, quante ne indica il grado della poteſtà: come volendoſi inalzare alla quarta poteſtà la quantità $a$, ſi farà $aaaa$: così volendoſi inalzare al cubo la quantità $ac$ ſi farà $aaacc$.

85. Siccome poi coll' eſprimerſi i gradi delle poteſtà mediante la moltiplicazione delle lettere, il loro numero col creſcere tali gradi può creſcere fino a divenire troppo incomodo, perciò ſi ſuole ſcrivere la radice una ſola volta notandoci a deſtra un po' più alto il numero, o ſia eſponente (giuſta il num. 733. del Tomo I.), il quale indica quante volte queſta lettera dovrebbeſi ſcrivere, o ſia indica il grado della poteſtà. Per lo che la terza poteſtà di $b$ ſarà $b^3$; la ſettima poteſtà di $acm$ ſara $a^7c^7m^7$; la ſeconda poteſtà di $8ab$ è $64a^2b^2$.

86. E quì ſi oſſervi, che l'eſponente appartiene ſempre alla ſola lettera ſu cui ſta ſcritto: onde $abc^4$ non vuol dire la quarta poteſtà di $abc$, ma ſolamente di $c$: ſimilmente $cd^2m$ eſprime il cubo di $d$ moltiplicato in $cm$.

87. Qualora tutte le lettere di un qualche termine ſaranno elevate alla ſteſſa poteſtà, come $a^3c^3e^3$, in tal caſo in vece di ſcrivere ſopra ciaſcuna lettera il ſuo eſponente, per maggior brevità ſi farà così $\overline{ace}^3$ tirando una linea ſopra tutte le lettere, cui ſi riferiſce quel tale eſponente, e alla di lei eſtremità notandovi l'eſponente comune. Quanto al ſegno da prefiggerſi alla ritrovata poteſtà, la di cui radice può eſſere poſitiva, o negativa, ſe l'eſponente di tale poteſtà ſarà pari, il di lei ſegno ſarà ſempre $+$, perchè il $+$ moltiplicato in $+$, o il $-$ moltiplicato in $-$ per volte pari dà $+$ nel prodotto (pel num. 57.); che ſe l'eſponente ſarà impari, e la radice ſia poſitiva, il ſegno della poteſtà ſarà ſempre $+$, perchè per quante volte ſi moltiplichi il $+$ in $+$ nel prodotto ſi ha ſempre $+$, ma ſe la radice ſarà negativa, negativo pure dovrà eſſere il ſegno della poteſtà, perchè moltiplicandoſi $-$ in $-$ per volte impari nel prodotto ſi ha ſempre $-$ (per lo ſteſſo num. 57.): onde il quadrato di $-a$ è $a^2$, perchè egli naſce da $-a \times -a$; il cubo è $-a^3$, perchè egli naſce da $a^2 \times -a$ ec. Volendo eſprimere mediante l'eſponente una poteſtà qualunque di una quantità negativa, biſognerà ſcrivere queſto eſponente all'eſtremità di una linea, che ſi eſtenda non ſolo ſopra tale quantità, ma ancora ſopra il ſuo ſegno negativo, per indicare, che tale quantità negativa ſi deve inalzare a queſta poteſtà, non già che a queſta poteſtà ſi deve prefiggere il ſegno negativo: onde per eſempio la terza poteſtà di $-a$ ſi eſprimerà così $\overline{-a}^3$.

88. La poteſtà poi, come ho detto al num. 886. del Tomo I., è un nome relativo, che deſume la ſua denominazione dalla quantità, a cui ſi riferiſce, e però una ſteſſa poteſtà, ſecondo che ſi riferiſce a diverſe quantità, ottiene diverſa denominazione: così $a^6$ diceſi poteſtà ſeſta relativamente ad $a$; ma relativamente ad $a^3$ ſi dirà, ed è poteſtà ſeconda; poichè ſiccome la quantità $a$ moltiplicata cinque volte in ſe ſteſſa produce $a^5$, così $a^3$ moltiplicata una volta in ſe ſteſſa produce $a^6$.

89. Qualunque quantità, che non abbia alcun eſponente, intendeſi ſempre avere per eſponente l'unità, e però $a$, $b$, $c$, ſarà lo ſteſſo che $a^1$, $b^1$, $c^1$.

90. Non ſolamente poi ſono quantità diſſimili le quantità eſpreſſe da diverſe lettere (giuſta il num. 5.) ma eziandio le quantità eſpreſſe dalla ſteſſa lettera, che abbia diverſi eſponenti, come $a$, $a^2$, $a^3$, $a^4$ ſono quantità diſſimili, e ſolamente le

quantità espresse dalla stessa lettera sono simili, quando ella abbia il medesimo esponente: onde simili saranno $a^2$, $a^2$, o pure $b^3$, $b^3$ ec.

91. Questi esponenti poi sono molto diversi dai coefficienti, poichè i coefficienti dimostrano quante volte una quantità si debba porre per addizione, laddove gli esponenti dimostrano quante volte debbasi ella porre per moltiplicazione: così queste espressioni $2a$, $3a$, $4a$ indicano, che la quantità $a$ si deve prendere due volte, tre volte, quattro volte; ma queste espressioni $a^2$, $a^3$, $a^4$ significano, che la quantità $a$ si deve moltiplicare in se stessa una volta, due volte, tre volte.

92. Siccome gli esponenti mostrano quante volte una meno debbasi moltiplicare in se stessa la quantità letterale, cui sono affissi, quindi essi indicano le dimensioni di quella tale quantità, o lettera, quale sarà sempre di tante dimensioni, quante ne mostra l'esponente della sua potestà: e però altra cosa è l'esponente delle dimensioni di una lettera, altra l'esponente delle dimensioni di un termine. L' esponente delle dimensioni di una lettera è, come ho detto, l' esponente della potestà, a cui ella è elevata; l'esponente delle dimensioni di un termine è la somma degli esponenti delle lettere componenti quel termine: come l' esponente delle dimensioni del termine $ab^2c^3$ è 6, perchè tale è la somma degli esponenti delle lettere $a$, $b$, $c$.

93. Prob. 12. Debbasi moltiplicare una potestà per un' altra tutte due incomplesse.

94. Risol. Se le potestà date da moltiplicarsi saranno espresse con differenti lettere, si scrivano (giusta il num. 57.) una unitamente all'altra lasciando a ciascuna i proprj esponenti come stanno. Così dovendosi moltiplicare $a^2$ per $b^3$ si farà $a^2b^3$. Se poi le potestà da moltiplicarsi saranno espresse dalla stessa lettera, in tal caso a questa lettera si dia per esponente la somma degli esponenti delle potestà da moltiplicarsi: come dovendosi moltiplicare $a^3$ per $a^4$ si farà $a^7$.

95. Dim. Quanto alla prima parte l'operazione è evidente; quanto alla seconda, che debbasi fare questa moltiplicazione mediante la somma degli esponenti, rendesi ciò chiaro, poichè nell' addotto Esempio essendo $a^3 = aaa$, e $a^4 = aaaa$, e il prodotto di $aaa$ in $aaaa$ essendo $aaaaaaa$ (pel num. 57.), dunque il prodotto di $a^3$ in $a^4$ deve essere $a^7$. Lo che si doveva dimostrare.

Qualora agli esponenti numerici si sostituiranno gli esponenti indeterminati, vale a dire le lettere dell'alfabeto, lo che ha luogo nelle espressioni generali (le lettere poi dal costume introdotte presso gli Algebristi sono $m$, $n$, $r$, $s$, $t$), se si vorrà moltiplicare $a^m$ per $b^n$ si farà $a^m b^n$; e volendosi moltiplicare la potestà di una lettera, come $a^m$ per un'altra potestà della stessa lettera, come $a^n$, si farà $a^{m+n}$. E quì si offervi di non confondere la moltiplicazione delle potestà colla loro somma, mentre nella moltiplicazione si sommano gli esponenti, ma per sommare una potestà con un'altra come $a^m$ con $a^n$ si fa $a^m + a^n$, e per sommare $a^m$ con $a^m$ si fa $a^m + a^m = 2a^m$ (pel num. 34.)

96. Prob. 13. Debbasi dividere una potestà incomplessa per un'altra pure incomplessa.

97. Risol. Se queste due potestà sono espresse con differenti lettere, se ne faccia la divisione a modo di frazione; come dovendosi dividere $b^3$ per $c^2$ si farà $\frac{b^3}{c^2}$. Se poi sono espresse colla stessa lettera se ne farà la divisione con dare a questa lettera per esponente la differenza degli esponenti di queste due potestà. Per lo che se l' esponente del divisore sarà minore dell' esponente del dividendo, l'esponente del quoziente farà positivo; se gli esponenti del divisore, e del dividendo saranno eguali, l'esponente del quoziente sarà zero, e però il quoziente sarà l'u-

l'unità; se poi l'esponente del divisore sarà maggiore dell'esponente del dividendo, l'esponente del quoziente sarà negativo: quindi questo quoziente, sarà una frazione, che avrà per numeratore l'unità, e per denominatore la stessa potestà presa positiva: come dovendosi dividere $a^5$ per $a^3$ il quoziente sarà $a^2$; ovvero dovendosi dividere $a^4$ per $a^4$ il quoziente sarà $a^0 = 1$; o pure dovendosi dividere $a^5$ per $a^7$ il quoziente sarà $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

98. Dim. Quanto alla prima parte l'operazione non ha bisogno di dimostrazione; quanto alla seconda la regola rendesi evidente dall'osservare, che la divisione è un'operazione contraria alla moltiplicazione; ma la moltiplicazione delle potestà si fa (pel num. 94.) mediante la somma degli esponenti; dunque la divisione devesi fare mediante la sottrazione, che sola si oppone alla somma. Difatto per dividere $a^5$ per $a^3$ si fa $\frac{aaaaa}{aaa}$, che (pel num. 71.) è $= aa = a^2$ (pel num. 85.). Parimente il dividere $a^4$ per $a^4$ non è altro, che fare $\frac{aaaa}{aaaa} = 1$ (pel num. 76.), ed $1$ è $= 1a^0$, mentre $a^0$ vuol dire che la quantità $a$ non si deve porre alcuna volta; ma nell'espressione $1a^0$ non ponendosi $a$ alcuna volta sarà $1a^0 = 1$. Finalmente per dividere $a^5$ per $a^7$ si fa $\frac{aaaaa}{aaaaaaa}$, che è $= \frac{1}{aa}$ (pei numeri 71., e 76.); dunque perchè col sottrarsi l'esponente di $a^7$ dall'esponente di $a^5$ resta $a^{-2}$ (pel num. 44.), sarà $a^{-2} = \frac{1}{aa}$. Lo che si doveva dimostrare.

99. Che se si avesse dovuto dividere $a^2b^5$ per $a^2b^3$, il quoziente sarebbe stato $b^2$, cui non hassi a prefiggere $a^0$, o sia l'unità, che nasce dal dividersi $a^2$ per $a^2$, perchè (pel num. 107. del Tomo I.) col moltiplicarsi qualsivoglia quantità per l'unità ritorna la stessa quantità. Istessamente dovendosi dividere $a$ per $\sqrt{a}$ il quoziente è $\sqrt{a}$, perchè esprimendo la divisione di $a$ per $\sqrt{a}$ per mezzo degli esponenti, si ha $a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Per la stessa ragione dovendosi dividere $ab-bb$ per $\sqrt{ab-bb}$ il quoziente sarà $\overline{ab-bb}^{1-\frac{1}{2}} = \overline{ab-bb}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab-bb}$.

100. Se in luogo degli esponenti numerici si farà uso degli esponenti indeterminati, ogniqualvolta si voglia dividere una potestà di una lettera per un'altra, come $a^m$ per $c^n$ si farà $\frac{a^m}{c^n}$; che se la lettera sarà la stessa, come dovendosi dividere $a^m$ per $a^n$ si farà $a^{m-n}$, nella quale espressione $a^{m-n}$ la quantità $a$ potrà avere per esponente, il zero, o potrà avere un esponente positivo, o un esponente negativo, secondo che nell'esponente indeterminato $m-n$ sarà $n$ eguale, o minore, o maggiore di $m$. E quì pure si osservi di non confondere la divisione delle potestà colla loro sottrazione, poichè nella divisione si sottraggono bensì gli esponenti, ma per sottrarre una potestà da un'altra, come $a^m$ da $a^n$ si fa $a^n - a^m$, e per sottrarre $a^m$ da $a^m$ si fa $a^m - a^m = 0$.

101. Siccome coll'accrescersi di una unità l'esponente positivo di una potestà vuolsi significare, che tale potestà si deve moltiplicare una volta per la sua radice, onde $a^{2+1} = a^2 \times a = a^3$; $a^{3+1} = a^3 \times a = a^4$ ec.; così col diminuirsi di una unità l'espo-

l'esponente positivo di una potestà vuolsi esprimere, che tale potestà si deve dividere una volta per la sua radice; e però $a^{5-1} = \frac{a^5}{a} = a^4$; $a^{4-1} = \frac{a^4}{a} = a^3$ ec. Dal che si intende, che $a^{-2-1} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $a^{-2-1} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ ec. Parimente $a^{-5+1} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$; $a^{-1+1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ ec.

102. Che per Esempio $a^{-3}$ sia $= \frac{1}{a^3}$, si può abbastanza raccogliere dalla natura del segno —, da cui è affetto l'esponente della potestà, poichè questo segno — dinotando sempre qualche opposizione, qualora sarà prefisso all'esponente di qualche quantità, egli additerà opposizione di sito rispetto a tale potestà, vale a dire, che le potestà, il di cui esponente è affetto dal segno —, devono occupare un sito opposto alle potestà, il di cui esponente è affetto dal segno +: Onde essendo $a^m = \frac{a^m}{1}$, sarà $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

103. Def. 3. Le potestà, il di cui esponente è un numero intero affetto dal segno + si dicono potestà perfette positive: Quelle il di cui esponente è un numero intero affetto dal segno — si chiamano potestà perfette negative.

104. Per mezzo di queste potestà perfette negative si possono rappresentare le quantità intere a modo di frazioni, e le frazioni a modo di quantità intere. Sia per Esempio proposta la frazione $\frac{a^3}{b^2}$, poichè $\frac{a^3}{b^2} = a^3 \times \frac{1}{b^2}$, ed $\frac{1}{b^2} = b^{-2}$, sarà $\frac{a^3}{b^2} = a^3 b^{-2}$ quantità quanto all'espressione intera. Similmente la frazione $\frac{a^7}{b c^3}$ sarà $= a^7 b^{-1} c^{-3}$. E vicendevolmente per mezzo di queste potestà perfette negative si possono esprimere le quantità intere a modo di frazioni. Prendo l'Esempio dalla quantità $a^3 c^2$, poichè è $a^3 c^2 = \frac{a^3}{\frac{1}{c^2}}$, cioè è uguale ad $a^3$ diviso per $\frac{1}{c^2}$, ed essendo $\frac{1}{c^2} = c^{-2}$, sarà $\frac{a^3}{\frac{1}{c^2}} = a^3 c^2 = \frac{a^3}{c^{-2}}$; così $a^3 b^3$ si potrà esprimere così $\frac{a^3}{b^{-3}}$, e reciprocamente la quantità $\frac{a^2 d^3}{c^{-4} e^{-1}}$ sarà $= a^2 c^4 d^3 e$.

105. Collo stesso metodo si opererà qualora si voglia trasferire qualche cosa di una data frazione dal numeratore nel denominatore, o dal denominatore nel numeratore: Come essendo proposta la frazione $\frac{a^2 b}{c^3 e}$, e si voglia trasferire la lettera $b$ dal numeratore nel denominatore, si farà $\frac{a^2}{b^{-1} c^3 e}$; che se si vorrà trasferire $e$ dal denominatore nel numeratore si farà $\frac{a^2 b e^{-1}}{c^3}$ ec.

106.

106. Prob. 14. Debbaſi inalzare una poteſtà propoſta incompleſſa ad un' altra di un dato eſponente.

107. Riſol. Si moltiplichi l'eſponente della poteſtà data nell'eſponente della poteſtà cercata, e il prodotto ſi dia per eſponente alla propoſta quantità: Come dovendoſi elevare $a^2$ alla terza poteſtà, ſi moltiplichi il ſuo eſponente 2 per 3 eſponente della poteſtà cercata, e ſi avrà $2 \times 3 = 6$, che deveſi dare per eſponente ad $a$, quale perciò ſarà $a^6$: Così $b^4$ inalzato alla poteſtà 2 ſarà $b^8$: E generalmente $a^m$ elevato alla poteſtà $n$ ſarà $a^{mn}$.

108. La dim. è la ſteſſa di quella data al num. 885. del Tomo I.

109. Prob. 15. Da una propoſta poteſtà monomia ſi debba levare una cercata radice.

110. Riſol. Si divida l'eſponente della poteſtà data per l'eſponente della cercata radice, e il quoziente ſi dia per eſponente alla propoſta quantità letterale: Come dovendoſi eſtrarre la radice quarta da $a^{12}$, perchè il quoziente, che naſce dal dividerſi il 12 per 4 è 3, la cercata radice ſarà $a^3$.

111. Dim. L'eſtrazione delle radici è una operazione contraria all'inalzare a poteſtà; ma (pel num. 107.) l'inalzare una poteſtà ad un'altra ſi fa con moltiplicare l'eſponente di queſta nell'eſponente di quella; dunque per eſtrarre una cercata radice da una propoſta poteſtà biſognerà dividere il ſuo eſponente per l'eſponente di tale radice. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

112. Che ſe la data quantità, da cui ſi deve levare una cercata radice, ſarà un prodotto di diverſe lettere, biſognerà eſtrarre da ciaſcuna lettera tale radice: Onde la radice ſeconda di $a^2 b^4 c^8$ ſarà $ab^2c^4$.

113. A tenore di quanto ſi è detto al num. 57. la ſeconda poteſtà di una quantità, la quarta, la ſeſta, e generalmente tutte le poteſtà di eſponente pari devono eſſere affette dal ſegno + comunque la loro radice ſia affetta dal ſegno +, o —; laddove le poteſtà di eſponente impari ſaranno ſempre affette da quel ſegno, da cui è affetta la loro radice, cioè ſaranno poſitive ſe la radice è poſitiva, e ſaranno negative ſe la radice è negativa.

114. Quindi eſſendo ſempre affetta dal ſegno + una poteſtà d'eſponente pari, comunque la ſua radice ſia poſitiva, o negativa, ne ſeguono perciò due coſe: La prima che ſe da una quantità ſi dovrà eſtrarre una radice di eſponente pari, cioè a dire la radice ſeconda, quarta, ſeſta ec., tale radice ſi potrà prendere tanto poſitiva, come negativa, poichè tanto da una, come dall'altra riſulta la ſteſſa poteſta affetta dal ſegno +: Per eſprimere poi queſta doppia radice ſi uſa il ſegno ±: Onde la radice quadrata di $a^2$ ſi ſcriverà così $\pm a$: E la radice ſeconda di $ab$ ſi ſcriverà $\pm \sqrt{ab}$: E però le poteſtà d'eſponente pari hanno doppia radice, una poſitiva, l'altra negativa: Come di $a^2$ la radice ſarà tanto $+a$, come $-a$. La ſeconda che ſe una poteſtà di eſponente pari ſarà affetta dal ſegno — non ſi potrà ſapere da che quantità ella riſulti, cioè a dire non ſi ſaprà quale ſia la ſua radice, perchè tanto ſe foſſe poſitiva, come ſe foſſe negativa, il ſegno prefiſſo ad una ſua poteſtà d'eſponente pari ſarebbe ſempre poſitivo. Di tali poteſta pertanto le radici ſi chiamano immaginarie, e ſi rappreſentano mediante il vincolo $\sqrt{}$: E però la radice quadrata di $-a^2$ ſarà immaginaria, e ſi eſprimerà così $\sqrt{-a^2}$.

115. Di queſto vincolo $\sqrt{}$ parimente ſi fa uſo quando da una quantità propoſta non ſi può eſtrarre una cercata radice, a motivo che ella non ſia una tale poteſtà perfetta, ſcrivendo ſul vincolo l'eſponente della radice: Come per indicare

la

la radice cuba di $a^2$ si farà $\sqrt[3]{a^2}$: E per esprimere la radice quadrata di $ab$, $\sqrt[2]{ab}$, o sia $\sqrt{ab}$, mentre della radice quadrata si suole ommettere l'esponente.

116. Ma siccome (pel num. 110.) si ha una cercata radice con dividere l'esponente della quantità data per l'esponente di tale radice, egli è chiaro che siccome (pel num. 89.) ogni quantità, a riserva dell' unità (pel num. 98.), ha almeno l'unità per esponente, però sarà $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^4 b^2} = a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}$, nel qual modo si viene a togliere l'uso del vincolo, e i radicali si esprimono a modo di potestà.

117. Def. 4. Le quantità espresse in questo modo $b^{\frac{3}{4}} d^{\frac{5}{4}} e^{\frac{1}{4}}$ si chiamano potestà imperfette positive: Che se hanno questi esponenti affetti dal segno — si dicono potestà imperfette negative, come $a^{-\frac{1}{2}}$.

118. In queste potestà pertanto il numeratore della frazione disegna sempre il grado della potestà, a cui la data quantità si suppone elevata, e il denominatore esprime il grado della radice, che da tale quantità si deve estrarre.

## ARTICOLO IV.

*Del calcolo delle potestà imperfette sì positive, che negative per mezzo degli esponenti.*

119. QUantunque questo calcolo non sia punto diverso da quanto ho detto ai num. 94, 97, 107, 110; pure, perchè ogni minima cosa basta a fare difficoltà, e imbarazzare i principianti, ho giudicato opportuno esporlo brevemente essendo egli d'un uso grandissimo nell' Analisi principalmente degli infiniti.

120. Siccome $a^3$ è il prodotto (pel num. 94.), che nasce dal moltiplicarsi $a^5$ per $a^{-2}$, perchè la somma degli esponenti $5, -3$ è $5-3=2$, così il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi $a^{\frac{1}{2}}$ per $a^{\frac{1}{2}}$, è $a$, perchè la somma degli esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$: Così $a^4$ è il prodotto che nasce dal moltiplicarsi $a^{\frac{3}{2}}$ per $a^{\frac{5}{2}}$, perchè la somma di $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ è $\frac{8}{2}=4$: Come pure $a^{\frac{5}{2}}$ è il prodotto, che nasce dal moltiplicarsi $a^2$ per $a^{\frac{1}{2}}$, perchè la somma dei due esponenti $2, \frac{1}{2}$ è $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

121. Dovendosi moltiplicare $a^{-2}$ per $a^{\frac{1}{2}}$ il prodotto sarà $a^{-\frac{3}{2}}$, perchè ridotto l'esponente $-2$ di $a^{-2}$ al denominatore 2 si ha $-\frac{4}{2}$, e la somma dei due espo-

nenti $-\frac{4}{2}$, $\frac{1}{2}$ è $-\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$. E poichè il prodotto di $a^{-3}$ in $a^{-2}$ è $a^{-5}$, essendo che la somma dei loro esponenti $-3, -2$ è $-3-2=-5$; così sarà $a^{-2}$ il prodotto di $a^{-\frac{1}{2}}$ in $a^{-\frac{3}{2}}$, perchè la somma degli esponenti $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ è $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=-2$.

122. Generalmente il prodotto di $a^m$ in $a^{-n}$ è $a^{m-n}$; il prodotto di $a^m$ in $a^{\frac{e}{n}}$ è $a^{m+\frac{e}{n}}=a^{\frac{mn+e}{n}}$; il prodotto di $a^{\frac{m}{n}}$ in $a^{\frac{e}{n}}$ è $a^{\frac{m}{n}+\frac{e}{n}}=a^{\frac{m+e}{n}}$, e il prodotto di $a^{\frac{m}{n}}$ in $a^{\frac{e}{s}}$ è $a^{\frac{m}{n}+\frac{e}{s}}=a^{\frac{ms+en}{ns}}$; il prodotto di $a^{-m}$ in $a^{\frac{e}{n}}$ è $a^{-m+\frac{e}{n}}=a^{\frac{-mn+e}{n}}$; il prodotto di $a^{-m}$ in $a^{-n}$ è $a^{-m-n}$; il prodotto di $a^{-\frac{m}{n}}$ in $a^{-\frac{e}{s}}$ è $a^{-\frac{m}{n}-\frac{e}{s}}=a^{\frac{-ms-en}{ns}}$.

123. Quanto alla divisione sarà $a^5$ il quoziente, che nasce dal dividersi $a^2$ per $a^{-3}$, perchè col sottrarsi l'esponente $-3$ dall'esponente $+2$ si ha $2+3=5$; così il quoziente che nasce dal dividersi $a^{-5}$ per $a^{-2}$ è $a^{-3}$; e il quoziente che risulta dal dividersi $a^{-4}$ per $a^2$ è $a^{-6}$. Istessamente sarà $a^{\frac{1}{2}}$ il quoziente che nasce dal dividersi $a^{\frac{5}{2}}$ per $a^2$, perchè dall'esponente $\frac{5}{2}$ sottraendosi l'esponente 2 si ha $\frac{5}{2}-\frac{4}{2}=\frac{1}{2}$; così il quoziente, che nasce dal dividersi $a^{\frac{9}{2}}$ per $a^{\frac{3}{2}}$ è $a^3$, perchè sottraendosi dall'esponente $\frac{9}{2}$ l'esponente $\frac{3}{2}$ il residuo è 3; e il quoziente che nasce dal dividersi $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{-\frac{1}{2}}$ sarà $a^{\frac{7}{6}}$ perchè col sottrarsi $-\frac{1}{2}$ da $\frac{2}{3}$ si ha $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$.

124. Parimente il quoziente, che nasce dal dividersi $a^m$ per $a^{-n}$, è $a^{m+n}$; il quoziente, che nasce dal dividersi $a^{-m}$ per $a^{-n}$, è $a^{-m+n}$, e dal dividersi $a^{-m}$ per $a^n$, è $a^{-m-n}$; il quoziente, che nasce dal dividersi $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^s$, è $a^{\frac{m}{n}-s}=a^{\frac{m-ns}{n}}$; il quoziente, che nasce dal dividersi $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^{\frac{e}{s}}$, è $a^{\frac{m}{n}-\frac{e}{s}}=a^{\frac{ms-ne}{ns}}$; il quoziente che nasce dal dividersi $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^{-\frac{e}{s}}$, è $a^{\frac{m}{n}+\frac{e}{s}}=a^{\frac{ms+ne}{ns}}$.

125. Rispetto all'inalzare a potestà, siccome della potestà perfetta positiva $a$ il quadrato è $a^2$, il cubo $a^3$ ec., e della potestà perfetta negativa $a^{-1}$ il quadrato è $a^{-2}$.

$a^{-2}$ il cubo $a^{-3}$ ec., così della potestà imperfetta positiva $a^{\frac{1}{2}}$ il quadrato è $a^{\frac{2}{2}} = a$, il cubo è $a^{\frac{3}{2}}$, e della potestà imperfetta negativa $a^{-\frac{1}{2}}$ il quadrato è $a^{-\frac{2}{2}} = a^{-1}$, il cubo è $a^{-\frac{3}{2}}$ ec.

126. Così pure della potestà perfetta positiva $a^m$ il quadrato è $a^{2m}$, il cubo $a^{3m}$ ec, e della potestà perfetta negativa $a^{-m}$ il quadrato è $a^{-2m}$ il cubo $a^{-3m}$ ec., così della potestà imperfetta positiva $a^{\frac{m}{n}}$ il quadrato è $a^{\frac{2m}{n}}$, il cubo $a^{\frac{3m}{n}}$ ec., e della potestà imperfetta negativa $a^{-\frac{m}{n}}$ il quadrato è $a^{-\frac{2m}{n}}$, il cubo $a^{-\frac{3m}{n}}$ ec.

127. Veniamo ora all' estrazione delle radici. Poichè la radice quadrata di $a^8$ è $a^4$, la radice cuba di $a^{-6}$ è $a^{-2}$, e la radice quinta di $a$ è $a^{\frac{1}{5}}$, la radice seconda di $a^{-1}$ è $a^{-\frac{1}{2}}$; così la radice cuba di $a^{\frac{1}{2}}$ e $a^{\frac{1}{6}}$, la radice quadrata di $a^{-\frac{3}{4}}$ è $a^{-\frac{3}{8}}$ ec.

128. Istessamente la radice quadrata di $a^m$ è $a^{\frac{m}{2}}$, la radice cuba è $a^{\frac{m}{3}}$, e la radice quarta di $a^{-m}$ è $a^{-\frac{m}{4}}$, la radice sesta è $a^{-\frac{m}{6}}$; così la radice quadrata di $a^{\frac{m}{n}}$ è $a^{\frac{m}{2n}}$, la cuba $a^{\frac{m}{3n}}$; la radice quadrata di $a^{-\frac{m}{n}}$ è $a^{-\frac{m}{2n}}$, la quinta è $a^{-\frac{m}{5n}}$ ec.

129. Devesi poi sempre avere presente, che $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; ed $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

## ARTICOLO V.

### *Del calcolo delle quantità radicali monomie.*

130. Nella stessa maniera, che per disegnare il doppio, il triplo, il quadruplo ec. di una quantità razionale, come $a$, si fa $2a$, $3a$, $4a$ ec., si opera per esprimere il doppio, il triplo ec. di una quantità irrazionale, o sia radicale, come rispetto al radicale $\sqrt{ac}$ si farà $2\sqrt{ac}$, $3\sqrt{ac}$, $4\sqrt{ac}$ ec. Così pure per esprimerne una certa parte, come una metà, un terzo, un quarto ec. si farà $\frac{\sqrt{ac}}{2}$, $\frac{\sqrt{ac}}{3}$, $\frac{\sqrt{ac}}{4}$ ec.; o pure per rappresentarne due terzi, quattro quinti si farà $\frac{2\sqrt{ac}}{3}$, $\frac{4\sqrt{}}{}$

$\frac{4\sqrt{ac}}{5}$, o ſia $\frac{2}{3}\sqrt{ac}$, $\frac{4}{5}\sqrt{ac}$ ec. Le quantità poi preſiſſe al vincolo, ſiano eſſe numeriche, o letterali; intere, o fratte ſi chiamano coefficienti degli ſteſſi radicali.

131. Prob. 1. Si debbano ridurre allo ſteſſo eſponente due, o più quantità radicali monomie.

132. Riſol. Il modo di operare non è punto diverſo da quello, che ſi è eſpoſto al num. 921. del Tomo 1.: Come per ridurre allo ſteſſo eſponente le due quantità radicali $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{de}$ ſi farà $\sqrt[6]{a^2b^2c^2}$, $\sqrt[6]{d^3e^3}$. E generalmente per ridurre allo ſteſſo eſponente i due radicali $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[s]{c^r}$ ſi farà $\sqrt[ms]{a^{ns}}$, $\sqrt[ms]{c^{mr}}$. Volendoſi ridurre una propoſta quantità radicale ad un altro eſponente maggiore, o minore di quello, che ella già ha, niente altro deveſi fare, che affiggere al vincolo l'eſponente propoſto, indi inalzare la quantità, che è ſotto al vincolo alla poteſtà indicata dall'eſponente propoſto diviſo per l'eſponente del radicale: Per eſempio volendoſi ridurre la quantità radicale $bc\sqrt[n]{a}$ all'eſponente $t$, ſi farà $bc\sqrt[t]{a^{\frac{t}{n}}}$, lo che è ben evidente, poichè $bc\sqrt[n]{a}$ è $= bc \times a^{\frac{1}{n}}$; ma $bc \times a^{\frac{1}{n}} = bc \times a^{\frac{t}{nt}}$, e $bc \times a^{\frac{t}{nt}} = bc\sqrt[t]{a^{\frac{t}{n}}}$; dunque $bc\sqrt[n]{a} = bc\sqrt[t]{a^{\frac{t}{n}}}$.

133. Prob. 2. Si debba ridurre una data quantità radicale alla più ſemplice eſpreſſione.

134. Riſol. Allora ſolamente ſi potrà ridurre alla più ſemplice eſpreſſione una propoſta quantità radicale, quando ella ſia il prodotto di due moltiplicatori, uno de' quali ſia appunto una poteſtà dello ſteſſo nome dell'eſpreſſa radice, nel qual caſo ſi opera giuſta il num. 929. del Tomo 1.: Onde il radicale $\sqrt{48a^2bc}$ ridotto alla più ſemplice eſpreſſione è $4a\sqrt{3bc}$, perchè $\sqrt{48a^2bc} = \sqrt{16a^2 \times 3bc}$, e la radice quadrata di $16a^2$ è $4a$. Generalmente ſarà $\sqrt[m]{a^n x^n} = x\sqrt[m]{a^n}$.

135. All'oppoſto ſi opererà per ridurre a quantità puramente irrazionale una data quantità parte razionale, e parte irrazionale, o ſia a ridurre ſotto al vincolo una quantità preſiſſa al medeſimo, baſtando (pel num. 934. del Tomo 1.) inalzarla alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo, e poi moltiplicarla nella quantità eſiſtente ſotto il vincolo; nel qual modo ſarà $2c\sqrt{ab} = \sqrt{4abc^2}$; e generalmente ſarà $cd\sqrt[m]{b^r} = \sqrt[m]{b^r c^m d^m}$. Quindi poichè non ſi altera il valore di una quantità con moltiplicarla, e dividerla nel tempo ſteſſo per una medeſima quantità, però volendoſi moltiplicare per una quantità ad arbitrio il coefficiente di una quantità radicale, baſterà nel tempo ſteſſo dividere la quantità, che è ſotto al vincolo per la ſteſſa quantità elevata alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo. Così volendoſi moltiplicare per $m$ il coefficiente di $a\sqrt[n]{b}$, ſi farà $am\sqrt[n]{\frac{b}{m^n}}$, eſſendo $a\sqrt[n]{b} = am\sqrt[n]{\frac{b}{m^n}} = \frac{am}{m}\sqrt[n]{b}$. Iſteſſamente volendoſi moltiplicare per $m$ il coefficiente di $\frac{b}{a}\sqrt[n]{\frac{d}{c}}$ ſi farà $\frac{bm}{a}\sqrt[n]{\frac{d}{cm^n}}$. Ciò, che ſi è detto della moltiplicazione, vale per la legge de' contra-

trarj anche per la diviſione: così volendoſi dividere per $m$ il coefficiente di $a\sqrt[n]{b}$, ſi farà $\frac{a}{m}\sqrt[n]{bm^n}$: E volendoſi dividere per $m$ il coefficiente di $\frac{b}{a}\sqrt[n]{\frac{d}{c}}$, ſi farà $\frac{b}{am}\sqrt[n]{\frac{dm^n}{c}}$. Dallo ſteſſo num. 134. ſi ricava la maniera di ridurre a quantità intera una frazione, che foſſe ſotto al vincolo, niente altro richiedendoſi, che dividere il coefficiente del vincolo pel denominatore della frazione, che è ſotto lo ſteſſo vincolo, indi moltiplicare il numeratore pel denominatore elevato alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo diminuito di una unità. Per eſempio dato il radicale $b\sqrt[n]{\frac{a}{c}}$, e volendoſi, che ſotto al vincolo vi ſia un intero, ſi farà $\frac{b}{c}\sqrt[n]{ac^{n-1}}$. Di fatto $b\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = b\sqrt[n]{\frac{ac^{n-1}}{c^n}}$; mentre della frazione ſotto al vincolo ſi moltiplica il numeratore, e il denominatore per la ſteſſa quantità $c^{n-1}$. Quindi tirandoſi fuori dal vincolo il denominatore $c^n$, ſi avrà $\frac{b}{c}\sqrt[n]{ac^{n-1}} = b\sqrt[n]{\frac{a}{c}}$.

136. Le quantità radicali ſaranno comunicanti, ſe ridotte alla più ſemplice eſpreſſione avranno ſotto al vincolo la ſteſſa quantità, come $3a\sqrt{c}$, $5b\sqrt{c}$ ſono quantità comunicanti.

137. Prob. 3. Si debbano ſommare inſieme più quantità radicali monomie.

138. Riſol. Le date quantità radicali ſi ſcrivano una dopo l' altra co' proprj ſegni, lo che pure ſi oſſervi colle quantità razionali ſe ve ne ſono: Come dovendoſi ſommare $\sqrt{dc}$ con $af$ con $-2a\sqrt{b}$ con $\sqrt{eg}$ ſi farà $\sqrt{dc}+af-2a\sqrt{b}+\sqrt{eg}$.

139. Che ſe le quantità radicali da ſommarſi avranno ſotto al vincolo la ſteſſa quantità, o pure ſi potranno ridurre ad eſſer tali mediante la riduzione alla più ſemplice eſpreſſione, in tal caſo ſi ſommino le quantità prefiſſe al vincolo, e tale ſomma ſi ſcriva avanti il vincolo della quantità radicale comune: Come la ſomma di $3a\sqrt{b}$ con $5c\sqrt{b}$ con $-d\sqrt{b}$ farà $\overline{3a+5c-d}\sqrt{b} = 3a\sqrt{b}+5c\sqrt{b}-d\sqrt{b}$.

140. Prob. 4. Si debba ſottrarre una quantità radicale monomia da un'altra.

141. Riſol. La quantità da ſottrarſi ſi ſcriva col ſegno mutato appreſſo alla quantità, da cui ſi deve fare la ſottrazione: onde per ſottrarre $\sqrt{cd}$ da $7b\sqrt{e}$ ſi farà $7b\sqrt{e}-\sqrt{cd}$, e per ſottrarre $-2c\sqrt{a}$ da $5c\sqrt{b}$ ſi farà $5c\sqrt{b}+2c\sqrt{a}$.

142. Se le quantità radicali avranno ſotto al vincolo la ſteſſa quantità, ſi faccia la ſottrazione de' ſoli coefficienti, come dovendoſi ſottrarre $2b\sqrt{a}$ da $4d\sqrt{a}$ ſi farà $\overline{4d-2b}\sqrt{a} = 4d\sqrt{a}-2b\sqrt{a}$.

143. Prob. 5. Si debbano moltiplicare inſieme due quantità radicali monomie.

144. Riſol. Se le propoſte quantità radicali non hanno lo ſteſſo eſponente vi ſi riducano (giuſta il num. 132.), indi ſi moltiplichino fra loro (giuſta il num. 57.), e a queſto prodotto ſi prefigga il vincolo. Che ſe vi ſaranno coefficienti, eſſi pure ſi dovranno moltiplicare: come dovendoſi moltiplicare $2a\sqrt{c}$ per $5b\sqrt{a}$ ſi farà $10ab\sqrt{ac}$.

145.

145. Quanto al ſegno da prefiggerſi al prodotto di due quantità radicali ſi oſſervi, come ho detto al num. 7., che qualunque quantità ſi deve intendere moltiplicata nell'unità, per lo che $\sqrt{ab}$ ſarà $= 1 \times \sqrt{ab}$, nel qual modo conſiderando i radicali, ſi regoli poſcia circa i ſegni giuſta il num. 57., onde il prodotto di $\sqrt{a}$ in $-\sqrt{b}$, cioè di $1 \times \sqrt{a}$ in $-1 \times \sqrt{b}$ è $-1 \times \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$; così il prodotto di $-\sqrt{bc}$ in $-\sqrt{ab}$, cioè di $-1 \times \sqrt{bc}$ in $-1 \times \sqrt{ab}$ è $+1 \times \sqrt{ab^2c} = \sqrt{ab^2c} = b\sqrt{ac}$.

146. Dovendoſi moltiplicare una quantità razionale con una radicale baſterà prefiggere la razionale al vincolo: Così dovendoſi moltiplicare $cd$ in $\sqrt{ef}$ ſi farà $cd\sqrt{ef}$, e per moltiplicare $2a$ in $7b\sqrt{c}$ ſi farà $14\,ab\sqrt{c}$.

147. Quando il prodotto di due quantità radicali ſia tale, che vi ſi poſſa levare la radice indicata dall'eſponente del vincolo, ciò ſi faccia, e tale radice ſarà il prodotto cercato: Onde il prodotto di $\sqrt[3]{a^2b}$ in $\sqrt[3]{ab^2}$ è $\sqrt[3]{a^3b^3} = ab$.

148. Se le quantità radicali quadrate da moltiplicarſi ſaranno eguali baſterà prenderne una di loro ſenza il vincolo, ed ella ſarà il prodotto cercato, cui deveſi prefiggere il ſuo ſegno a norma del num. 57; Onde il prodotto di $\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ è $a$; e di $\sqrt{a}$ in $-\sqrt{a}$, cioè di $1 \times \sqrt{a}$ in $-1 \times \sqrt{a}$ è $1 \times -1 \times a = -a$. Siccome poi (pel num. 114.) le radici d'eſponente pari hanno doppio ſegno, cioè poſitivo, e negativo così $\pm\sqrt{a}$, però il prodotto di $\sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$, o ſia di $\pm\sqrt{a}$ in $\pm\sqrt{a}$ ſarà $\pm\sqrt{a^2} = \pm a$. Si intende pertanto, che un numero $n$ di radicali $\sqrt[n]{a}$ inſieme moltiplicati dà di prodotto la quantità $a$: Che però data una quantità qualunque $a$ ſi potrà ridurre ad un prodotto di quantità radicali, il di cui numero ſarà $n$, e però ſi avrà $a = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a}$ ec., de' quali radicali il numero deve eſſere $n$. Per lo che ſe l'eſponente del vincolo ſarà $n$, e il numero delle quantità uguali da moltiplicarſi ſarà $n-1$, ſi avrà il prodotto cercato con togliere il vincolo ad una di loro.

149. Prob. 6. Si debba dividere una quantità radicale monomia per un'altra.

150. Riſol. Se le quantità date non hanno lo ſteſſo eſponente vi ſi riducano giuſta il num. 132, poſcia delle quantità eſiſtenti ſotto al vincolo ſe ne divida l'una per l'altra, lo che pure ſi faccia riſpetto ai coefficienti, ſe vi ſono: Come dovendoſi dividere $cb\sqrt{ad}$ per $b\sqrt{a}$ il quoziente ſarà $c\sqrt{d}$.

151. Che ſe o riſpetto ai coefficienti, o riſpetto ai radicali, o riſpetto a tutti due non ſi potrà fare l'attuale diviſione, ella ſi indichi al ſolito: Onde il quoziente di $a\sqrt{b}$ diviſo per $a\sqrt{c}$ è $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, o ſia $\sqrt{\frac{b}{c}}$; così il quoziente di $bd\sqrt{ce}$ diviſo per $2a\sqrt{ce}$ è $\frac{bd}{2a}$; ed il quoziente di $a\sqrt{b}$ diviſo per $d\sqrt{c}$ è $\frac{a\sqrt{b}}{d\sqrt{c}}$, o ſia $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{b}{c}}$. Il vincolo $\sqrt{\ }$ indica, che egli ſi eſtende al numeratore, e al denominatore.

152. Qualora dal quoziente ſi poſſa levare la radice indicata dall'eſponente del vincolo, ciò ſi faccia: Per lo che il quoziente di $\sqrt{ab^2}$ diviſo per $\sqrt{a}$ è $\sqrt{b^2} = b$; così il quoziente di $ab\sqrt[3]{bc^4d}$ diviſo per $a\sqrt[3]{bcd}$ è $b\sqrt[3]{c^3} = bc$; parimente il quoziente di $\sqrt{ab^2}$ diviſo per $\sqrt{ad^2}$ è $\sqrt{\frac{b^2}{d^2}} = \frac{b}{d}$; ed il quoziente di $\sqrt{ab^2}$ diviſo per $\sqrt{ad}$ è

$\sqrt{\ }$

$\sqrt{\frac{b^2}{d}} = \frac{b}{\sqrt{d}}$; o pure il quoziente di $\sqrt{abcd}$ diviso per $\sqrt{a^3 b}$ è $\sqrt{\frac{cd}{a^4}} = \frac{\sqrt{cd}}{a^2}$.

153. Dovendosi dividere una quantità razionale per una radicale, o una radicale per una razionale, si inalzi primieramente la quantità razionale alla potestà indicata dall' esponente del vincolo, indi si faccia la divisione, come pur ora si è detto: Per Esempio dovendosi dividere $\sqrt{a^2 bc}$ per $a$ si farà $\sqrt{\frac{a^2 bc}{a^2}} = \sqrt{bc}$; o pure dovendosi dividere $b$ per $\sqrt[3]{a b^1}$ si farà $\sqrt[3]{\frac{b^1}{a b^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$. Che se la quantità razionale non sarà tale, onde inalzata che sia alla potestà indicata dall'esponente del vincolo, si possa fare l' attuale divisione, ella a dirittura si indichi, come volendosi dividere $\sqrt{cd}$ per $e$ si farà $\frac{\sqrt{cd}}{e}$.

154. Nella divisione delle quantità radicali si osservino le solite regole de' segni.

155. Prob. 7. Debbasi inalzare una data quantità radicale ad una cercata potestà.

156. Risol. Si moltiplichi in se stessa tante volte la quantità proposta quante lo mostra l' esponente della potestà cercata diminuito di una unità, e a questo prodotto si prefigga il vincolo, che aveva tale quantità; e se il radicale dato avrà coefficiente, si inalzi esso pure alla potestà cercata: Che se dalla ritrovata potestà si potrà estrarre la radice indicata dall'esponente del vincolo, ciò si faccia: Onde la seconda potestà di $b\sqrt[3]{a c}$ sarà $b^2\sqrt[3]{a^2 c^2}$; la quarta potestà di $a\sqrt{ab}$ sarà $a^4\sqrt{a^2 b^2} = a^6 b^2$.

157. Prob. 8. Si debba estrarre una qualunque radice da una quantità radicale monomia.

158. Risol. Dalla quantità esistente sotto al vincolo si levi al solito la cercata radice se si può, e in oltre si cancelli anche il vincolo ogniqualvolta egli sia dello stesso esponente, e quando no si lasci: Nel qual modo la radice quadrata di $\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$ sarà $\sqrt[3]{abc}$; la radice cuba di $c d^3\sqrt{b^1}$ è $d\sqrt[3]{c\sqrt{b}}$.

159. Se poi dalla quantità esistente sotto al vincolo non si potrà estrarre la cercata radice, basterà moltiplicare l' esponente del segno radicale nell' esponente della radice cercata; per lo che la radice terza di $\sqrt{ab}$ sarà $\sqrt[6]{ab}$; o pure si usi un doppio vincolo così $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$. E però la radice $n$ della quantità $\sqrt[m]{c d^t}$ sarà $\sqrt[mn]{c d^t} = c d^{\frac{t}{mn}}$.

AR-

## ARTICOLO VI.

*Delle quantità monomie immaginarie e loro calcolo.*

160. HO detto al num. 114. che cosa siano le quantità immaginarie, o sia impossibili, che così vengono denominate dall' impossibilità di determinarne la loro radice d' esponente pari, mentre intendere non si sa da quale quantità possa risultare tale potestà negativa, non essendo assegnabile alla sua radice alcun segno, da cui come tale ella possa nascere: Per lo che non sapendosi intendere da quale quantità nascano queste potestà negative d' esponente pari, estrarre perciò non si può la loro radice; e tali quantità immaginarie sono per Esempio $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-b^4}$, $\sqrt[6]{-c^6}$ ec.

161. Le quantità pertanto immaginarie non possono risultare dal moltiplicarsi un numero di volte impari una quantità in se stessa presa sempre nello stesso stato, ma necessariamente tale prodotto deve risultare da una stessa quantità bensì, ma presa in istati opposti: Per Esempio la quantità immaginaria $\sqrt{-a^3}$ non può risultare nè da $a$ moltiplicato in $a$, nè da $-a$ moltiplicato in $-a$, ma necessariamente deve risultare da $a$ moltiplicato in $-a$; Così $\sqrt{-a^3}$ deve risultare, o da $a$ moltiplicato in $a$ in $a$ in $-a$, ovvero da $a$ moltiplicato in $-a$ in $-a$ in $-a$. Siccome poi la medesima quantità non può essere nello stesso tempo in due stati opposti, e la quantità per Esempio $\sqrt{-a^2}$ risulta dalla moltiplicazione della medesima quantità presa in istati opposti, quindi è che della quantità $-a^2$ se ne possono bensì determinare i fattori, ma dalla medesima estrarre non se ne può la radice, la quale dovrebbe essere tutt' insieme positiva, e negativa nel tempo istesso, lo che non può essere.

162. E' pertanto a mio giudizio andato a colpire lungi dal vero chi ha pensato essere nulla la quantità $-a^2$, abbenchè sia chimerica questa espressione $\sqrt{-a^2}$, poichè siccome non è nulla la quantità $-ab$ nata dal moltiplicarsi $a$ in $-b$, o $-a$ in $b$, così non deve essere nulla la quantità $-a^2$ nata dal moltiplicarsi $a$ in $-a$. Di fatto non essere del tutto fittizie le quantità immaginarie rendesi manifesto dall' avere esse le loro proprietà non meno, che le quantità reali, mentre quantunque paragonarle non si possa con le quantità reali, si può però comparare fra loro, e determinarne le loro ragioni.

163. Queste quantità immaginarie sono di molto uso nell' Algebra stante la loro impossibilità già esposta, mentre per mezzo loro ci si rendono manifesti i limiti di ciò, che è possibile, e si appalesa l'intero stato, in cui come tale sussiste fino a divenire impossibile.

164. Siccome le potestà positive d' esponente pari hanno doppia radice (pel num. 114), una positiva, e l' altra negativa; così pure l'espressione radicale di una potestà negativa d'esponente pari sarà tanto positiva, come negativa, cioè a dire la radice quadrata di $-a^6$ sarà tanto $+\sqrt{-a^6}$, come $-\sqrt{-a^6}$, e però le quantità immaginarie si distinguono ancor esse in positive, e negative.

165. Le quantità immaginarie egualmente che le quantità radicali reali possono ave-

avere i loro coefficienti, i quali ſi ripongono ſotto al vincolo con inalzarli alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo, indi moltiplicarli nella quantità eſiſtente ſotto al vincolo (giuſta il num. 135.), nel qual modo ſarà $3\sqrt{-2} = \sqrt{-18}$, così $ab\sqrt{-a^2} = \sqrt{-a^4b^2}$. E *vice verſa* ſe la quantità eſiſtente ſotto il vincolo ammetterà qualche diviſore, da cui levare ſi poſſa la radice indicata dall'eſponente del vincolo, mediante l'eſtrazione di tale radice ſi potrà (giuſta il num. 134.) collocare queſto diviſore fuori del vincolo, e però ſarà $\sqrt{-20} = 2\sqrt{-5}$, così $\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$, nel qual modo ſi ridurranno le quantità immaginarie alla più ſemplice eſpreſſione.

166. Per ſommare, e ſottrarre le quantità immaginarie ſi regoli nella maniera inſegnata ai numeri 138, 139, 141, 142.

167. Mediante la ſomma, e la ſottrazione poſſono ſvanire le quantità immaginarie, purchè però gli immaginarj ſiano comunicanti, e riſpetto alla ſomma ſiano affetti da ſegni contrarj, riſpetto poi alla ſettrazione ſiano affetti dagli ſteſſi ſegni: Come ſommandoſi $a + \sqrt{-b}$ con $-\sqrt{-b}$ la ſomma è $a$ quantità reale: Così ſottraendoſi $+\sqrt{-a}$ da $ce + \sqrt{-a}$ li ha di reſiduo $ce$ quantità reale.

168. La moltiplicazione delle quantità immaginarie ſi fa nel modo detto al num. 144, ſe non che quanto al ſegno da prefiggerſi al prodotto deveſi oſſervare, che ſiccome (giuſta il num. 7.) ogni quantità deveſi intendere moltiplicata nell'unità, però la quantità immaginaria per Eſempio $\sqrt{-a}$ farà lo ſteſſo, che $\sqrt{-1} \times \sqrt{a}$: Onde dovendoſi moltiplicare $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-b}$, o ſia $\sqrt{-1} \times \sqrt{a}$ in $\sqrt{-1} \times \sqrt{b}$, perchè il prodotto di $\sqrt{a}$ in $\sqrt{b}$ è $\sqrt{ab}$ (pel num. 144.), e il prodotto di $\sqrt{-1}$ in $\sqrt{-1}$ è $-1$, eſſendo che $\sqrt{-1}$ è la radice di $-1$, il prodotto di $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-b}$ ſarà è $-1 \times \sqrt{ab}$; ma il prodotto di $\sqrt{-a}$ in $-\sqrt{-b}$ è $\sqrt{ab}$, perchè i ſegni preſiſſi ai vincoli eſſendo diverſi danno (pel num. 57.) il ſegno $-$ da prefiggerſi al prodotto; in oltre il prodotto di $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-b}$ è $-\sqrt{ab}$, come pur ora ſi è detto, dunque il prodotto cercato deve eſſere $-1 \times -\sqrt{ab} = \sqrt{ab}$.

169. Si vede pertanto, che il prodotto di due quantità immaginarie non è una quantità immaginaria, ma una quantità reale.

170. Per le leggi de' ſegni da prefiggerſi al prodotto date al num. 57. ſembra, che il prodotto di $\sqrt{-1}$ in $\sqrt{-1}$ non debba eſſere $-1$, ma $+1$; quì però ſi conſideri, che ſiccome il prodotto di una quantità moltiplicata in ſe ſteſſa è il quadrato della ſteſſa quantità; dappoichè queſta eſpreſſione $\sqrt{-1}$ rappreſenta una tal quantità (pel num. 114.), il di cui quadrato è $-1$; e il prodotto di $\sqrt{-1}$ in $\sqrt{-1}$ deve dare il ſuo quadrato (pel num. 84.), tale prodotto non ha da eſſere $+1$, ma $-1$.

171. Quindi s' intende, che dovendoſi moltiplicare una quantità immaginaria d'eſponente 2. in ſe ſteſſa baſterà levarci il ſegno: Onde il prodotto di $\sqrt{-a^2}$ in $\sqrt{-a^2}$ ſarà $+1 \times -a^2 = -a^2$, perchè, come di ſopra ho detto, $\sqrt{-a^2} = 1 \times \sqrt{-a^2}$;

ma

ma il prodotto di $\sqrt{-a^2}$ in $-\sqrt{-a^2}$ farà $-1 \times -a^2 = +a^2$, perchè $\sqrt{-a^2} = 1 \times \sqrt{-a^2}$, e $-\sqrt{-a^2} = -1 \times \sqrt{-a^2}$. Essendo più quantità immaginarie da moltiplicarsi, vale ciò, che si è detto al num. 148.

172. Dovendosi moltiplicare una quantità immaginaria con una quantità reale, si osservi se la quantità reale è razionale, o irrazionale: Se è irrazionale si operi giusta il num. 144, osservando le solite regole de' segni; per lo che il prodotto di $-\sqrt{-a}$ in $\sqrt{b}$ sarà $-\sqrt{-ab}$: Se poi la quantità reale sarà razionale, si inalzi questa quantità razionale alla potestà indicata dall'esponente del vincolo, indi si moltiplichi nella quantità esistente sotto il vincolo; o pure tale quantità razionale si prefigga al vincolo: Come volendosi moltiplicare $a$ per $\sqrt{-b}$ si farà $a\sqrt{-b}$, o pure $\sqrt{-ab}$; questi prodotti poi saranno sempre quantità immaginarie.

173. La divisione delle quantità immaginarie si fa giusta il num. 150., se non che rispetto al segno da prefiggersi al quoziente devesi usare la precauzione accennata al num. 168. Come dovendosi dividere $\sqrt{-abd}$ per $\sqrt{-ad}$ si considerino queste due quantità così $\sqrt{-1} \times \sqrt{abd}$, $\sqrt{-1} \times \sqrt{ad}$, da cui nasce il quoziente $+1 \times \sqrt{b} = \sqrt{b}$; e il quoziente che nasce dal dividersi $-\sqrt{-cd}$ per $\sqrt{-c}$ è $-1 \times +1\sqrt{d} = -\sqrt{d}$. Di fatto $\frac{\sqrt{-1} \times \sqrt{abd}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{ad}} = \sqrt{b}$, e $-\frac{\sqrt{-1} \times \sqrt{cd}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} = -\sqrt{d}$.

174. E però il quoziente, che nasce dal dividersi una quantità immaginaria per un' altra immaginaria, non è una quantità immaginaria, ma reale.

175. Dovendosi dividere una quantità immaginaria per una quantità reale, se questa quantità reale sarà irrazionale, si operi giusta il num. 150. e al quoziente si dia il segno determinato dalla regola del num. 71.: Come dovendosi dividere $-\sqrt{-ab}$ per $\sqrt{a}$, o sia $-\sqrt{-1} \times \sqrt{ab}$ per $\sqrt{a}$ il quoziente sarà $-\sqrt{-1} \times \sqrt{b} = -\sqrt{-b}$: Che se la quantità reale sarà razionale ella si inalzi alla potestà indicata dall'esponente del vincolo, poscia si operi come pur ora si è detto, osservando la stessa legge de' segni: E però il quoziente, che nasce dal dividersi, $\sqrt{-ac^2d}$ per $c$ sarà $\sqrt{-ad}$.

176. Nell'uno, e nell' altro caso poi il quoziente sarà sempre una quantità immaginaria affetta dal segno $+$, o $-$ secondo che le quantità proposte da dividersi saranno affette dagli stessi, o da' segni contrarj. Non potendosi fare l'attuale divisione si indichi così $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{c}}$, e $\frac{\sqrt{-b}}{a}$.

177. Qualora si voglia inalzare una quantità immaginaria ad una qualunque potestà, ella si moltiplichi al solito tante volte in se stessa quante vengono indica-

te dall'esponente della potestà cercata diminuito di una unità, avendo però riguardo (per non fallare ne' segni) di considerare tale quantità immaginaria nella forma espressa al num. 168: Come il quadrato di $b\sqrt{-a}$, che devesi considerare come $b\sqrt{-1} \times \sqrt{a}$ sarà $b^2 \times -1 \times a = -ab^2$ (perchè devonsi inalzare a tale potestà anche i coefficienti); il suo cubo sarà $b^3 \times -a\sqrt{-a} = -ab^3\sqrt{-a}$; il quadrato-quadrato sarà $-ab^4 \times -1 \times a = a^2b^4$ ec.

178. Dal che chiaramente si vede, che delle quantità immaginarie le potestà d'esponente impari sono quantità similmente immaginarie, ma le potestà d'esponente pari sono quantità reali, le quali sono affette (non considerando la combinazione col segno prefisso al vincolo) dal segno —, se la metà dell' esponente è un numero impari, e pel contrario sono affette dal segno + se tale metà è un numero pari.

179. Per estrarre una cercata radice da una quantità immaginaria incompleſſa si riducano primieramente sotto al vincolo (pel num. 165.) i coefficienti se vi sono, indi si operi giusta il num. 158, nel qual modo la radice quadrata di $b\sqrt{-a^2} = \sqrt{-a^2b^2}$ sarà $\sqrt{-ab}$; se attualmente non si può fare questa estrazione, si regoli giusta il num. 159: Onde la radice cuba di $cd\sqrt{-a} = \sqrt{-ac^2d^2}$ sarà $\sqrt[6]{-ac^2d^2}$. Quando nell'estrarre da una proposta quantità immaginaria una cercata radice mediante la divisione degli esponenti ne risulterà una tal radicale, che abbia per esponente un numero impari, in questo caso la ritrovata radice non sarà una quantità immaginaria, ma una quantità reale: Come la radice quadrata di $\sqrt[6]{-b}$ sarà $\sqrt[\frac{6}{2}]{-1} \times \sqrt[\frac{6}{2}]{b} = -\sqrt[3]{b}$; e la radice quarta di $\sqrt[20]{-b}$ sarà $-\sqrt[5]{b}$.

180. Se si vorranno esprimere le quantità immaginarie a modo di potestà imperfette bisognerà scrivere l'esponente fratto all'estremità di una linea, la quale si estenda non solo a tale quantità, ma ancora al suo segno negativo: Onde per esprimere la quantità $\sqrt{-a^2}$ a modo di potestà imperfetta si farà $\overline{-a^2}^{\frac{1}{2}}$, poichè se si fosse fatto $\overline{-a^2}^{\frac{1}{2}} = -a^{\frac{2}{2}}$ avrebbe potuto nascer dubbio se questa espressione indicasse $-a$, o la radice quadrata di $-a^2$.

## ARTICOLO VII.

### *Della somma, e sottrazione delle quantità compleſſe.*

181. PRob. 1. Si debba sommare una data quantità compleſſa con un' altra.

182. Risol. Si scrivano una dopo l' altra queste quantità coi propri loro segni, come si è fatto al num. 29. nelle quantità incompleſſe.

*ESEM-*

*ESEMPIO.*

183. Prob. 2. Cercaſi ſe la ſomma, che riſulta da due numeri impari; o da uno pari, e l'altro impari, ſia numero pari, o impari.

184. Riſol. Quanto al primo caſo uno de' due numeri impari ſi dica $2a+1$, e l'altro ſi chiami $2b+1$. Quanto al ſecondo caſo il numero pari ſi denomini $2a$, e l'impari ſi dica $2b+1$. E quì ſi noti l'eſpreſſione generale del numero impari, mentre con moltiplicarſi un qualunque numero per 2 ne riſulta un numero pari, e ſe a queſto numero pari generalmente eſpreſſo con $2a$ ſi aggiunga una unità, ſi avrà $2a+1$ neceſſariamente numero impari, e generalmente eſpreſſo. Si faccia pertanto la ſomma così.

| Primo caſo | | Secondo caſo | |
|---|---|---|---|
| | $2a+1$ | | $2a$ |
| | $2b+1$ | | $2b+1$ |
| Somma | $2a+2b+2$ | Somma | $2a+2b+1$ |

Nel primo caſo pertanto la ſomma eſſendo tutta moltiplicata per 2 è un numero pari, e nel ſecondo caſo è un numero impari, perchè il prodotto per 2 è accreſciuto di una unità: Onde ne naſce il ſeguente

185. Teorema 1. La ſomma di due numeri impari è un numero pari, e la ſomma di un numero pari con un impari è un numero impari.

186. Qualora alcuni termini delle ſommate quantità compleſſe ſaranno ſimili, ſe ne faccia la riduzione giuſta il num. 34. E per facilitare queſta riduzione ſi ſcrivano i termini ſimili delle quantità da ſommarſi uno ſotto l'altro, poſcia ſi faccia la ſomma al ſolito: Come dovendoſi ſommare le quattro quantità A, B, C, D, ſi farà

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A. | $-3a^2b^3+4cd^4$ | | $+ef$ | |
| B. | $-2a^2b^3$ | $+3bc$ | $+2gh$ | |
| C. | | $+cd^4-7bc$ | $+4gh$ | |
| D. | $8a^2b^3$ | $-5cd^4+bc$ | | $-adc$ |
| Somma | $3a^2b^3$ | $-3bc+ef+6gh-adc.$ | | |

187. Prob. 3. Da una data quantità compleſſa ſe ne debba ſottrarre un'altra.

188. Riſol. Si ſcrivano una dopo l'altra queſte quantità mutando i ſegni a tutti i termini della quantità da ſottrarſi, come ſi è fatto al num. 44. nelle quantità incompleſſe.

*ESEMPIO.*

189. Prob. 4. Cercaſi ſe la differenza, che paſſa tra due numeri impari, o uno pari, e l'altro impari, ſia numero pari, o impari.

190. Riſol. Quanto al primo caſo uno de' numeri impari ſi dica $2a+1$, e l'altro ſi dica $2b+1$. Quanto al ſecondo caſo il numero pari ſi chiami $2a$, e l'impari ſi denomini $2b+1$; poſcia ſi faccia la ſottrazione così.

| | Primo caſo | | Secondo caſo |
|---|---|---|---|
| | $2a+1$ | | $2a$ |
| | $2b+1$ | | $2b+1$ |
| Reſiduo | $2a-2b$ | Reſiduo | $2a-2b-1$ |

Poichè adunque il reſiduo nel primo caſo è moltiplicato per 2 egli è un numero pari, e nel ſecondo caſo è un numero impari, perchè queſto reſiduo riſulta da un numero pari diminuito di una unità: Onde ne naſce il ſeguente

191. Teorema 2. La differenza di due numeri pari è un numero pari, e la differenza tra un numero pari, e un numero impari è un numero impari.

192. Se fatta l' operazione vi ſaranno dei termini ſimili, ſe ne dovrà fare la riduzione giuſta il num. 46. E per facilitare queſta riduzione ſi ſcrivano una ſotto l' altra le quantità ſimili; come dovendoſi ſottrarre $7ab^2-acd^4-5ed+2de^3$ da $9ab^2+3ed-4bd^3$, ſi farà

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Quantità da cui ſi deve fare la ſottrazione | $9ab^2$ | | $+3ed$ | $-4bd^3$ |
| Quantità da ſottrarſi | $7ab^2$ | $-acd^4$ | $-5ed$ | $+2de^3$ |
| Reſiduo | $2ab^2$ | $+acd^4$ | $+8ed$ | $-4bd^3$ $-2de^3$ |

## ARTICOLO VIII.

*Della moltiplicazione, e diviſione delle quantità compleſſe.*

193. PRob. 1. Debbaſi moltiplicare una quantità compleſſa per un' altra.

194. Riſol. Si ſcriva il moltiplicatore ſotto al moltiplicando, indi con ciaſcun termine del moltiplicatore ſi moltiplichino tutti i termini del moltiplicando, e ciaſcun prodotto parziale ſi ſcriva ſotto la linea orizzontale, avvertendo di notare uno ſotto l' altro quelli, che ſono ſimili, per poterne fare la riduzione, ad ognuno de' quali deveſi dare il conveniente ſegno giuſta il num. 57, ed il loro aggregato darà il prodotto cercato.

### ESEMPIO I.

195. Prob. 2. Eſſendo data una quantità $a$ diviſa in quante parti ſi vogliono $b, c, d, e, f$, cercaſi il valore, che naſce dal moltiplicarſi tale quantità in ciaſcuna delle ſue parti; o pure dal moltiplicarſi un' altra qualunque quantità $m$ in ciaſcuna di queſte parti.

196. Riſol. Si faccia la moltiplicazione nel modo detto, e come quì ſotto ſi vede

| | Primo caſo | | Secondo caſo |
|---|---|---|---|
| Quantità data | $b+c+d+e+f=a$ | Quan. data | $b+c+d+e+f=a$ |
| Moltiplicatore | $a$ | Moltiplicat. | $m$ |
| Prodotto | $ab+ac+ad+ae+af=a^2$ | Prodotto | $bm+cm+dm+em+fm=am;$ |

dalla quale operazione naſce il ſeguente

197.

197. Teorema 1. Se saranno date due quantità, una delle quali sia divisa in più parti, in ciascuna delle quali si moltiplichi l'altra quantità, la somma di tutti questi rettangoli sarà eguale al rettangolo delle due quantità date: Che se sarà una sola quantità, la quale divisa in più parti si moltiplichi in ciascuna di queste parti, sarà la somma di questi rettangoli eguale al quadrato della quantità data. Queste sono la prima, e la seconda prop. del lib. 2. d' Euclide.

## ESEMPIO II.

198. Prob. 3. Cercasi che cosa nasca dal moltiplicare la somma di due quantità nella loro differenza.

199. Risol. Una delle quantità date si dica $= a$, l'altra $= b$; la loro somma sarà $a + b$, e la differenza $a - b$. Ora se ne faccia la moltiplicazione così

| | |
|---|---|
| Moltiplicando | $a + b$ |
| Moltiplicatore | $a - b$ |
| Prodotto | $a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$, |

perchè $+ab - ab$ si elidono a motivo dei segni opposti. Ora da questa operazione ne nasce il seguente

200. Teorema 2. Il prodotto che nasce dal moltiplicarsi la somma di due quantità nella loro differenza è eguale alla differenza de' quadrati di tali quantità.

201. Acciò si possa vedere più distesamente questa operazione proporrò un altro Esempio, ove si osservi come devonsi notare uno sotto all'altro i prodotti parziali simili, onde facilitarne la riduzione nel prodotto totale. Si debba moltiplicare la quantità $a^3 d - a^3 b^3 d^3 + a^3 b^4 d^4$ per la quantità $bd^4 - b^2 d^3 - b^3 d^4$. Ecco il Calcolo.

| | |
|---|---|
| Moltiplicando | $a^3 d - a^3 b d^2 + a^3 b^4 d^4$ |
| Moltiplicatore | $b d^2 - b^2 d^3 - b^3 d^4$ |

$$a^3 b d^3 - a^3 b^2 d^4 + a^3 b^4 d^5 + a^3 b^3 d^5 - a^3 b^5 d^7 - a^3 b^6 d^8$$
$$- a^3 b^2 d^4 + a^3 b^4 d^6 - a^3 b^3 d^5$$

Prodotto totale $a^3 b d^3 - 2 a^3 b^2 d^4 + 2 a^3 b^4 d^6 - a^3 b^5 d^7 - a^3 b^6 d^8$.

202. Il più delle volte torna comodo l'indicare soltanto l'operazione mediante il segno $\times$, tirando poscia una linea sopra tutte le quantità, a cui si estende l'azione del segno $\times$; come dovendosi moltiplicare la quantità $2cm^2 - ab + 7ac$ per la quantità $3ad + 8cem$ si farà $\overline{2cm^2 - ab + 7ac} \times \overline{3ad + 8cem}$. Ho detto che torna comodo l'indicare soltanto la moltiplicazione, e perchè si risparmia l'attuale operazione, e perchè restando inconfusi i fattori, se nel progresso del calcolo occorrerà di fare la divisione per uno di loro se ne troverà risparmiata l'operazione.

203. Prob. 4. Si debba dividere una quantità complessa per un' altra.

204. Risol. O il divisore è una quantità incomplessa, o è complessa. Se è incomplessa con tale divisore si dividano tutti i termini del dividendo regolandosi giusta il num. 71.

ESEM-

## *E S E M P I O.*

205. Prob. 5. Cercaſi ſe ſia pari, o impari il numero, che naſce dal dividerſi un numero impari per un numero pari.

206. Riſol. Il dividendo, ſia $4a^2 + 16ab + 32ad + 1$, e il diviſore ſia $2a$. Si cominci a dividere il primo termine $4a^2$ del dividendo pel diviſore $2a$, e il quoziente $2a$ ſi noti a parte; poſcia ſi moltiplichi il quoziente nel diviſore, e il prodotto ſi ſottragga dal dividendo; indi ſi paſſi a dividere il ſuſſeguente termine del dividendo, e così in ſeguito, come ſi pratica nella diviſione numerica. Ecco il Calcolo.

Diviſore $2a$ | Dividendo $4a^2 + 16ab + 32ad + 1$

$4a^2$

$0 + 16ab$

$16ab$

$0 + 32ad$

$32ad$

$0 + 1$

Quoz. $2a + 8b + 16d + \frac{1}{2a}$ $\qquad$ $2a$

Ora perchè per ultimo reſiduo ſi ha una unità, da cui naſce la frazione $\frac{1}{2a}$, perciò ne naſce il ſeguente

207. Teorema 3. Il quoziente che naſce dal dividerſi un numero impari per un numero pari è ſempre un numero impari.

208. Se anche il diviſore ſarà una quantità compleſſa, ſi ordini primieramente il diviſore, e il dividendo ſecondo una ſteſſa lettera, quale più piace, lo che ſi fa con prendere per primo termine del dividendo (lo ſteſſo ſi dica del diviſore) quello, in cui la lettera fiſſata ha il maſſimo eſponente; per ſecondo termine quello, in cui tale lettera ha l'eſponente proſſimo minore, e così in ſeguito: Che ſe vi foſſero più termini, ne' quali queſta lettera medeſima foſſe elevata alla ſteſſa poteſtà, in tal caſo deveſi in oltre avere riguardo di ordinarli ancora ſecondo un' altra lettera comune al dividendo, e al diviſore. Intanto poi ſi ordinano in queſto modo i termini del diviſore, e del dividendo per facilitare, anzi eſeguire la diviſione, che alle volte ſenza queſta preparazione potrebbe ſembrare non fattibile: Anzi ſe ordinato il dividendo, e il diviſore ſecondo una lettera comune non riuſcirà la diviſione, biſognerà tentarla un' altra volta dopo averli ordinati ſecondo un' altra lettera. Diſpoſto il dividendo, e il diviſore in queſto modo, ſi cominci l' operazione con dividere il primo termine del dividendo pel primo termine del diviſore, il di cui quoziente deveſi notare a parte, poſcia ſi moltiplichi queſto quoziente in ciaſcun termine del diviſore; e il prodotto ſi ſottragga dal dividendo, lo che fatto ſi divida di nuovo il primo termine del reſiduo pel primo termine del diviſore, e il quo-

zien-

ziente si noti col suo conveniente segno appresso all'altro quoziente trovato, indi si moltiplichi quest'ultimo quoziente in tutto il divisore, e il prodotto sottraggasi al solito, e collo stesso metodo si continui fino in ultimo l'operazione. Si debba per Esempio dividere la quantità $2abde+6a^2de+14adce-abcd-3a^2cd-7ac^2d+a^2be+3a^2e+7a^2ce$ per la quantità $-cd+2de+ae$. Si ordini in primo luogo il dividendo, e il divisore per la lettera $a$, come qui sotto si vede, poscia si operi nel modo detto. Ecco il Calcolo

Divisore
$ae+2de-cd$ | $3a^2e+6a^2de-3a^2cd+a^2be+7a^2ce+2abde-abcd+14acde-7ac^2d$
Quant. da sott. $3a^2e+6a^2de-3a^2cd$

Primo residuo 0 0 0 $+a^2be+7a^2ce+2abde-abcd+14acde-7ac^2d$
Quantità da sottrarsi $a^2be$ $+2abde-abcd$

Secondo residuo 0 $+7a^2ce$ 0 0 $+14acde-7ac^2d$
Quantità da sottrarsi $7a^2ce$ $+14acde-7ac^2d$

Ultimo residuo 0 0 0

Quoz. $3a^2+ab+7ac$

L'aggregato pertanto di tutti questi quozienti parziali dà il cercato quoziente totale.

209. Può alle volte succedere, che nella quantità da dividersi non si trovi tutta quella quantità, che nasce dalla moltiplicazione del quoziente nel divisore, ciò non ostante deve si seguitare l'operazione, mentre potrà essere, che la divisione succeda: Come dovendosi dividere $a^2-b^2$ per $a+b$, diviso il primo termine $a^2$ del dividendo pel primo termine $a$ del divisore, e moltiplicato il divisore $a+b$ pel quoziente $a$, ne nasce la quantità $a^2+ab$, la quale non si trova tutta nel dividendo; fatta pertanto la sottrazione rimane $-ab-b^2$, il di cui primo termine $-ab$ diviso pel primo termine $a$ del divisore lascia di quoziente $-b$, che moltiplicato nel divisore $a+b$, e il prodotto $-ab-b^2$ sottratto al solito, poichè nulla rimane, la divisione si fa esattamente, venendone di quoziente $a-b$. Ecco il Calcolo.

| Divisore | Dividendo |
|---|---|
| $a+b$ | $a^2-b^2$ |
| Quantità da sottrarsi. | $a^2+ab$ |
| Residuo | $-ab-b^2$ |
| Quantità da sottrarsi. | $-ab-b^2$ |
| Residuo | 0 0 |

Quoz. $a-b$.

210. Se vi sarà un residuo, che non si possa dividere, in tal caso a questo residuo si sottoscriverà il divisore, come si è fatto al num. 206.; o pure si rappresenterà a dirittura la divisione a modo di frazione: Come dovendosi dividere $a^2bd-acd^2+de-ac$ per $ab-cd$, la quale divisione non si può fare esattamente, el-

ella s'indicherà così $\frac{a^2bd-acd^2+de-ac}{ab-cd}$; e questo modo torna sovente comodo per più capi.

## ARTICOLO IX.

*Modo di ritrovare tutti i divisori di una data quantità algebraica, e tra due quantità il massimo comun divisore.*

211. QUì io suppongo le nozioni, e la dimostrazione, che a questo Problema ho data all' Articolo X. del Capo I. del I. Tomo.

212. Prob. 1. Si debbano ritrovare tutti i divisori incomplessi di una data quantità algebraica.

213. Risol. La quantità data sia $15a^2b$, in cui si operi a norma del citato Articolo X., come qui sotto si vede.

$15a^2b.$ 3.
$5a^2b.$ 5. 15.
$a^2b.$ $a.$ $3a.$ $5a.$ $15a.$
$ab.$ $a.$ $a^2.$ $3a^2.$ $5a^2.$ $15a^2$
$b.$ $b.$ $3b.$ $5b.$ $15b.$ $ab.$ $3ab,$ $5ab.$ $15ab.$ $a^2b.$ $3a^2b.$ $5a^2b.$ $15a^2b.$

214. In secondo luogo si debbano ritrovare tutti i divisori della quantità $acm-acd+bcm-bcd$, per lo che fare si operi come segue.

$acm-acd+bcm-bcd$ . $c$
$am-ad+bm-bd$ . $a+b.$ $ac+bc$
$m-d$ . $m-d.$ $cm-cd.$ $am-ad+bm-bd.$ $acm-acd+bcm-bcd.$

215. Quì pure suppongo le nozioni circa il massimo comun divisore date all' Articolo XI. del Capo I. del Tomo I., e la dimostrazione ivi esibitane.

216 Prob. 2. Si debba ritrovare il massimo comun divisore tra due date quantità algebraiche.

217. Risol. Devesi primieramente ordinare (giusta il num. 208.) ciascuna delle quantità date secondo una lettera ad amendue comune, poscia dividerne una per l'altra a norma dello stesso num. 208., e se il residuo sarà maggiore del divisore, dovrassi egli collo stesso divisore dividere, e così in seguito, finchè si arrivi a una divisione senza residuo, nel qual caso l'ultima quantità, che ha servito di divisore, sarà il massimo comun divisore. Che se capiterà un residuo minore del divisore, in allora si inverta l'ordine, e col residuo si divida il divisore. Prima però di accingersi alla divisione si osservi, se mai ciascun termine d'amendue le quantità fosse molti-

pli-

plicato per una medeſima quantità, o numero; o pure ſe una ſola di loro, o i nati reſidui ammettono un diviſore, e tanto in un caſo, come nell'altro ſi tolga queſto diviſore mediante la diviſione. Ma veniamo agli Eſempi, e primieramente ſi debba ritrovare il maſſimo comun diviſore di queſte due quantità $18a^3bd - 8a^4b - 3abd^3 - 8a^2bd^2 + bd^4$, e $6a^3b + bd^3 - abd^2 - 8a^2bd$, ciaſcun termine delle quali eſſendo diviſibile per $b$, ſe ne faccia prima la diviſione, poſcia ſi ordinino per la lettera $d$, come ſi vede fatto in A, e B, e ſi divida B per A, dalla quale diviſione naſce di reſiduo $-2ad^3 + 12a^3d - 8a^4$, il quale avendo $-2a$ per fattore comune, perciò egli ſi tolga, onde tale reſiduo rimarrà $d^3 - ba^2d + 4a^3$, che ſcrivo in D. Colla quantità A ſi divida la quantità D, e ne viene di reſiduo $ad^2 + 2a^2d - 2a^3$, che eſſendo diviſibile per $a$ ſe ne faccia la diviſione, con che rimarrà $d^2 + 2ad - 2a^2$, che ſcrivo in E. Ma perchè il primo termine $d^2$ di queſto reſiduo è minore del primo termine $d^3$ del diviſore, ſi inverta l'ordine, e ſi faccia ſervire queſto reſiduo di diviſore, e il primo diviſore di divdiendo, e perchè fatta la diviſione ſi ha di reſiduo $-3ad^2 - 6a^2d + 6a^3$, che ſpogliato del ſuo diviſore $-3a$ reſta $d^2 + 2ad - 2a^2$, il quale è lo ſteſſo, che ha ſervito di diviſore, però il maſſimo comun diviſore ſarà $d^2 + 2ad - 2a^2$, che ſcrivo in F, quale però deveſi moltiplicare per $b$, con cui ſi diviſero le due date quantità; onde il loro maſſimo comun diviſore è $bd^2 + 2abd - 2a^2b$. Ecco il Calcolo.

| A | B |
|---|---|
| $d^3 - ad^2 - 8a^2d + 6a^3$ | $d^4 - 3ad^3 - 8a^2d^2 + 18a^3d - 8a^4$ |
| Quantità da ſottrarſi | $d^4 - ad^3 - 8a^2d^2 + 6a^3d$ |
| Primo reſiduo | $-2ad^3 + 12a^3d - 8a^4$ |

| A | D |
|---|---|
| $d^3 - ad^2 - 8a^2d + 6a^3$ | reſiduo ſpogliato del fattore $-2a$ $d^3 - 6a^2d + 4a^3$ |
| Quantità da ſottrarſi | $d^3 - 8a^2d + 6a^3 - ad^2$ |
| Secondo reſiduo | $2a^2d - 2a^3 + ad^2$ |

| E | A |
|---|---|
| reſiduo ſpogliato del diviſore $a$ $d^2 + 2ad - 2a^2$ | $d^3 - ad^2 - 8a^2d + 6a^3$ |
| Quantità da ſottrarſi | $d^3 + 2ad^2 - 2a^2d$ |
| Terzo reſiduo | $-3ad^2 - 6a^2d + 6a^3$ |

e perchè con iſpogliare queſto reſiduo del ſuo fattore $-3a$ rimane $d^2 + 2ad - 2a^2$, che è lo ſteſſo diviſore; però ſe ſi moltiplicherà in $b$ fattore comune delle due date quantità, ſi avrà $bd^2 + 2abd - 2a^2b$, che è il loro cercato maſſimo comun diviſore.

218. Può alle volte accadere, che le due date quantità abbiano un comun diviſore, ma che eſſendo eſſe ordinate ſecondo una tal lettera non ſi poſſa trovare,

nel qual caſo fa di meſtieri ordinarle ſecondo altra lettera, finchè ci venga fatto di rinvenirlo. Se poi dopo averle ordinate ſecondo ciaſcuna lettera non rieſce l'intento, non avranno eſſe un comun diviſore. Altre volte ancora ſuccederà, che dopo avere avanzata l'operazione biſognerà ordinare il reſiduo, e il diviſore ſecondo altra lettera a fine di potere continuare la diviſione. Ecco l'Eſempio, in cui haſſi a ritrovare il maſſimo comun diviſore delle due quantità A, B. Diviſa B per A ſi ha di reſiduo C, che diviſo per A laſcia di reſiduo D, che non ſi può dividere per A. Si ordinino pertanto il reſiduo D, e il diviſore A per $a$ (le due date quantità erano ordinate per $c$), e perchè ſpogliata ciaſcuna quantità del ſuo riſpettivo fattore, che riguardo alla prima è $c+g$, riguardo alla ſeconda $g^2+e^2$, la diviſione ſi fa ſenza reſiduo per $a-d$, però $a-d$ è il maſſimo comun diviſore. Ecco il calcolo.

| A | B |
|---|---|
| $ac-cd+ag-dg$ | $ac^2-c^2d+ae^2-de^2$ |
| Quantità da ſottrarſi | $ac^2-c^2d+acg-cdg$ |
| Primo reſiduo C. | $-acg+cdg+ae^2-de^2$ |
| Quantità da ſottrarſi | $-acg+cdg-ag^2+dg^2$ |
| Secondo reſiduo D. | $+ag^2-dg^2+ae^2-de^2$ |

Ora queſto reſiduo non potendoſi dividere pel diviſore A, ſi ordini l'uno, e l'altro per la lettera $a$, come quì ſotto ſi vede in A, D, poſcia ſi continui al ſolito la diviſione.

$$\overset{\text{A}}{a\sqrt{c+g}-d\sqrt{c+g}} \quad \Big| \quad \overset{\text{D}}{a\sqrt{g^2+e^2}-d\sqrt{g^2+e^2}},$$

cioè $a-d$, che divide $a-d$ eſattamente.

219. Talora affinchè una quantità poſſa eſſere diviſa per l'altra, o pure il reſiduo pel diviſore, o *vice verſa*, biſognerà talmente preparare i loro termini, onde ſi poſſa accuratamente fare la diviſione ſenza frazione, lo che ſi farà oſſervando quali ſiano i fattori del primo termine del diviſore, che non ſi trovano nel primo termine del dividendo. Se pel fattore, che non è ad ambidue comune, ſi potrà dividere tutto il diviſore, ſi divida; ſe no, ſi moltiplichi tutto il dividendo con eſſo, nel qual modo ſi otterrà ſempre la diviſione ſenza frazioni, ſenza che ſi venghi a turbare l'invenzione del comun diviſore. Si debba per Eſempio trovare il maſſimo comun diviſore di queſte due quantità, o formole (qualunque quantità algebraica con termine generale ſi chiama formola) $2a^3+8a^2+2a-12$, e $5a^2+9a-18$. Non potendoſi accuratamente dividere il primo termine $2a^3$ della prima pel primo termine $5a^2$ della ſeconda, nè per 5 potendoſi dividere tutta la ſeconda formola, ſi moltiplichi per 5 tutta la prima, e ſi avrà $10a^3+40a^2+10a-60$, che ſi divida per la ſeconda formola, e ne verrà di reſiduo $22a^2+46a-60$, il di cui primo termine $22a^2$ non potendo eſſere diviſo pel primo termine $5a^2$ del diviſore, ſi moltiplichi perciò col 5 tutto queſto reſiduo, e ne verrà $110a^2+230a-300$, che diviſo pel diviſore $5a^2+$ ec. riſulta di reſiduo $32a+96$. Con queſto reſiduo ſi dovrebbe ora dividere il diviſore $5a^2+9a-18$, ma perchè il di lui primo termine $5a^2$ non è diviſibile per $32a$, e altronde tutto il reſiduo $32a+96$ può eſſere diviſo

ſo per 32, perciò egli ſi divida, e col quoziente $a+3$ ſi divida la formola $5a^2+9a-18$, e perchè la diviſione ſuccede eſattamente, venendone di quoziente $5a-6$, però ſarà $a+3$ il maſſimo comun diviſore delle propoſte due formole.

## ARTICOLO X.

### *Del Calcolo delle Frazioni.*

220. Siccome in Aritmetica, così in Algebra naſcono le frazioni qualora non ſi può fare una qualche diviſione, nel qual caſo ſiamo coſtretti d'indicarla.

221. Poichè col dividerſi una data quantità per un'altra a lei eguale ne naſce di quoziente l'unità (pel num. 76.), però ſe il denominatore di una data frazione ſarà eguale al numeratore, tale frazione eſprimerà l'unità; onde $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1$. E ſiccome (pel num. 129. del Tomo I.) il quoziente, che naſce dal dividerſi una qualunque quantità per l'unità, è la ſteſſa quantità, quindi ſi potrà eſprimere qualſivoglia quantità a modo di frazione con ſottoſcriverci l'unità ſeparata da una linea, così $\frac{a}{1}$, o $\frac{ab+d^2c-ce}{1}$.

222. Quì ha luogo tutto ciò, che ho detto delle Frazioni nel Tomo I.

223. Data una frazione ella ſi ridurrà a minimi termini (pel num. 228. del Tomo I.) con dividere il numeratore, e il denominatore pel loro maſſimo comun diviſore, che deveſi ritrovare giuſta i num. 217. ec., mentre i due quozienti, che ne verranno ſaranno il numeratore, e il denominatore della frazione cercata: onde con dividerſi il numeratore, e il denominatore della frazione $\frac{a^3-a^2b}{a^2c-abc}$ per $a^2-ab$ loro maſſimo comun diviſore ſi avrà, $\frac{a}{c}=\frac{a^2-a^2b}{a^2c-abc}$.

224. Avendoſi una frazione impropria ſi potrà ridurla a quantità intera con dividerne il numeratore pel denominatore giuſta il num. 231. del Tomo I., nel qual modo ſarà $\frac{abc}{ac}=b$.

225. Che ſe ſi vorrà ridurre una quantità intera a frazione, che abbia un tale denominatore, baſterà (pel num. 238. del Tomo I.) moltiplicare la propoſta quantità per queſto denominatore, e al prodotto ſottoſcriverci lo ſteſſo denominatore ſeparato da una linea: Onde per ridurre $a+b$ a frazione, che abbia per denominatore $c-d$ ſi farà $\frac{\overline{c-d}\times\overline{a+b}}{c-d}=\frac{ac+bc-ad-bd}{c-d}$. Che ſe ſarà data una quantità intera con frazione, ſi ridurrà tutto a frazione (giuſta il num. 240. del Tomo I.) con moltiplicare la quantità intera pel denominatore della frazione, indi ſottoſcrivere queſto denominatore a tutta l'intera quantità: Così $an+\frac{bc}{e^2-m}$ ſarà $\frac{\overline{e^2-m}\times\overline{an+bc}}{e^2-m}=\frac{ae^2n-amn+bc}{e^2-m}$.

226. Dovendoſi ridurre due, o più frazioni allo ſteſſo denominatore, ſi moltiplichino i numeratori, e i denominatori in croce, e a ciaſcuno di queſti prodotti ſi dia per denominatore il prodotto de' denominatori (giuſta il num. 255., e 257. del Tomo I.): Onde le due frazioni $\frac{a}{b+c}$, $\frac{d-m}{n}$ ridotte allo ſteſſo denominatore ſaranno $\frac{a \times n}{n \times b+c}$, $\frac{b+c \times d-m}{n \times b+c}$, cioè $\frac{an}{bn+cn}$, $\frac{bd+cd-bm-cm}{bn+cn}$.

227. Per ſommare inſieme due, o più frazioni baſterà ſcriverle una dopo l'altra co' proprj ſegni. O pure ſi regoli così: ſi riducano queſte frazioni allo ſteſſo denominatore, lo che fatto ſi ſcrivano uno dopo l'altro i numeratori delle riſultate frazioni con quei ſegni, che hanno, e a tale ſomma ſi ſottoſcriva il comune denominatore. Così per ſommare le tre frazioni $\frac{b}{a-c}$, $\frac{a^2-m^2}{c+e}$, $\frac{c-e}{a}$, ſi farà $\frac{b}{a-c} + \frac{a^2-m^2}{c+e} + \frac{c-e}{a}$. O pure ſi riducano prima allo ſteſſo denominatore così $\frac{a \times c+e \times b}{a \times c+e \times a-c}$, $\frac{a \times a-c \times a^2-m^2}{a \times a-c \times c+e}$, $\frac{a-c \times e+e \times c-e}{a \times a-c \times c+e}$, cioè $\frac{abc+abe}{a^2c-ac^2+ace-ace}$, $\frac{a^3-a^2m^2-a^2c+acm^2}{a^2c-ac^2+a^2e-ace}$, $\frac{ac^2-ae^2-c^3+ce^2}{a^2c-ac^2+a^2e-ace}$, e ſommando queſti numeratori, indi dando loro il comune denominatore ſi avrà

$\frac{abc+abe+a^3-a^2m^2-a^2c+acm^2+ac^2-ae^2-c^3+ce^2}{a^2c-ac^2+a^2e-ace}$, che è la ſomma cercata delle tre date frazioni.

228. Iſteſſamente ſi opera per ſommare una quantità intera con una frazione, come dovendoſi ſommare $a$ con $\frac{de}{a+c}$, ſi farà $a + \frac{de}{a+c}$, o ſia (pel num. 225.) $\frac{a^2+ac+de}{a+c}$.

229. Quanto alla ſottrazione di una frazione da un'altra, ella ſi farà collo ſcrivere la frazione da ſottrarſi coi ſegni mutati preſſo alla frazione, da cui ſi deve fare la ſottrazione. O pure ſi ridurrà l'una, e l'altra frazione allo ſteſſo denominatore, poſcia preſſo al numeratore, da cui deveſi fare la ſottrazione ſi ſcriverà coi ſegni mutati il numeratore della frazione, che deveſi ſottrarre, e ſotto ſi ſcriverà il comune denominatore: Come dovendoſi ſottrarre da $\frac{ab^2-m}{ce+an}$ la $\frac{bd}{a-c^2}$, ſi farà $\frac{ab^2-m}{ce+an} - \frac{bd}{a-c^2}$. O pure ſi riduca l'una, e l'altra allo ſteſſo denominatore così $\frac{a^2b^2-am-ab^2c^2+c^2m}{ace+a^2n-c^2e-ac^2n}$, $\frac{+bcde+abdn}{ace+a^2n-c^2e-ac^2n}$, e facendo l'attuale ſottrazione ne' numeratori, ſi avrà $\frac{a^2b^2-am-ab^2c^2+c^2m-bcde-abdn}{ace+a^2n-c^2e-ac^2n}$, differenza cercata delle due date frazioni.

230.

230. Egualmente si opera per sottrarre una quantità intera da una frazione, o una frazione da una quantità intera: Come dovendosi sottrarre $ab$ da $\frac{cd-e}{a+b}$, si farà $\frac{cd-e}{a+b} - ab$, o sia (pel num. 225.) $\frac{cd-e-a^2b-ab^2}{a+b}$. Così dovendosi sottrarre $\frac{ac+be}{m^2-ac}$ da $mn$, si farà $mn - \frac{ac-be}{m^2-ac}$, o sia (per lo stesso num. 225.) $\frac{m^3n-acmn-ac-be}{m^2-ac}$.

231. Dovendosi moltiplicare insieme due, o più frazioni basterà (giusta il num. 272. del Tomo I.) moltiplicare tra loro i numeratori di queste frazioni, indi i denominatori, con che si avrà il numeratore, e il denominatore di una nuova frazione, che sarà il prodotto cercato: Come dovendosi moltiplicare la frazione $\frac{2ab+5dc}{am+ce}$ per la frazione $\frac{7ab-3dc}{cd-np}$, si farà $\frac{2ab+5dc}{am+ce} \times \frac{7ab-3dc}{cd-np} =$
$= \frac{14a^2b^2+35abdc-6abdc-15d^2c^2}{acdm+c^2de-amnp-cenp} = \frac{14a^2b^2+29abdc-15d^2c^2}{acdm+c^2de-amnp-cenp}$.

232. Che se si dovrà moltiplicare una quantità intera per una frazione, in tal caso si moltiplichi la quantità intera col numeratore della frazione, ed al prodotto si sottoscriva il denominatore della frazione: Come dovendosi moltiplicare $cm-de$ per $\frac{ab+cn}{ac}$, si farà $\frac{cm-de}{1} \times \frac{ab+cn}{ac} = \frac{abcm-abde+c^2mn-cden}{ac}$. Se la quantità intera da moltiplicarsi con una frazione sarà eguale al dominatore della frazione, in tal caso (pel num. 76.) il prodotto sarà il numeratore moltiplicato nell'unità, mentre egli è moltiplicato, e diviso per la stessa quantità, cioè a dire sarà lo stesso numeratore: Per lo che il prodotto di $c+d$ in $\frac{ab}{c+d}$ sarà $ab$.

233. Per dividere una frazione con un'altra frazione si moltiplichi (giusta il num. 287. del Tomo I.) il numeratore della frazione dividenda nel denominatore della frazione, che divide, ed il prodotto si scriva per numeratore della nuova frazione, cui si dia per denominatore il prodotto del denominatore della frazione dividenda nel numeratore della frazione, che divide: O pure, che è lo stesso, nella frazione, che divide si cambi il numeratore in denominatore, e il denominatore in numeratore, poscia si moltiplichino fra loro le due frazioni giusta il num. 231. Si debba per Esempio dividere la frazione $\frac{ad+ac}{cm}$ per la frazione $\frac{bn-ae}{an}$, si cambi questa così $\frac{an}{bn-ae}$, poscia si moltiplichino fra loro così $\frac{an}{bn-ae} \times \frac{ad+ac}{cm} = \frac{a^2dn+a^2cn}{bcmn-acem}$, e questa frazione è il quoziente cercato.

234. Se le due date frazioni avranno lo stesso denominatore, si avrà il quoziente cercato con dividere il numeratore del dividendo pel numeratore del divisore; Come dovendosi dividere $\frac{ab}{c}$ per $\frac{bd-ce}{c}$ il quoziente sarà $\frac{ab}{bd-ce}$.

235.

235. Dovendosi dividere una quantità intera per una frazione, basterà moltiplicare la quantità intera pel denominatore della frazione, ed al prodotto sottoscrivere per denominatore il numeratore della frazione: Come dovendosi dividere $ab-cd$ per $\frac{eb+cb}{d}$, si farà $\frac{d \times \overline{ab-cd}}{eb+cb} = \frac{abd-cd}{eb+cb}$. Se poi si dovrà dividere una frazione per una quantità intera, basterà moltiplicare la quantità intera nel denominatore della frazione: Come dovendosi dividere la frazione $\frac{cd+ae}{am}$ per $b-ac$, si farà

$$\frac{\frac{cd+ae}{am}}{b-ac} = \frac{cd+ae}{abm-a^2cm}.$$

236. Una cosa si osservi, ed è, che alle volte una quantità comparirà sotto forma di frazione, quando per altro in realtà si potrebbe fare la divisione del numeratore pel denominatore, nè altro v'è, che osti a questa divisione, se non la varietà de' segni. Quando pertanto ciò succeda vi si potrà rimediare con cambiare i segni al numeratore, e al denominatore, nel caso però, in cui il numeratore abbia un fattore, mentre allora mutato il segno a questo fattore, restano mutati tutti i segni del numeratore, lo che fatto, siccome si renderà la quantità, che è in numeratore affetta dagli stessi segni, de'quali è affetta quella, che è in denominatore, si potrà perciò farne l'attuale divisione: Che poi si possano mutare i segni nel modo detto costa dal num. 81. Per Esempio essendo proposta la frazione $\frac{ad \times \overline{e-m}}{\overline{-e+m}}$, in cui l'attuale disposizione de'segni non permette di dividere il numeratore pel denominatore, se si muteranno i segni al numeratore, e al denominatore, si avrà $ad \times \overline{e-m} = -ad \times \overline{e-m}$ nel qual modo si può fare l'attuale divisione, e però sarà $ad \times \overline{e-m} = -ad \times \overline{e-m} = -ad$. Non si trascuri questa osservazione, poichè in molti casi può essere di grande vantaggio, servendo ad abbreviare i calcoli.

## ARTICOLO XI.

*Modo di inalzare una quantità algebraica complessa a qualsivoglia potestà tanto determinata, come indeterminata: Della formola Newtoniana, e della maniera di servirsene.*

237. PRob. Si debba elevare una data quantità complessa ad una qualunque potestà.

238. Risol. Si moltiplichi giusta la regola della moltiplicazione data al num. 194. la proposta quantità complessa tante volte in se stessa una meno, quante unità contiene l'esponente della cercata potestà.

239. Per indagare i metodi di abbreviare questa operazione inalzerò a varie potestà un dato binomio, per esempio $b+a$, onde esaminando la legge con cui procedono i termini di queste potenze se ne possa dedurre un Canone ecumenico per la facile, e spedita formazione di qualsivoglia potenza. Dovendosi pertanto inalzare al quadrato il binomio $b+a$ si farà

Qua-

$$\begin{array}{l} b+a \\ b+a \\ \hline \text{Quadrato} \left\{ \begin{array}{l} b^2+ab+a^2 \\ \quad +ab \end{array} \right. \end{array}$$

cioè $b^2+2ab+a^2$.

240. Si debba elevare al cubo il binomio $b+a$: Poichè per formarne il cubo gli deveſi moltiplicare due volte in ſe ſteſſo, e dall' averlo moltiplicato una volta in ſe ſteſſo n' è venuto $b^2+ab+ab+a^2$, ſe queſto quadrato ſi moltiplicherà per $b+a$, ſi avrà

$$\begin{array}{l} b^2+ab+ab+a^2 \\ \quad b+a \\ \hline \text{Cubo} \left\{ \begin{array}{l} b^3+ab^2+a^2b+a^3 \\ \quad +ab^2+a^2b \\ \quad +ab^2+a^2b \end{array} \right. \end{array}$$

cioè $b^3+3ab^2+3a^2b+a^3$

241. Si debba elevare al quadrato-quadrato il binomio $b+a$. Si moltiplichi il ritrovato cubo $b^3+ab^2+ab^2+ab^2+a^2b+a^2b+a^2b+a^3$ per $b+a$, e ſi avrà

$$\begin{array}{l} b^3+ab^2+ab^2+ab^2+a^2b+a^2b+a^2b+a^3 \\ \quad b+a \\ \hline \text{Quarta poteſtà} \left\{ \begin{array}{l} b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4 \\ \quad +ab^3+a^2b^2+a^3b \\ \quad +ab^3+a^2b^2+a^3b \\ \quad +ab^3+a^2b^2+a^3b \\ \quad\quad +a^2b^2 \\ \quad\quad +a^2b^2 \end{array} \right. \end{array}$$

cioè $b^4+4ab^3+6a^2b^2+4a^3b+a^4$

242. Si debba elevare alla quinta poteſtà il binomio $b+a$. Si moltiplichi per $b+a$ la ritrovata quarta poteſtà $b^4+ab^3+ab^3+ab^3+ab^3+a^2b^2+a^2b^2+a^2b^2+a^2b^2+a^2b^2+a^2b^2+a^3b+a^3b+a^3b+a^3b+a^4$, e ſi avrà

$b^5+$

$b^6+ab^5+a^2b^4+a^3b^3+a^4b^2+a^5b+a^6$
$b+a$

Quinta potestà
$b^5+ab^4+a^2b^3+a^3b^2+a^4b+a^5$
$+ab^4+a^2b^3+a^3b^2+a^4b+$
$+ab^4+a^2b^3+a^3b^2+a^4b+$
$+ab^4+a^2b^3+a^3b^2+a^4b+$
$+ab^4+a^2b^3+a^3b^2+a^4b+$
$+a^2b^3+a^3b^2+$
$+a^2b^3+a^3b^2+$
$+a^2b^3+a^3b^2+$
$+a^2b^3+a^3b^2+$
$+a^2b^3+a^3b^2+$ . .

cioè $b^5+5ab^4+10a^2b^3+10a^3b^2+5a^4b+a^5$.

243. Le cinque prime potestà pertanto del binomio $b+a$ sono

I. $b+a$
II. $b^2+2ab+a^2$
III. $b^3+3ab^2+3a^2b+a^3$
IV. $b^4+4ab^3+6a^2b^2+4a^3b+a^4$
V. $b^5+5ab^4+10a^2b^3+10a^3b^2+5a^4b+a^5$

e queste bastano per determinare la legge costante, con cui in ciascuna potestà procedono i termini del binomio; mentre della legge con cui procedono i loro coefficienti numerici tratteremo fra poco.

244. Ora per poco, che si osservino queste potestà, si scorgerà, che il primo termine di ciascuna è la prima parte del binomio elevata alla potestà cercata; il secondo termine risulta dal moltiplicarsi la seconda parte del binomio nella prima elevata ad una potestà, il di cui esponente è minore di una unità del precedente; nel terzo termine cresce di una unità l'esponente della seconda parte del binomio, e decresce di una unità l'esponente della prima parte ( se però lo permette il grado della potestà ); e così nei susseguenti termini va continuamente crescendo di una unità l'esponente della seconda parte del binomio, e calando all'opposto di una unità l'esponente della prima parte; e finalmente nell'ultimo termine ritrovasi la sola seconda parte del binomio elevata alla potestà proposta: Da ciò pertanto se ne deduce il seguente canone.

245. Dato un binomio da inalzarsi ad una potestà proposta, si ritroveranno tutti i termini di questa potestà così. Colla prima parte del binomio si formino tutte le potesta cominciando dalla cercata, e discendendo fino alla potestà zero, che ( pel num. 98. ) è l'unità, per le potestà inferiori; poscia colla seconda parte si facciano tutte le potestà, cominciando dall'unità fino alla proposta, e disposti con ordine questi termini sotto gli altri si moltiplichino fra loro i corrispondenti termini, e questi prodotti daranno tutti i termini della potestà cercata: Come volendosi i termini della terza potestà di $c+d$ si farà

$c^3$

$$\begin{array}{llll} c^3 & c^2 & c & 1 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{array}$$

Termini cercati. $c^3 \quad c^2d \quad cd^2 \quad d^3$

Che se si fossero cercati i termini della settima potestà di $c+d$, si sarebbe fatto

$$\begin{array}{llllllll} c^7 & c^6 & c^5 & c^4 & c^3 & c^2 & c & 1 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 & d^5 & d^6 & d^7 \end{array}$$

Termini cercati. $c^7 \quad c^6d \quad c^5d^2 \quad c^4d^3 \quad c^3d^4 \quad c^2d^5 \quad cd^6 \quad d^7$

246. Da ciò si vede, che tanti sono i termini di qualsivoglia potestà di radice binomia, quante unità contiene il di lei esponente accresciuto di una unità.

247. Restano ora da determinarsi i coefficienti numerici, che convengono a ciascuno di questi termini, e per ciò fare si osservi in primo luogo, che in qualsivoglia potestà tanto la prima come la seconda parte del binomio, a motivo della replicata moltiplicazione di tale binomio in se stesso, si prende tante volte, quante unità contiene l'esponente di tale potestà: In secondo luogo si considerino nelle formole esposte ai num. 239, 240, 241, 242 i coefficienti letterali risultanti dalla seconda parte del binomio, da cui sono affette le decrescenti potestà della prima parte, che formano i termini della potestà proposta, e si vedrà, che nel secondo termine questo coefficiente non è altro, che la seconda parte del binomio presa tante volte, quante unità contiene l'esponente della potestà; nel terzo termine questo coefficiente non è altro, che il numero di tutti gli ambi, i quali possono risultare dalla seconda parte del binomio presa tante volte, quante unità contiene lo stesso esponente; il coefficiente del quarto termine ne è il numero de' terni; così egli è il numero delle quaderne il coefficiente del quinto termine ec.; il coefficiente poi del primo, e dell'ultimo termine è l'unità. Per lo che il ritrovare i coefficienti di ciascun termine di una cercata potestà non è altro, che ritrovare i numeri delle combinazioni secondo ciascun esponente, cominciando dall'unità fino all'esponente della potestà, che può ricevere un numero di cose eguale all'esponente della stessa potestà. Ma questo problema si scioglie, giusta il num. 1355. del Tomo I., in questo modo: Si facciano due progressioni Aritmetiche naturali, la prima delle quali incominci dall'esponente della potestà cercata, e discenda fino all'unità, la seconda poi incominci dall'unità, e ascenda fino all'esponente della stessa potestà: Fatto ciò si prenda il primo termine della prima progressione per numeratore, e il primo termine dell'altra progressione per denominatore della frazione, che deve fare le veci del coefficiente del secondo termine, o sia si divida il primo termine della prima progressione pel primo termine della seconda, e il quoziente sarà il coefficiente del secondo termine: Di poi si divida il prodotto del primo termine nel secondo della prima progressione pel prodotto del primo termine nel secondo della seconda, e il quoziente darà il coefficiente del terzo termine: Si passi indi a dividere il prodotto de' tre primi termini della prima progressione pel prodotto de' tre primi termini della seconda, e il quoziente sarà il coefficiente del quarto termine; e collo stesso metodo si continui finchè siansi ritrovati tutti i necessarj coefficienti. Si debbano per esempio ritrovare i coefficienti numerici della settima potestà Si ordinino nel seguente modo le due progressioni

7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

per lo che ſarà

$\frac{7}{1} = 7$. Coefficiente del ſecondo termine della ſettima poteſtà.

$\frac{7 \times 6}{1 \times 2} = \frac{42}{2} = 21$. Coefficiente del terzo termine.

$\frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = \frac{210}{6} = 35$. Coefficiente del quarto termine.

$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{840}{24} = 35$. Coefficiente del quinto termine.

$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{2520}{120} = 21$. Coefficiente del ſeſto termine.

$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{5040}{720} = 7$. Coefficiente del ſettimo termine.

Se pertanto ſi daranno queſti ritrovati coefficienti numerici ai termini della ſettima poteſtà trovata al num. 545, ella ſarà

$$c^7 + 7c^6d + 21c^5d^2 + 35c^4d^3 + 35c^3d^4 + 21c^2d^5 + 7cd^6 + d^7$$

248. Ed ecco con che facilità, e ſpeditezza ſi poſſa inalzare un dato binomio ad una qualunque poteſtà.

249. Se il binomio ſarà poſitivo, tutti i termini della poteſtà, qualunque ella ſia, ſaranno poſitivi; ma ſe la ſeconda parte del binomio ſarà negativa, come ſe il binomio foſſe $a-b$, ſaranno negativi tutti quei termini, in cui la parte $-b$ è elevata a poteſtà impari, cioè a dire ha per eſponente i numeri 1, 3, 5, 7, 9 ec. Per lo che la ſettima poteſtà di $a-b$ ſarà

$$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

250. Alle volte può accadere, che l'una, o l'altra, o tutte due le parti del binomio abbiano coefficienti, nel qual caſo ſi operi così: Si inalzi alla poteſtà cercata il puro binomio traſcurando per ora i coefficienti; poſcia ſi inalzi il coefficiente, o ciaſcuno de' coefficienti (ſe ambedue le parti del binomio ſono affette da coefficiente) alle corriſpondenti poteſtà, a cui in ciaſcun termine ſi trova elevata quella parte, alla quale ſerviva di coefficiente, indi per ultimo ſi moltiplichino queſte poteſtà nei coefficienti dei detti termini. Si debba per Eſempio inalzare alla quarta poteſtà il binomio $2a+3b$. Si inalzi primieramente nel modo detto alla poteſtà cercata il binomio $a+b$, e ſi avrà

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

indi ſi inalzi ciaſcuno de' coefficienti 2, 3 alle corriſpondenti poteſtà, che in ciaſcun ter-

termine ottiene la quantità, cui era prefisso, e acciocchè più chiaramente si scorga l'operazione ve le noterò sotto

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Potestà del coefficiente 2. | 16. | 8. | 4. | 2. | |
| Potestà del coefficiente 3. | | 3. | 9. | 27. | 81. |

Ora se ne faccia la moltiplicazione così

$$16a^4+4\times 8\times 3a^3b+6\times 4\times 9a^2b^2+4\times 2\times 27ab^3+81b^4$$

cioè $16a^4 + 96a^3b + 216a^2b^2 + 216ab^3 + 81b^4$

251. Qualora non si voglia fare l'attuale operazione, ella si indicherà con tirare una linea sopra la quantità proposta, alla di cui estremità devesi notare l'esponente della potestà cercata: Per lo che la terza potestà di $ab-sd$ si indicherà così $\overline{ab-sd}^{3}$. La quinta potestà di $am+2c-7en$ così $\overline{am+2c-7en}^{5}$.

252 Che se l'esponente della potestà cercata sarà una quantità indeterminata, come $m$, il modo di ritrovare tutti i tetmini di tale potestà non sarà punto differente da quanto si è detto al num. 245. Si debba per esempio elevare alla potestà $m$ il binomio $a+b$, la quale potestà si esprime così $\overline{a+b}^{m}$. Si formino le due serie di tutte le potestà delle parti del binomio dato in questo modo

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^m$, | $a^{m-1}$, | $a^{m-2}$, | $a^{m-3}$, | $a^{m-4}$, | $a^{m-5}$, | $a^{m-6}$, | $a^{m-7}$, | ec. |
| 1, | $b$, | $b^2$, | $b^3$, | $b^4$, | $b^5$, | $b^6$, | $b^7$, | ec. |

Term. cerc. $a^m$, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, $a^{m-5}b^5$, $a^{m-6}b^6$, $a^{m-7}b^7$, ec.

253. Questa formola generale ha una spezie d'infinità, in quanto che dovendo servire per tutte le potestà deve ella andare all'infinito: Ciò non pertanto qualora si determina l'esponente $m$ per applicarla ai casi particolari, il numero de' termini si rende finito, mentre determinato tale esponente è d'uopo arrivare finalmente a qualche termine, il cui esponente diventi zero, lo che seguendo, ivi si interrompe la serie de' termini, ponendo fine ai termini della potestà cercata: Sia per esempio $m=3$: In questo caso la formola generale trovata finirà nel termine $a^{m-3}b^3$, il quale mediante la sostituzione del valore di $m$ sarà $a^{3-3}b^3=a^0b^3=b^3$, perchè $a^0=1$. (pel num. 98.), e conseguentemente i termini cercati saranno $a^3$, $a^{3-1}b$, $a^{3-2}b^2$, $a^{3-3}b^3$, cioè $a^3$, $a^2b$, $ab^2$, $b^3$.

254. Il metodo dato al num. 247. per trovare i coefficienti numerici da prefiggere ai termini delle potestà serve ancora per trovare questi coefficienti nel caso, che debbano essere indeterminati, nel qual caso coll'esponente indererminato $m$ della potestà si dovrà formare la prima progressione aritmetica, e però le due progressioni, mediante le quali hansi a ritrovare i ricercati coefficienti indetetminati saranno

$$\begin{matrix} m. & m-1. & m-2. & m-3. & m-4 & m-5. & m-6 \\ 1. & 2. & 3. & 4 & 5. & 6. & 7 \end{matrix} \Big\} \text{ ec.}$$

per lo che si avranno i coefficienti indeterminati per ciascun termine in questo modo

$\frac{m}{1}$ Coefficiente del secondo termine

$\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2}$ Coefficiente del terzo termine

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3}$ Coefficiente del quarto termine

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ Coefficiente del quinto termine

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ Coefficiente del sesto termine ec.

255. Nella stessa maniera poi, che col determinarsi l'esponente $m$ si interrompe la serie de' termini nella formola generale (giusta il num. 253.), e ne risulta una moltitudine finita di termini corrispondentemente al grado della potestà cercata; così determinato lo stesso esponente resterà determinato il numero de' coefficienti, che ai termini della proposta potestà convengono, e ognun di loro verrà con numeri espresso: Come supponendosi $m = 4$, sara $m - 4 = 0$, e però sarà zero quel coefficiente, in cui entra l'espressione $m - 4$, mentre qualunque quantità moltiplicata per zero rende zero, conseguentemente resteranno determinati solamente tre coefficienti per la potestà, il di cui esponente è 4, non considerando per coefficiente l'unità, che affetta l'ultimo termine della potenza.

256. Se pertanto a ciascuno de' termini generali ritrovati al num. 252. si darà il suo corrispondente coefficiente pur ora trovato, si avrà la seguente formola generale, che rappresenterà qualsivoglia potestà di un binomio.

For-

Formola generale per la elevazione di un binomio a qualſivoglia poteſtà.

$a^m$ Primo termine

$+\frac{m}{1}a^{m-1}b$ Secondo termine

$+\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2}a^{m-2}b^2$ Terzo termine

$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3}a^{m-3}b^3$ Quarto termine

$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}a^{m-4}b^4$ Quinto termine

$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}a^{m-5}b^5$ Seſto termine ec.

257. Da queſta formola generale ne ha dedotta il Newton un'altra più riſtretta, di cui al biſogno uſar ſe ne poſſa per inalzare una quantità data a qualſivoglia poteſtà. E primieramente ( pel num. 101. ) eſſendo $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$; $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$; $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$ ec., la precedente formola generale ſi ridurrà a queſt' altra

$a^m$ Primo termine

$+\frac{m}{1}\frac{a^m b}{a}$ Secondo termine

$+\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2}\frac{a^m b^2}{a^2}$ Terzo termine

$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3}\frac{a^m b^3}{a^3}$ Quarto termine

$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\frac{a^m b^4}{a^4}$ Quinto termine

$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}\frac{a^m b^5}{a^5}$ Seſto termine ec.

258.

258. Che ſe ſi farà la prima parte del binomio eguale a P, cioè $a = P$, ed eguale a Q il Quoziente, che naſce dividendo la ſeconda parte $b$ del binomio per la prima $a$, cioè $\frac{b}{a} = Q$, ſarà $a^m = P^m$; $\frac{b}{a} = Q$; $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$; $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$; $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$ ec., e però ſoſtituendo queſti valori in queſt' ultima precedente formola, ſi avrà la ſeguente anche più riſtretta

$P^m$ Primo termine

$+ \frac{m}{1} P^m Q$ Secondo termine

$+ \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} P^m Q^2$ Terzo termine

$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} P^m Q^3$ Quarto termine

$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} P^m Q^4$ Quinto termine

$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} P^m Q^5$ Sesto termine ec.

259. Finalmente per reſtringere ancora queſta formola ſi oſſervi, che eſſendo $P^m$ il primo termine, e $\frac{m}{1} P^m Q$ il ſecondo, ſtarà il primo al ſecondo, come 1 ad $\frac{m}{1} Q$, per lo che chiamandoſi A il primo termine, ſarà $\frac{m}{1} A Q$ il ſecondo. Similmente ſtando il ſecondo termine $\frac{m}{1} P^m Q$ al terzo $\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} P^m Q^2$, come 1 ad $\frac{m-1}{2} Q$, ſe il ſecondo termine ſi chiamerà B, il terzo ſarà $\frac{m-1}{2} B Q$. Parimente ſtando il terzo termine $\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} P^m Q^2$ al quarto $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} P^m Q^3$, come 1 ad $\frac{m-2}{3} Q$, ſe il terzo termine ſi chiamerà C, il quarto ſarà $\frac{m-2}{3} C Q$, e così in ſeguito: Laonde

Eſſen-

Essendo

$P^m = A$, sarà $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} AQ$

$\frac{m}{1} P^m Q = B$, sarà $\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ$

$\frac{m-1}{2} BQ = C$, sarà $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ$

$\frac{m-2}{3} CQ = D$, sarà $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} P^m Q^4 = \frac{m-3}{4} DQ$

$\frac{m-3}{4} DQ = E$, sarà $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} P^m Q^5 = \frac{m-4}{5} EQ$

$\frac{m-4}{5} EQ = F$, sarà $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} P^m Q^6 = \frac{m-5}{6} FQ$

$\frac{m-5}{6} FQ = G$, sarà $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times \overline{m-6}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} P^m Q^7 = \frac{m-5}{7} GQ$ ec.

onde si ha la

Formola generale del Newton

$$P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ \text{ ec.}$$

260. E quì si osservi, che essendosi posto $a = P$, $\frac{b}{a} = Q$, sarà il binomio $a + b = P + PQ$, e $\overline{a+b}^m = \overline{P+PQ}^m$.

261. Ora proporrò alcuni esempj per far vedere il modo di adoperare questa formola in occasione di inalzare un binomio ad una cercata potestà: E primieramente si debba inalzare alla terza potestà il binomio $a+c$. Si scriva nella suddetta formola $a$ in luogo di P, e $\frac{c}{a}$ in luogo di Q, e in luogo di $m$ si scriva 3 esponente della potestà cercata, mediante le quali sostituzioni il primo termine $P^m$ della formola sarà $a^3$; il secondo termine $\frac{m}{1} AQ$ sarà $\frac{3Ac}{a}$; il terzo termine $\frac{m-1}{2} BQ$ sarà $\frac{Bc}{a}$; il quarto termine $\frac{m-2}{3} CQ$ sarà $\frac{1}{3} C \frac{c}{a}$; il quinto termine

ſvaniſce, perchè $m-3=3-3=0$ (ed ecco come col ſoſtituirſi nella formola generale l'eſponente determinato in luogo dell'indeterminato, s'interrompe la ſerie dei termini, e il loro numero d'indefinito, che egli era, ſi fa finito, e determinato relativamente al grado della potestà). Laonde nel propoſto eſempio la formola generale $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ$ ec. ſi muta in queſt' altra $a^3 + \frac{3Ac}{a} + \frac{Bc}{a} + \frac{1}{3}\frac{Cc}{a}$, nella quale reſtano ſolamente da ſoſtituirſi i corriſpondenti valori di A, B, C, acciò ſi abbia il ricercato cubo di $a+c$: Per lo che eſſendo (pel num. 259.) $A = a^3$; $B = \frac{3a^3c}{a} = 3a^2c$; $C = \frac{3a^2c^2}{a} = 3ac^2$, ſe ſi ſoſtituiranno nella poc' anzi ritrovata formola queſti valori in luogo di A, B, C, ſi avrà $a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$, che è il cubo cercato.

262. Egualmente ſi opera ogniqualvolta la quantità data ſia un polinomio, ſe non che le di lui prime parti, ad eſcluſione della ultima ſola, devonſi conſiderare come un termine. Si debba per eſempio elevare alla terza potestà il trinomio $a+b+c$. Si conſiderino le due prime parti $a+b$ come una, per lo che nella formola ſi ſcriverà $a+b$ in luogo di P; $\frac{c}{a+b}$ in luogo di Q; e 3 in vece di $m$, con che la formola $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$ ec. ſi cambierà in queſt' altra $\overline{a+b}^3 + \frac{m}{1}\frac{Ac}{a+b} + \frac{m-1}{2}\frac{Bc}{a+b} + \frac{m-2}{3}\frac{Cc}{a+b}$: e quì termina la formola, perchè il coefficiente $m-3=0$. Ora ſi rimettano in luogo di A, B, C i proprj loro valori; e perchè è $\overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ſarà $\frac{m}{1}\frac{Ac}{a+b} = \frac{3a^2c+9a^2bc+9ab^2c+3b^2c}{a+b}$, e facendo l'attuale diviſione ſi avrà

| Diviſore | Dividendo |
|---|---|
| $a+b$ | $3a^2c+9a^2bc+9ab^2c+3b^2c$ |
| | $3a^2c+3a^2bc$ |
| | $0\ +6a^2bc+9ab^2c+3b^2c$ |
| | $+6a^2bc+6ab^2c$ |
| | $0\ +3ab^2c+3b^2c$ |
| | $+3ab^2c+3b^2c$ |
| | $0\quad 0$ |

Quoziente $3a^2c+6abc+3b^2c = \frac{m}{1}\frac{Ac}{a+b}$

dun-

dunque farà $\frac{m-1}{2}\frac{Bc}{a+b}=\frac{3a^2c^2+6abc^2+3b^2c^2}{a+b}$, e facendo l'attuale divisione, si avrà

| Divisore | Dividendo |
|---|---|
| $a+b$ | $3a^2c^2+6abc^2+3b^2c^2$ |
| | $3a^2c^2+3abc^2$ |
| | $0\quad +3abc^2+3b^2c^2$ |
| | $+3abc^2+3b^2c^2$ |
| | $0\qquad 0$ |

Quoziente $3ac^2+3bc^2=\frac{m-1}{2}\frac{Bc}{a+b}$

E però farà $\frac{m-2}{3}\frac{Cc}{a+b}=\frac{ac^3+bc^3}{a+b}$, e facendo l'attuale divisione si avrà

| Divisore | Dividendo |
|---|---|
| $a+b$ | $ac^3+bc^3$ |
| | $bc^3+bc^3$ |
| | $0\quad 0$ |

Quoziente $c^3$.

Quindi essendo $P^m=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$+\frac{m}{1}\frac{Ac}{a+b}=3a^2c+6abc+3b^2c$

$+\frac{m-1}{2}\frac{Bc}{a+b}=3ac^2+3bc^2$

$+\frac{m-2}{3}\frac{Cc}{a+b}=c^3$

Se si sostituiranno nella formola questi valori si avrà
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$ cubo cercato di $a+b+c$.

263. Siccome poi l'operazione mediante la formola Newtoniana riesce laboriosa a motivo delle divisioni, perciò qualora si debba elevare un polinomio ad una proposta potestà, tornerà più comodo servirsi della formola data al num. 256. Si debba per esempio elevare alla quarta potestà il trinomio $d+b+c$. Si faccia la prima parte del trinomio $d=a$; le altre due parti $b+c=b$, ed $m=4$; onde si avrà $\overline{d+b+c}^4=d^4+4d^3\times\overline{b+c}+6d^2\times\overline{b+c}^2+4d\times\overline{b+c}^3+\overline{b+c}^4$, cioè a dire

$$a^m = d^1$$

$$ma^{m-1}b = 4d^1 \times \overline{b+c}$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2 \times 2} a^{m-2}b^2 = 6d^2 \times \overline{b+c}^2$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} a^{m-3}b^3 = 4d \times \overline{b+c}^3$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{m-4}b^4 = \overline{b+c}^4$$

Ma essendo $\overline{b+c}^2 = b^2+2bc+c^2$

$$\overline{b+c}^3 = b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$\overline{b+c}^4 = b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$$

col sostituire questi valori nella formola, ne verrà $d^4+4d^3b+4d^3c+6d^2b^2+12d^2bc+6d^2c^2+4db^3+12db^2c+12dbc^2+4dc^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$, che è la cercata quarta potestà del dato trinomio $d+b+c$. Sarebbesi avuto lo stesso se si fosse posto $c=a$, $b+d=b$. Mediante questa formola si scorge, che un polinomio elevato a qualsivoglia potenza risulta da tutte le successive potenze inferiori (cominciando dalla potenza proposta fino alla potenza zero) dello stesso polinomio diminuito dell'ultima parte, e queste potenze devono essere rispettivamente moltiplicate nei prodotti, che nascono dal moltiplicarsi le continuamente crescenti potenze dell'ultima parte, cominciando dalla potenza zero fino alla potenza cercata nei coefficienti della stessa potestà cercata, contando per primo, e ultimo coefficiente l'unità. Prenderò gli Esempj dal polinomio $a+b+c+d+e$, di cui darò le potestà fino alla quinta.

Seconda potestà di $a+b+c+d+e$

$$(a+b+c+d)^2 + 2e\times\overline{a+b+c+d} + e^2$$

Terza potestà di $a+b+c+d+e$

$$(a+b+c+d)^3 + 3e\times\overline{a+b+c+d}^2 + 3e^2\times\overline{a+b+c+d} + e^3$$

Quarta potestà di $a+b+c+d+e$

$$(a+b+c+d)^4 + 4e\times\overline{a+b+c+d}^3 + 6e^2\times\overline{a+b+c+d}^2 + 4e^3\times\overline{a+b+c+d} + e^4$$

Quinta potestà di $a+b+c+d+e$

$$(a+b+c+d)^5 + 5e\times\overline{a+b+c+d}^4 + 10e^2\times\overline{a+b+c+d}^3 + 10e^3\times\overline{a+b+c+d}^2 + 5e^4\times\overline{a+b+c+d} + e^5.$$

264. Ma per tornare alla formola Newtoniana ella ſerve egualmente eziandio quando l'eſponente della poteſtà cercata è negativo. Si debba per eſempio elevare $a-c$ alla poteſtà d'eſponente $-2$. Poichè la ſeconda parte del dato binomio è negativa, la formola (pel num. 249.) ſarà $P^m - \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ - \frac{m-2}{3}CQ +$ ec., in cui ſi ſoſtituiſca $a$ in luogo di P; $\frac{c}{a}$ in luogo di Q; e $-2$ in luogo di $m$, con che ella ſi cambierà in queſt'altra $a^{-2} + \frac{2Ac}{a} - \frac{3Bc}{a} + \frac{4Cc}{a} - \frac{5Dc}{a}$ ec. Laonde in vece di A, B, C, D ec. rimettendo i proprj valori coi loro convenienti ſegni, ſi avrà $\frac{1}{a^2} + \frac{2c}{a^3} - \frac{3c^2}{a^4} + \frac{4c^3}{a^5} - \frac{5c^4}{a^5} +$ ec. in infinito. Siccome poi $\overline{a-c}^{-2} = \frac{1}{\overline{a-c}^{2}} = \frac{1}{a^2-2ac+c^2}$, egli è lo ſteſſo l'inalzare $a-c$ alla poteſtà $-2$, che dividere l'unità pel quadrato di $a-c$, o generalmente l'elevare $a-c$ alla poteſtà $-m$ è lo ſteſſo, che dividere l'unità per la poteſtà $m$ di $a-c$: Ma da queſta diviſione naſce una ſerie infinita, e però una ſerie infinita riſulta dall'inalzare una quantità ad una poteſtà negativa, delle quali ſerie parlerò a ſuo luogo.

265. Per inalzare una data frazione ad una cercata poteſtà baſterà inalzare a tale poteſtà tanto il numeratore come il denominatore.

## ARTICOLO XII.

### *Dell'eſtrazione delle Radici.*

266. PRob. 1. Da una data quantità algebraica ſi debba levare la radice quadrata.

267. Riſol. Si ordini primieramente la data quantità ſecondo una lettera a piacere, cominciando dalla maſſima poteſtà di tale lettera, cui devono ſeguire per ordine le altre poteſtà inferiori: Fatto ciò dal primo termine di queſta quantità ſi levi la radice quadrata (giuſta il num. 110.), dopo di che ſi cancelli queſto primo termine, indi pel doppio della ritrovata radice (che ſarà il primo termine della radice cercata) ſi divida la rimanente quantità, e il quoziente ſarà la ſeconda parte della cercata radice: Con queſta ſeconda parte ſi moltiplichi ora il doppio della prima parte più la ſeconda, e queſto prodotto ſi ſottragga dalla reſidua quantità; e ciò, che rimane ſi divida pel doppio del primo termine della finora trovata radice, il di cui quoziente ſarà la terza parte della radice. Con queſta terza parte ſi moltiplichi il doppio delle due prime parti accreſciuto della terza parte, ed il prodotto ſi ſottragga al ſolito, e collo ſteſſo metodo ſi continui l'operazione.

268. La dim. di queſta operazione è la ſteſſa di quella data al num. 787. del Tomo I.

269. Debbaſi per eſempio levare la radice quadrata dalla quantità $a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$, che ſcrivo in A. Dal primo termine ſi levi la radice quadrata, che è $a^2$, quale ſcrivo in B; e cancellato il primo termine $a^4$ noto in D il reſiduo $+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$, il di cui primo termine diviſo per $2a^2$ doppio

della radice trovata $a^2$ lascia di quoziente $+3ab$ seconda parte della radice cercata, che scrivo in B dopo $a^2$. Si moltiplichi poscia $2a^2+3ab$ con questo quoziente $3ab$, e il prodotto $6a^3b+9a^2b^2$ si sottragga dalla quantità posta in D, con che si avrà di residuo $-4a^2b^2-12ab^3+4b^4$, quale scrivo in H. Passo quindi a dividere il primo termine della quantità posta in H pel primo termine di $2a^2+6ab$ doppio della ritrovata radice $a^2+3ab$, e mi viene di quoziente $-2b^2$, che scrivo in B dopo $a^2+3ab$; dopo di che moltiplico $2a^2+6ab-2b^2$ con questo quoziente $-2b^2$, il di cui prodotto si sottrae dalla quantità posta in H, e perchè nulla più rimane, però sarà $a^2+3ab-2b^2$ la radice cercata. Ecco l'operazione.

| | | |
|---|---|---|
| | Quantità proposta | |
| A. | $a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$ | |
| Quantità da sottrarsi | $a^4$ | |
| Primo residuo D. | $0+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$ | |
| Quantità da sottrarsi | $6a^3b+9a^2b^2$ | Primo divisore $2a^2$ |
| Secondo residuo H. | $0\quad -4a^2b^2-12ab^3+4b^4$ | Secondo divisore $2a^2+6ab$ |
| Quantità da sottrarsi | $-4a^2b^2-12ab^3+4b^4$ | |
| Residuo | $0\quad 0\quad 0$ | |

| | |
|---|---|
| Doppio della prima parte della radice accresciuto della seconda | $2a^2+3ab$ |
| Seconda parte della radice | $+3ab$ |
| Seconda quantità da sottrarsi | $6a^3b+9a^2b^2$ |
| Doppio delle due prime parti della radice accresciuto della terza | $2a^2+6ab-2b^2$ |
| Terza parte della radice | $-2b^2$ |
| Terza quantità da sottrarsi | $-4a^2b^2-12ab^3+4b^4$ |

Radice cercata B. $a^2+3ab-2b^2$.

270. Se nel fine dell'operazione avanzerà qualche cosa, sarà segno, che la proposta quantità non è un quadrato perfetto, e in tal caso si esprimerà la cercata radice mediante il vincolo $\surd$ così $\surd\overline{2ab-cm^2+3d}$: Lo che pure sovente per più capi torna comodo in luogo di fare l' attuale estrazione.

271. Prob. 2. Si debba estrarre la radice cuba da una data quantità algebraica.

272. Risol. Si ordini secondo una lettera a piacere la quantità data, poscia dal di lei primo termine si levi la cercata radice cuba ( giusta il num. 110. ), e cancellato tale primo termine si divida il primo termine della quantità residua col triplo del quadrato della radice trovata, e il quoziente sarà la seconda parte della cercata radice. Ora con questa seconda parte si moltiplichi il triplo del quadrato della prima parte, più il triplo della prima parte moltiplicato nella seconda, più il quadrato della seconda parte, e il prodotto si sottragga dalla residua quantità. Fatta la sottra-

zione si divida il primo termine del residuo pel primo termine del triplo del quadrato delle due ritrovate parti radicali, e il quoziente ne sarà la terza parte. Si moltiplichi pertanto con questa terza parte il triplo del quadrato delle prime due parti, più il triplo delle due prime parti moltiplicate nella terza, più il quadrato della terza, e il prodotto si sottragga al solito, continuando poscia collo stesso metodo l'operazione.

273. La dim. è la stessa di quella data al num. 826. del Tomo I.

274. Debbasi per esempio levare la radice cuba dalla quantità $27a^3-54a^2c+36ac^2-8c^3-54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$, che scrivo in A. Si levi la radice cuba dal primo termine $27a^3$, che è $3a$, quale scrivo in B; quindi cancellando il termine $27a^3$, noto il residuo in D, di cui divido il primo termine pel triplo del quadrato della ritrovata radice $3a$, cioè per $27a^2$, e mi viene di quoziente $-2c$, che scrivo in B dopo $3a$. Fatto ciò moltiplico con questo quoziente, o sia con questa seconda parte radicale il triplo del quadrato della prima parte, più il triplo della prima moltiplicato nella seconda, più il quadrato della seconda, e ne sottraggo il prodotto $-54a^2c+36ac^2-8c^3$ dalla quantità posta in D, con che mi viene di residuo $-54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$, che scrivo in H. Poscia divido il primo termine di questa quantità posta in H pel primo termine del triplo del quadrato delle due ritrovate parti radicali $3a-2c$, che è $27a^2-36ac+12c^2$, e ne scrivo il quoziente $-2d$ in B dopo $3a-2c$. Finalmente moltiplico con questa terza parte radicale $-2d$ il triplo del quadrato delle due prime parti radicali, più il triplo delle due prime parti radicali moltiplicato nella terza, più il quadrato della terza, e mi viene di prodotto $-54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$, dalla di cui sottrazione dalla quantità posta in H nulla rimane, e però sarà $3a-2c-2d$ la radice cuba cercata. Ecco l'operazione.

Quantità proposta.

A $27a^3-54a^2c+36ac^2-8c^3-54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$

Quant. da sott. $27a^2$

Prim. resid. D $0\ -54a^2c+36ac^2-8c^3-54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$

Quant. da sott. $-54a^2c+36ac^2-8c^3$

Sec. resid. H $0\quad 0\quad 0\ -54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$

Quant. da sott. $-54a^2d+72acd-24c^2d+36ad^2-24cd^2-8d^3$

Residuo $0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0$

Primo divisore $27a^2$ Secondo divisore $27a^2-36ac+12c^2$

Triplo del quadrato della prima parte radicale, più il triplo della prima moltiplicato nella seconda, più il quadrato della seconda $27a^2-18ac+4c^2$

Seconda parte $-2c$

Seconda quantità da sottrarsi $-54a^2c+36ac^2-8c^3$

Tri-

Triplo del quadrato delle due prime figure radicali, più il triplo delle due prime moltipl. nella terza, più il quad. della terza $27a^2 - 36ac + 12c^2 - 18ad + 12cd + 4d^2$

Terza parte $-2d$

Terza quantità da sottrarsi — $54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$

Radice cercata
B. $3a - 2c - 2d$

275. Se nel fine dell'operazione avanzerà qualche cosa, sarà segno, che la data quantità non è un cubo perfetto, nel qual caso si farà uso del vincolo $\surd$ così $\sqrt[3]{a^2+2ab-cm}$, e ciò praticasi anche sovente con risparmiare l' attuale operazione.

276. Per quello spetta all' estrazione delle radici dalle potestà superiori, dopo essersi levata la cercata radice dal primo termine della quantità proposta, niente altro rimane, che ritrovare i divisori, e le quantità da sottrarsi. Ora però darò le formole degli uni, e dell'altre fino alla sesta potestà. Suppongo pertanto, che A rappresenti i termini già trovati della radice, cioè o uno, o due, o tre ec. secondo il progresso dell' operazione, e che B rappresenti il termine radicale ultimamente trovato mediante la divisione. La formola dei divisori sarà

| | |
|---|---|
| Per la quarta potestà | $4A^3$ |
| Per la quinta potestà | $5A^4$ |
| Per la sesta potestà | $6A^5$ |

La formola delle quantità da sottrarsi sarà

| | |
|---|---|
| Per la quarta potestà | $4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ |
| Per la quinta potestà | $5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$ |
| Per la sesta potestà | $6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6$ |

Siccome poi queste formole niente altro sono, che i termini, a riserva del primo, delle potestà di un binomio, quindi è facile avere le altre inservienti alla determinazione dei divisori, e delle quantità da sottrarsi nell' estrazione delle seguenti superiori radici.

277. Per estrarre una qualunque radice da una frazione basta levarla tanto dal numeratore, come dal denominatore. Il più delle volte però per conoscere se da una data frazione si possa levare una cercata radice, fa di mestieri ridurla a minimi termini giusta il num. 223. Se non si può levare la cercata radice nè dal numeratore, nè dal denominatore, si metta tutta la frazione sotto al vincolo così $\surd\frac{ab-c^2}{cm+d}$. Che se ella si potrà levare da uno dei due, ciò si faccia, e all'altro si prefigga il vin-

vincolo: Come dovendoſi levare la radice cuba da $\frac{dc+m^2}{a\ b}$, ſi farà $\sqrt[3]{\frac{dc+m^2}{ab}}$: Così dovendoſi levare la radice quadrata da $\frac{a^2+2ab+b^2}{cm-a}$ ſi farà $\frac{a+b}{\sqrt{cm-a}}$.

278. La formola Newtoniana data al num. 259., di cui ſi è fatto uſo per inalzare una qualunque quantità algebraica a qualſivoglia poteſtà, ſerve egualmente per eſtrarre da una quantità propoſta una qualunque cercata radice, niente altro richiedendoſi a ciò fare, ſe non ſe, dopo di avere fatto le convenienti ſoſtituzioni in luogo di P, e di Q, mettere in vece di $m$ l'eſponente fratto della radice cercata. Comunemente però ella ſi adopera per quelle quantità, che non ſono poteſtà perfette, di cui perciò avere non ſi può la giuſta radice, ma ſoltanto una radice, che alla vera infinitamente ſi accoſti. Ed ecco come.

279. Si debba levare la radice quadrata da $a^2-b^2$. Si faccia $P=a^2$; $Q=-\frac{b^2}{a^2}$; $m=\frac{1}{2}$ eſponente della cercata radice: Per lo che ſi avrà

$$P^m = P^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A.$$

$$\frac{m}{1} AQ = \frac{1}{2} a \times -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{b^2}{2a} = B.$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \frac{-b^2 \times -b^2}{2a \times a^2} = \frac{1-2 \times b^4}{4 \times 2a^3} = \frac{-b^4}{8a^3} = C.$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \times \frac{-b^4 \times -b^2}{8a^3 \times a^2} = \frac{1-4 \times b^6}{6 \times 8a^5} = \frac{-3 \times b^6}{6 \times 8a^5} = \frac{-b^6}{16a^5} = D.$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4} \times \frac{-b^6 \times -b^2}{16a^5 \times a^2} = \frac{1-3 \times b^8}{8 \times 16a^7} = \frac{-5b^8}{128a^7} = E.$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \times \frac{-5b^8 \times -b^2}{128a^7 \times a^2} = \frac{1-8 \times 5b^{10}}{10 \times 128a^9} = \frac{-7b^{10}}{256a^9} \text{ ec. in infinito}$$

E però trovaſi eſſere $\sqrt{a^2-b^2} = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9}$ ec. in infinito.

280. Coll'eſtrarre pertanto una qualſivoglia radice da una quantità, che non ſia poteſta perfetta, naſce una ſerie infinita, delle quali ſerie parleremo a ſuo luogo.

281. In vece di ſervirſi della formola $\overline{P+PQ}^{m}$ ſi può far uſo della formola $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m+n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ$ ec.: Come volendo levare la radice quadrata da $a^2+b^2$, ſi ponga $P=a^2$; $Q=\frac{b^2}{a^2}$; $m=1$, $n=2$, con che ſi avrà

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A.$$
$$\frac{m}{n}AQ = \frac{b^2}{2a} = B.$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{b^4}{8a^3} = C. \text{ ec.}$$

Nel qual modo ſi avrà $\sqrt{a^2+b} = \overline{a^2+b^2}^{\frac{1}{2}} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5a^8}{128a^7}$ + ec.

## ARTICOLO XIII.

*Del calcolo delle quantità radicali, e immaginarie.*

282. IL modo di ridurre le quantità radicali compleſſe alla più ſemplice eſpreſſione non è punto differente da quanto ho detto al num. 134. Come dovendoſi ridurre alla più ſemplice eſpreſſione la quantità radicale $\sqrt{a^2b-a^2c} = \sqrt{a^2} \times \overline{b-c}$ ſi farà $a\sqrt{b-c}$: Così per ridurre alla più ſemplice eſpreſſione la quantità radicale $\sqrt{a^3+3a^2b+3b^2a+b^3} = \sqrt{a^2+2ab+b^2} \times \overline{a+b}$, ſi farà $\overline{a+b}\sqrt{a+b}$. Iſteſſamente per ridurre alla più ſemplice eſpreſſione la quantità radicale $\sqrt[n]{a^nb^nc+a^nb^nd} = \sqrt[n]{a^nb^n} \times \overline{c+d}$, ſi farà $ab\sqrt[n]{c+d}$. Per la ſteſſa ragione ſarà $\sqrt{ab-ac} = \sqrt{a} \times \sqrt{b-c} = a^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-c}$, ed $ab^2\sqrt{cb+db^3} = ab^{2+\frac{1}{2}}\sqrt{c+db^2}$.

283. *Vice verſa* ſi opererà per ridurre una quantità razionale ſotto al vincolo.

284. Quì pure ha luogo la regola data al num. 132. per ridurre due, o più quantità radicali allo ſteſſo eſponente, o ſia alla ſteſſa denominazione: Come dovendoſi ridurre allo ſteſſo denominatore i due radicali $\sqrt[3]{ab+c}$, $\sqrt{\overline{m-c}^3}$, ſi farà $\sqrt[2\times3]{\overline{ab+c}^2} = \sqrt[6]{\overline{ab+c}^2}$, e $\sqrt[2\times3]{\overline{m-c}^3} = \sqrt[6]{\overline{m-c}^3}$. Iſteſſamente per ridurre allo ſteſ-

ſteſſo denominatore i due radicali $\sqrt[m]{a+c^s}$, $\sqrt[n]{ac+d^t}$, ſi farà $\sqrt[mn]{a+c^{sn}}$, $\sqrt[mn]{ac+d^{mt}}$.

285. Se i radicali da ridurſi ſaranno più di due, dopo di avere ridotti i due primi, ſi dovranno eſſi ridurre col terzo nel modo ſteſſo, che ſi riducono più frazioni alla ſteſſa denominazione.

286. Che ſe di due radicali propoſti da ridurſi allo ſteſſo denominatore uno avrà l'eſponente, che ſia diviſore eſatto dell'eſponente dell'altro, in tal caſo baſterà conſiderare queſt' altro, come il quoziente, che naſce dall'attuale diviſione: Come dovendoſi ridurre allo ſteſſo denominatore i due radicali $\sqrt{a-e}$, $\sqrt[8]{cd+me^3}$, baſterà conſiderare l' eſponente del ſecondo radicale come 4, che naſce dal dividerſi l' eſponente 8. per l'eſponente 2, e però i due radicali da ridurſi ſaranno $\sqrt{a-e}$, $\sqrt[4]{cd+me^{\frac{3}{2}}}$, che ridotti ſono $\sqrt[8]{a-e^4}$, $\sqrt[8]{cd+me^3}$.

287. Dovendoſi ſommare inſieme più quantità radicali ſi ſcrivano una dopo l' altra coi propri ſegni; e dovendo ſottrarne alcune da altre ſi ſcrivano pure una dopo l'altra, avvertendo però di cambiare nelle quantità da ſottrarſi il ſegno prefiſſo al vincolo; nell' uno, e nell'altro caſo poi ſe le quantità radicali ſono comunicanti, cioè ſe ſotto al vincolo v' è la ſteſſa quantità, ſi facciano le convenienti riduzioni mediante la ſomma, o la ſottrazione de' coefficienti. Ecco l' eſempio

Quantità da ſommarſi $2d\sqrt{a^2b}-m+\sqrt[5]{ac^3+de}$
$-5d\sqrt{a^2b}+am-3\sqrt[5]{ac^3+de}+\sqrt{bc}$

Somma $2d\sqrt{a^2b}-m+\sqrt[5]{ac^3+de}-5d\sqrt{a^2b}+am-3\sqrt[5]{ac^3+de}+\sqrt{bc}=-m-3d\sqrt{a^2b}+am-2\sqrt[5]{ac^3+de}+\sqrt{bc}$.

288. Quanto alla ſottrazione dovendoſi ſottrarre $-\sqrt[3]{bc^2}+ab+\sqrt{a^2m-ad}$ da $2\sqrt[7]{ae+ef}+2ab+\sqrt{a^2m-ad}$, ſi farà

$2\sqrt[7]{ae+ef}+2ab+\sqrt{a^2m-ad}$
$-\sqrt[3]{bc^2}+ab+\sqrt{a^2m-ad}$

Reſiduo $2\sqrt[7]{ae+ef}+2ab+\sqrt{a^2m-ad}+\sqrt[3]{bc^2}-ab-\sqrt{a^2m-ad}=2\sqrt[3]{ae+ef}+ab+\sqrt[3]{bc^2}$.

289. Nella moltiplicazione delle quantità radicali ſi regola egualmente come ſe foſſero quantità razionali, ſe non che le quantità radicali da moltiplicarſi devono eſſere della ſteſſa denominazione. Ecco l' eſempio

Moltiplicando $5\sqrt{em-d^2}+2be-\sqrt{ac^3}$

Moltiplicatore $2\sqrt{ae^3}+3\sqrt{bd}-am^2$

Prodotto $10\sqrt{ac^4m-ac^3d^2}+4be\sqrt{ac^3}-2ac^3+15\sqrt{bcdm-bd^3}$
$+6be\sqrt{bd}-3\sqrt{abc^3d}-5am^2\sqrt{cm-d^2}-2abem^2+am^2\sqrt{ac^3}$.

290. Ifteſſamente nella diviſione delle quantità radicali ha luogo la regola della diviſione delle quantità razionali. Ecco l' eſempio

Diviſore $\sqrt{e^3f}-2\sqrt{ad}$ | Dividendo $3b\sqrt{e^3f}+\sqrt{cd^3e^3f}-\sqrt{ae^3fm}-6b\sqrt{ad}-2\sqrt{acd^4}+2\sqrt{a^2dm}$

Quant. da ſottrarſi $3b\sqrt{e^3f}-6b\sqrt{ad}$

Reſiduo primo .. $+\sqrt{cd^3e^3f}-\sqrt{ae^3fm}-2\sqrt{acd^4}+2\sqrt{a^2dm}$

Quant. da ſott. $\sqrt{ed^3e^3f}-2\sqrt{acd^4}$

Reſiduo ſecondo $-\sqrt{ae^3fm}+2\sqrt{a^2dm}$

Quant. da ſott. $-\sqrt{ae^3fm}+2\sqrt{a^2dm}$

Reſiduo ultimo 0 0

Quoziente $3b+\sqrt{cd^3}-\sqrt{am}$

291. Qualora non ſi poſſa fare l' attuale diviſione nel modo detto, deveſi ella indicare collo ſcrivere il diviſore ſotto al dividendo ſeparato da una linea: Come dovendoſi dividere $\sqrt{ca-a^2b^2}+\sqrt{ad}$ per $\sqrt{ab+m^2}$, ſi farà $\frac{\sqrt{ca-ab}+\sqrt{ad}}{\sqrt{ab+m^2}}$.

292. Dovendoſi dividere una quantità razionale per una radicale, o una radicale per una razionale, ſi regoli giuſta il num. 153.

293. Quando o dalla moltiplicazione, o dalla diviſione di quantità radicali riſulta una tale quantità radicale, da cui levare ſi poſſa la radice indicata dall' eſponente del vincolo, ciò ſi faccia.

294.

294. Per elevare le quantità radicali a una cercata potestà devesi operare come se fossero quantità razionali: Così per inalzare al cubo il radicale $\sqrt{ac-m}$ si farà $\sqrt{a-m}^3 = \sqrt{a^3c^3-3a^2c^2m+3acm^2-m^3}$. Istessamente per inalzare al quadrato la quantità radicale $3\sqrt{bd}+5\sqrt{ac}-\sqrt{em}$ si farà

Quantità data $\left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{bd}+5\sqrt{ac}-\sqrt{em} \\ 3\sqrt{bd}+5\sqrt{ac}-\sqrt{em} \end{array}\right.$

Prodotti $\left\{\begin{array}{l} 9bd+15\sqrt{abcd}-3\sqrt{bdem}+25ac-5\sqrt{ac\cdot m}+em \\ \quad +15\sqrt{abcd}-3\sqrt{bdem} \qquad -5\sqrt{acem} \end{array}\right.$

Quadrato cercato $9bd+30\sqrt{abcd}-6\sqrt{bdem}+25ac-10\sqrt{acem}+em$

295. Trattandosi di estrarre una cercata radice da una quantità radicale, si regoli giusta il num. 158 se la quantità proposta è tutta sotto un vincolo; o pure giusta il num. 159 se la quantità proposta è sotto diversi vincoli: Come dovendosi estrarre la radice cuba da $\sqrt[4]{ac-b^3}$ si farà $\sqrt[12]{ac-b^3} = \overline{ac-b^3}^{\frac{1}{12}}$: Istessamente la radice $n$ della quantità $\sqrt[p]{cd+a^2}$ farà $\sqrt[mc]{cd+a^2} = \overline{cd+a^2}^{\frac{p}{mc}}$. La radice $n$ poi di $\sqrt{bd^2}-\sqrt{ac}+\sqrt[3]{ce-d^3}$ farà $\sqrt[n]{\sqrt{bd^2}-\sqrt{ac}+\sqrt[3]{ce-d^3}}$. A suo luogo esporrò la maniera di attualmente estrarre una cercata radice anche da queste quantità radicali.

296. Quanto alle quantità immaginarie si osservi, che non solo ogni radice pari di una quantità negativa è immaginaria, come $\sqrt{-b}$, ma lo è ancora l'aggregato di due quantità, una reale, e l'altra immaginaria, come $c+\sqrt{-b}$. Di fatto fingasi, che $c+\sqrt{-b}$ non sia quantità immaginaria, ma sia una reale eguale per esempio a $d$, sarà $c+\sqrt{-b}=d$ per Ipotesi: Ora perchè col sottrarsi una stessa quantità da quantità eguali i residui sono eguali (pel num. 45 del Tomo I.) se da ciascuna di queste quantità eguali si sottrerrà la quantità $e$, si avrà $c-c+\sqrt{-b}=d-c$, cioè $\sqrt{-b}=d-c$, e però una quantità immaginaria eguale ad una quantità reale, lo che è impossibile. Dunque l'aggregato di due quantità una reale, e l'altra immaginaria, è immaginario.

297. La somma, e la sottrazione delle quantità immaginarie complesse si farà giusta i num. 287, 288, avvertendo di farne la riduzione alla più semplice espressione, qualora sotto al vincolo vi siano quantità istesse. Ecco l'esempio.

Quantità da ſommarſi $\left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{-ac}+m^2-2\sqrt{-de}+\sqrt{-b} \\ -\sqrt{-ac}-a^2b+2\sqrt{-de}+4\sqrt{-b} \end{array}\right.$

Somma $2\sqrt{-ac}+m^2-a^2b+5\sqrt{-b}\sqrt{-b}$

298. Dovendoſi ſottrarre $5\sqrt{-bd}-7a^2c^3-\sqrt{-a^2}$ da $5\sqrt{-bd}+3cd^3-\sqrt{-a^2}$ ſi farà

$$\begin{array}{r} 5\sqrt{-bd}+3cd^3-\sqrt{-a^2} \\ 5\sqrt{-bd}-7a^2c^3-\sqrt{-a^2} \\ \hline 3cd^3+7a^2c^3 \end{array}$$

Reſiduo.

299. Ecco come tanto mediante la ſomma, come mediante la ſottrazione poſſono ſvanire o in parte, o in tutto le quantità immaginarie, reſtando ſole quantità reali.

300. La moltiplicazione, e la diviſione delle quantità immaginarie ſi fa colle ſteſſe regole date per la moltiplicazione, e diviſione delle quantità radicali, ſe non che riſpetto ai ſegni da preſiggerſi ai prodotti, o ai quozienti parziali deveſi regolare giuſta i num. 168, 173. Ecco gli Eſempj

Moltiplicando. $2\sqrt{-c^2}-a-d\sqrt{-b}$

Moltiplicatore. $ab\sqrt{-bd}+d\sqrt{-b}$

Prodotto. $-2ab\sqrt{bc^2d}-a^2b\sqrt{-bd}+abd\sqrt{b^2d}-2d\sqrt{bc^2}$

$-ad\sqrt{-b}+bd^2$, cioè $-2abc\sqrt{bd}-a^2b\sqrt{-bd}+ab^2d\sqrt{d}-2cd\sqrt{b}$

$-ad\sqrt{-b}+bd^2$.

Altro Eſempio

Moltiplicando. $m^2-a^2b-\sqrt{-c}$

Moltiplicatore. $m^2+\sqrt{-c}-a^2b$

Prodotto. $m^4-a^2bm^2-m^2\sqrt{-c}+m^2\sqrt{-c}-a^2b\sqrt{-c}$

$+c-a^2bm^2+a^4b^2+a^2b\sqrt{-c}$, cioe $m^4-2a^2bm^2+c+a^4b^2$.

Eſem-

Eſempio della diviſione

Diviſore $\sqrt{-cd}-3\sqrt{-am}$ | Dividendo $5\sqrt{-bc^2d}-15\sqrt{-abcm}+2\sqrt{-acd}-6\sqrt{-a^2m}$

Quantità da ſottrarſi $5\sqrt{-bc^2d}-15\sqrt{-abcm}$

Reſiduo 0 0 $+2\sqrt{-acd}-6\sqrt{-a^2m}$

Quantità da ſottrarſi $2\sqrt{-acd}-6\sqrt{-a^2m}$

Reſiduo 0 0

Quoziente $5\sqrt{bc}+2\sqrt{a}$

Per fare queſta diviſione comincio a dividere il primo termine del dividendo $5\sqrt{-bc^2d}$, che conſidero così $5\sqrt{-1}\times\sqrt{bc^2d}$ pel primo termine del diviſore $\sqrt{-cd}$, che conſidero così $\sqrt{-1}\times\sqrt{cd}$, dalla quale diviſione ſi ha $5\times1\times\sqrt{bc}=5\sqrt{bc}$; poſcia moltiplico queſto quoziente nel diviſore, e ne ſottraggo il prodotto dal dividendo. Indi collo ſteſſo metodo paſſo a dividere il primo termine del reſiduo pel primo termine del diviſore, e così ſi continua l' operazione fino in ultimo.

301. Siccome dal dividerſi una quantità immaginaria per un'altra ſi ha un quoziente reale (pel num. 174.), così *vice verſa* dal dividerſi una quantità reale per una immaginaria, o una quantità immaginaria per una reale, il quoziente riſulterà immaginario. Ecco l' Eſempio

Diviſore

$\sqrt{-cd}-3\sqrt{-am}+\sqrt{-a^2}$

Dividendo

$-3a\sqrt{cdm^3}+9a\sqrt{am^4}-3a\sqrt{a^2m^3}+2\sqrt{-c^2d}-6\sqrt{-acm}+2\sqrt{-a^2c}+5\sqrt{-abcd}-15\sqrt{a^2bm}+5\sqrt{a^3b}$

$-3a\sqrt{cdm^3}+9a\sqrt{am^4}-3a\sqrt{a^2m^3}$

0 0 0 $+2\sqrt{-c^2d}-6\sqrt{-acm}+2\sqrt{-a^2c}+5\sqrt{-abcd}-15\sqrt{a^2bm}+5\sqrt{a^3b}$

$+2\sqrt{-c^2d}-6\sqrt{-acm}+2\sqrt{-a^2c}$

0 0 0 $+5\sqrt{-abcd}-15\sqrt{a^2bm}+5\sqrt{a^3b}$

$+5\sqrt{-abcd}-15\sqrt{a^2bm}+5\sqrt{a^3b}$

0 0 0

Quoziente $3a\sqrt{-m^3}+2\sqrt{c}-5\sqrt{-ab}$

Per eſeguire queſta diviſione comincio a dividere con $\sqrt{-cd}=\sqrt{-1}\times\sqrt{cd}$ primo termine del diviſore il primo termine del dividendo $-3a\sqrt{cdm^3}$, che conſidero così $-1\times\sqrt{3^2a\sqrt{cdm^3}}$, e mi vie-

viene di quoziente $\sqrt{-1} \times \overline{3a\sqrt{m^3}} = 3a\sqrt{-m^3}$, e questo stesso metodo osservo per fare le altre susseguenti divisioni.

302. Dal secondo esempio della moltiplicazione si scorge, che dato un polinomio, in cui entri una quantità radicale, sia ella reale, o immaginaria, per far sparire questo radicale basterà moltiplicare il dato polinomio in un'altro, che non differisca dal primo, se non nel segno prefisso al vincolo.

303. Si inalzerà a qualsivoglia potestà una proposta quantità immaginaria complessa con moltiplicare tante volte in se stessa la detta quantità, quante unità contiene l'esponente della potestà cercata diminuito di una unità.

304. Che se si dovrà estrarre una cercata radice da una quantità immaginaria complessa, si faccia uso del vincolo universale.

305. Prima di terminare questo Articolo osserverò una cosa, ed è, che molti Teoremi, i quali si dimostrano delle quantità reali, non hanno luogo nelle quantità immaginarie: Per Esempio si dimostra, che la somma de' quadrati di due quantità reali è maggiore del doppio del loro rettangolo, come essendo $a$, $b$ le due quantità, sarà $a^2 + b^2 > 2ab$, poichè di fatto la differenza tra la somma de' quadrati delle quantità date, e il doppio del loro rettangolo, essendo eguale al quadrato della differenza delle medesime quantità, siccome questa differenza è reale, e positiva, così tale sarà ancora il suo quadrato. Ilteslamente se saranno date tre quantità, la somma de' loro quadrati sarà maggiore della somma de' loro ambi: Se le quantità saranno quattro, la somma de' loro quadrati sarà maggiore di due terzi della somma de' loro ambi ec. E questi Teoremi non solo sono veri mentre tutte le date quantità reali sono positive, ma molto più se qualcuna sarà negativa, perchè i loro quadrati saranno sempre positivi (pel num. 57.), laddove fra i loro ambi ve ne saranno alcuni, che essendo affetti dal segno — diminuiranno la somma totale. Ora questi Teoremi non hanno luogo nelle quantità immaginarie, come assai chiaramente s' intende dall' osservare, che tutti questi Teoremi dipendono dal primo, la di cui dimostrazione esige, che il quadrato dell' una, e dell' altra parte sia positivo.

CA-

# CAPO II.

## DELLA MANIERA DI USARE IL CALCOLO ALGEBRAICO NELLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI.

### ARTICOLO I.

*Del modo di esprimere algebraicamente i Problemi; delle equazioni di primo grado, e della loro risoluzione.*

306. Abbiamo veduto ai num. 3, 40, e 55, che l' Algebra mediante le combinazioni, e il calcolo delle quantità rappresentate con segni più universali, che i numeri, quali appunto sono le lettere dell' Alfabeto, serve ad abbreviare, e facilitare le operazioni Aritmetiche: Questo però è il minore vantaggio, che noi riportiamo dall' Algebra. L' uso, che principalmente se ne fa, e a cui è ordinato il metodo generale di calcolare già esposto, ha luogo (lo che ora sono per ispianare) nelle quistioni, o sia ne' Problemi complicati, nella soluzione de' quali entrano certi rapporti, e certe combinazioni, che racchiudono non meno le quantità date, che le cercate. L' Algebra pertanto ci somministra la maniera di fare queste combinazioni senza conoscere le quantità, che si cercano, e di maneggiare con tal arte, e maestria tanto le quantità cognite, come le incognite, così che mediante le cognite si venga a scuoprire i valori di quelle, che erano incognite.

307. Tutto l'artifizio consiste in supporre come cognita la quantità, che si cerca, e denominandola con una lettera dell' Alfabeto paragonarla per tal maniera colle altre quantità cognite denominate parimente con lettere dell' Alfabeto, così che mediante o la somma, o la sottrazione, o la moltiplicazione, o la divisione, o l'estrazione delle radici, si giunga a scuoprire l' eguaglianza, che ha la quantità incognita alle cognite, con che viensi a determinare il ricercato valore dell' incognita. Questo metodo poi di risoluzione, con cui nello sciogliere i Problemi si passa dalle cose cercate alle già date, e cognite, è quello, che propriamente dà all' Algebra il nome d' Analisi: Poichè quantunque si possano chiamare operazioni analitiche la sottrazione, la divisione, e l'estrazione delle radici, risolvendosi per loro mezzo quello che aveva composto l' addizione, la moltiplicazione, e la formazione delle potestà, pure soltanto le accennate operazioni sogliono passare sotto nome d' Analisi, in quanto che la loro composizione essendo più intralciata, la risoluzione n'è perciò più rilevante.

308. Def. 1. Il Problema, come si è detto al num. 59. del Tomo I., è una proposizione, in cui si dimanda di fare, o di sapere alcune cose per mezzo di certe condizioni, o altre cose già date, che chiamansi i dati del problema, siccome le co-

cose, che cercansi, si dicono i quesiti. Queste condizioni esprimono, e somministrano le relazioni, che hanno fra loro le quantità cognite, e le incognite, o sia cercate, le quali relazioni rappresentate algebraicamente vengono a formare quella legge di rapporto, che chiamasi Equazione.

309. Qualora pertanto trattasi di risolvere algebraicamente un Problema più cose devonsi fare: La prima, e principale si è di prendere una chiara, e distinta cognizione di ciò, che è dato, e di ciò, che si cerca, distinguendo cioè i dati dai quesiti, e formando una giusta idea delle condizioni proposte: La seconda è di denominare, ed esprimere con lettere convenienti le differenti quantità, tanto date, che cercate: La terza è di ridurre il Problema in equazione mediante le condizioni proposte: La quarta è la riduzione dell' equazione alla forma più semplice: l'ultima finalmente consiste nella risoluzione di questa equazione, lo che si ottiene con ritrovare l' eguaglianza tra le quantità date, e la cercata, con che viensi a determinarne il valore. Ma affinchè la dottrina riesca più evidente, e palpabile spiegherò coll' Esempio ad una ad una le esposte regole.

310. Prob. 1. Cercasi di quante doppie fosse l' Asse di un Padre, che venuto a morte, dopo avere disposto di 1200 doppie per l' anima sua, lasciò eredi tre suoi figliuoli, due maschi, e una femmina, con questa legge, che al primo maschio dovesse toccare la metà del suo Asse, cinque diciottesimi al secondo, e un quinto alla femmina. Per venire alla cercata soluzione osservo prima di tutto quai siano i dati in questo Problema, e che cosa sia ciò, che si cerca, e veggo, che una sola cosa si cerca, ed è l' intero Asse di questo Padre; i dati poi sono 1200 doppie, più una metà dell' Asse, più un di lui quinto, più cinque diciottesimi. Presa in questo modo una giusta idea dello stato del Problema, passo a fare la conveniente denominazione delle quantità, che in esso hanno luogo, e però supponendo come incognito l' Asse cercato, lo chiamo $= x$; dico $= a$ le 1200 doppie, e perchè ho fatto $= x$ l' Asse, sarà una metà dell' Asse $= \frac{x}{2}$, cinque diciottesimi saranno $= \frac{5x}{18}$, e un quinto sarà $\frac{x}{5}$, nel qual modo le denominazioni fatte corrispondono alle relazioni, che osservano le quantità proposte. Fatto ciò debbo passare all' equazione, la quale non è altro, che un rapporto d' eguaglianza, che hanno fra loro due, o più quantità differentemente denominate, o che hanno col zero, se ad esso si paragonano, e questa equazione si troverà facilmente, niente altro a tale effetto richiedendosi, che mettere in linguaggio algebraico la condizione proposta, cioè che l' Asse cercato sia eguale a una di lui metà, più cinque diciottesimi, più un quinto, più 1200, così $x = \frac{x}{2} + \frac{5x}{18} + \frac{x}{5} + a$. Resta finalmente da ridurre questa equazione alla forma più semplice, e da risolverla, lo che si ottiene con fare, che da una parte del segno d' egualità resti sola la $x$ quantità cercata, e dall' altra parte si trovino sole quantità cognite. Ora per separare le quantità cognite dall' incognita, o dalle incognite servono le operazioni di sommare, sottrarre, moltiplicare, dividere, estrarre radici, e inalzare a potestà.

311. La somma, e la sottrazione hanno luogo quando si deve trasferire qualche termine da un membro all'altro dell' equazione (chiamansi membri dell'equazione le quantità incomplesse, o complesse, che sono avanti, e dopo il segno $=$), aggiungendo cioè ad ambidue i membri dell'equazione quel termine, che si vuol trasferi-

ſcrire, ſe egli è affetto dal ſegno —, o pure levandolo da ambi i membri, ſe egli è affetto dal ſegno +, e in queſto modo mediante la contrarietà de' ſegni tale termine ſvanirà da quel membro, in cui ritrovavaſi, e comparirà nell' altro membro con ſegno mutato. Queſta operazione chiamaſi traſpoſizione, la quale non altera punto l' equazione, mentre (pel num. 45. del Tomo 1.) ſe a quantità eguali ſi aggiungeranno, o dalle medeſime ſi leveranno una, o più quantità eguali, le quantità, che nel primo, e nel ſecondo caſo riſulteranno, ſaranno eguali: Onde nella precedente equazione per mettere da una ſola parte dell' equazione tutti i termini, in cui entra l' incognita, ſi incominci dal termine $\frac{x}{2}$, quale per eſſere affetto dal ſegno + ſi ſottragga da ambi i membri, e ſi avrà $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{5x}{18} + \frac{x}{5} + a$, cioè $x - \frac{x}{2} = \frac{5x}{18} + \frac{x}{5} + a$; poſcia la ſteſſa operazione ſi ripeta riſpetto ai termini $+ \frac{5x}{18} + \frac{x}{5}$, e ſi avrà $x - \frac{x}{2} - \frac{5x}{18} - \frac{x}{5} = a$.

312. Si vede pertanto, che ogniqualvolta ſi voglia trasferire qualche termine da un membro all' altro dell'equazione, baſterà ſenza inſtituire l' addizione, o la ſottrazione, ſcrivere tale termine col ſegno mutato in quel membro, a cui ſi vuol trasferire. Per lo che ſi potrà ſempre a piacere rendere poſitivo un qualche termine, che ſia negativo, o renderlo negativo, ſe egli è poſitivo. Si potranno in oltre trasferire tutti i termini a una ſola parte dell' equazione, lo che diceſi eguagliare a zero, mentre in queſto caſo la collezione di tutti i termini riſulta eguale a zero: Di fatto ſe da una quantità ſe ne ſottrerrà un' altra a lei eguale, il riſultato ſarà zero, e però l'equazione precedente eguagliata a zero è $x - \frac{x}{2} - \frac{5x}{18} - \frac{x}{5} - a = 0$.

313. Se adunque nell'uno, e nell'altro membro dell' equazione ſi troverà lo ſteſſo termine affetto dal medeſimo ſegno, ſi potrà cancellarlo da ambi i membri ſenza turbare l'eguaglianza, poichè ſe da un membro ſi trasferiſſe all'altro, egli ſvanirebbe per la contrarietà de'ſegni.

314. Si fa uſo della moltiplicazione, o della diviſione, quando in uno ſteſſo termine è congiunta la quantità incognita con una, o più cognite. Se ſono congiunte per mezzo della moltiplicazione, così che l'incognita abbia coefficiente, ſe ne deve ella liberare mediante la diviſione, dividendo cioè con tale coefficiente tutti gli altri termini dell'equazione. Se ſono congiunte per mezzo della diviſione, così che l'incognita abbia qualche diviſore, ſe ne dovrà ella liberare mediante la moltiplicazione, moltiplicando cioè con tale diviſore tutti gli altri termini dell'equazione. Queſte due operazioni poi non alterano l'eguaglianza, mentre egli è Aſſioma, che ſe quantità eguali ſi moltiplicheranno, o ſi divideranno per una ſteſſa quantità, o per quantità eguali, tanto i prodotti, come i quozienti ſaranno eguali.

315. Or ecco come deveſi applicare queſta regola alla noſtra equazione $x - \frac{x}{2} - \frac{5x}{18} - \frac{x}{5} = a$. Primieramente biſogna liberare dai denominatori i termini in cui entra l' incognita, lo che faccio cominciando dal termine $\frac{x}{2}$, col di cui de-

denominatore 2 moltiplico tutti gli altri termini dell'equazione, e mi viene $2x - x - \frac{10x}{18} - \frac{2x}{5} = 2a$; poscia passo al termine $\frac{10x}{18}$, e col suo denominatore 18 moltiplico tutti gli altri termini dell'equazione, dal che risulta $36x - 18x - 10x - \frac{36x}{5} = 36a$: Finalmente colla stessa maniera libero dal divisore il termine $\frac{36x}{5}$, con che si ha l'equazione libera dalle frazioni così $180x - 90x - 50x - 36x = 180a$, e perchè $-90x - 50x - 36x = -176x$, e $180x - 176x = 4x$, però l'equazione proposta trovasi ridotta a $4x = 180a$, nella quale resta per ultimo da liberare l'incognita, mediante la divisione, dal coefficiente 4 così $x = \frac{180a}{4}$, cioè (fatta l'attuale divisione) $x = 45a$, e rimettendo in luogo di $a$ il suo valore 1200, si avrà $x = 54000$, che è l'Asse cercato. Per mettere sempre più sotto gli occhi le regole esposte, e renderne così più famigliare la pratica, proporrò un altro Esempio.

Prob. 2. Essendosi data a censo una certa somma di denaro, cercasi quanto si avrà d'interesse dopo un dato tempo, e però a quanto monterà dopo un dato tempo l'aggregato del capitale, e dell'interesse o sia frutto.

Risol. Nella denominazione delle quantità, che entrano nel calcolo, mi servirò delle loro lettere iniziali, e però dirò $= c$ il capitale, il tempo $= t$, la somma del capitale, e del frutto, che ricavasi dopo il dato tempo $t$, $= s$, il numero arbitrario, come 100, su cui si regola il frutto, $= a$, il frutto, che su questo numero si ricava, $= f$. Ciò posto determino primieramente il frutto, che rende in un anno il capitale, così $a : f :: c : \frac{cf}{a}$. Dunque il frutto, che rende il capitale in un anno è $\frac{cf}{a}$; se pertanto si moltiplicherà questo frutto annuo per $t$ numero del tempo dato, si avrà $\frac{cft}{a}$ frutto, che ricavasi dal capitale dopo il tempo $t$: che se finalmente a questo frutto si aggiungerà il capitale, si avrà $c + \frac{cft}{a} = s$ equazione cercata. Ora che si è trovato il valore di $s$, supponiamo che dei cinque elementi, che entrano in questa equazione, uno dopo l'altro sia incognito, e debbasi determinare, restando cogniti gli altri quattro; e primieramente debbasi determinare il capitale. Riducendo tutti i termini dell'equazione allo stesso denominatore si avrà $ac + cft = as$, e dividendo l'uno, e l'altro membro per $a + ft$, ne verrà $c = \frac{as}{a+ft}$. Si debba determinare il tempo: Prendo l'equazione $ac + cft = as$, trasporto il termine $ac$ così $cft = as - ac$, poscia divido l'uno, e l'altro membro per $cf$, ed ho $t = \frac{as-ac}{cf}$. Si debba determinare il frutto: Prendo l'equazione $cft = as - ac$, e dividendo l'uno, e l'altro membro per $ct$, mi viene $f = \frac{as-ac}{ct}$. Finalmente per determinare il numero arbitrario $a$, su cui si regola l'interesse, pren-

prendo l'equazione $cft = as - ac$, e dividendo l'uno, e l'altro membro per $s - c$ mi viene $\frac{cft}{s-c} = a$.

Per venire al caſo particolare ſia $c = 14900$ lire, $t = 24$, $a = 100$, $f = 6$, ſarà $s = 14900 + \frac{14900 \times 24 \times 6}{100} = 14900 + 149 \times 24 \times 6 = 14900 + 21456 = 36356$. Ritenuti gli ſteſſi valori ſe ſi ſupporrà incognito il tempo, ſi avrà $t = \frac{100 \times 36356 - 100 \times 14900}{14900 \times 6} = \frac{2145600}{89400} = 24$ ec.

316. Quando vi ſiano più frazioni da toglierſi, come nell'equazione del Prob. 1. ſi opererà più ſpeditamente con moltiplicare tutti i termini dell'equazione col prodotto de' denominatori, lo che fatto deveſi ſopprimere il comune denominatore.

317. Def. 2. Queſte equazioni, in cui l'incognita aſcende a una ſola dimenſione, ſi dicono equazioni ſemplici, o di primo grado.

318. Def. 3. Radice dell'equazione è quella quantità, che ſoſtituita nell'equazione in luogo dell'incognita fa verificare l'equazione, vale a dire, che i ſuoi due membri ſiano eguali, e conſeguentemente, che il loro aggregato, mediante lo ſcambievole diſtruggerſi de' termini, ſia uguale a zero: Per lo che la radice della propoſta equazione è 54000, cui ſi è trovata uguale l'incognita $x$, mentre col ſoſtituirſi 54000 trovato al num. 315. in luogo di $x$ nell'equazione $4x = 180a$, o ſia $4x = 180 \times 1200$, ſi ha $4 \times 54000 = 180 \times 1200$, o ſia $216000 = 216000$, e però $216000 - 216000 = 0$. Se la quantità, che fa verificar l'equazione è poſitiva, la radice dell'equazione diceſi vera, o poſitiva; ſe è negativa, la radice diceſi falſa, o negativa. Il ritrovare poi la radice dell'equazione chiamaſi riſolvere l'equazione.

319. Ho detto al num. 307., che devonſi denominare colle lettere dell'Alfabeto le quantità cognite, e le incognite, ciò però deveſi fare con qualche regola a fine di non confondere le une colle altre; per lo che ſi è convenuto tra gli Algebriſti di eſprimere le quantità cognite colle prime lettere $a$, $b$, $c$, ec., e le incognite colle ultime $x$, $y$, $z$, $u$.

320. Dal num. 312. coſta, che ſi poſſono cambiare tutti i ſegni ai termini di una equazione, ſenza che ſe ne alteri l'eguaglianza: Onde la precedente equazione ſi può rappreſentare tanto così $x - \frac{x}{2} - \frac{5x}{18} - \frac{x}{5} - a = 0$, come così $-x + \frac{x}{2} + \frac{5x}{18} + \frac{x}{5} + a = 0$. Non però tale cambiamento ſi può fare riſpetto all'eſpreſſione per Eſempio $z > 2m - n$, ſenza che parimente ſi cambj il ſegno $>$ in $<$; poichè ſe non ſi mutaſſe il ſegno $>$, col mutare i ſegni prefiſſi alle quantità, che gli ſtanno avanti, e dopo, ne naſcerebbe un aſſurdo che ſarebbe cioè tanto $-z > -2m + n$, come $-2m + n > -z$. Di fatto $-z > -2m + n$ riſulta dal cambiare i ſegni all'eſpreſſione $z > 2m - n$ ſenza mutarci il ſegno $>$ in $<$, e in oltre ſi ha $-2m + n > -z$ con aggiungere primieramente ad ambe le parti $+n$ nell'eſpreſſione $z > 2m - n$, con che ſi ha $z + n > 2m - n + n$, cioè $z + n > 2m$, indi con ſottrarre $z$ da ambe le parti così $z - z + n > 2m - z$, cioè $n > 2m - z$, e finalmente con ſottrarre $2m$ da ambe le parti, così $-2m + n > 2m - 2m - z$, cioè $-2m + n > -z$. Ma egli è aſſurdo, che ſia nello ſteſſo tempo $-z > -2m + n$, e $-2m + n > -z$, dunque non ſi poſſono mutare i ſegni alle quantità

dell'espressione $z > 2m - n$, senza che si cambj pure il segno $>$ in $<$. Lo stesso si dica se l'espressione fosse stata $z < 2m - n$.

321. Quando i Problemi da risolversi vengono proposti colle condizioni, che immediatamente portano alla equazione, la loro soluzione è facilissima, bastando ridurli dal linguaggio comune a linguaggio algebraico, vale a dire bastando esprimere con segni algebraici le nostre idee su i rapporti delle quantità, che entrano nel Problema. Ma non sempre coi Problemi vengono proposte le condizioni necessarie, essendovene molti, anzi moltissimi (e tali in buona parte sono i Problemi Fisici), i quali si propongono nudamente senza alcuna condizione; ma deve l'Algebrista da altre cognizioni fisiche ricavarne le condizioni opportune, che alla bramata soluzione lo conducano. L'Esempio fornirà un'idea generale di questi Problemi, e del modo, che devesi tenere nella loro soluzione.

322. Prob. 3. Avendosi una corona mista d'oro, e d'argento, cercasi la quantità dell'uno, e dell'altro metallo, di cui è composta.

323. Risol. Questo è il famoso Problema, che propose Jerone Re di Siracusa ad Archimede. Aveva egli ordinata a un Artefice una corona d'oro, e al solo vederla sospettando, che vi fosse mescolato dell'argento più di quello richiede la lega, fece chiamare a se Archimede, cui ordinò di scuoprire l'inganno; su di che meditò lungo tempo il Geometra, ma indarno, quando a caso, essendo un giorno nel bagno, osservò, che il suo corpo nell'acqua perdeva una quantità del suo peso eguale al peso di un simile volume d'acqua, dal che ravvisando egli poterne dedurre la soluzione del proposto Problema, trasportato dal giubilo si mise a correre nudo, come era, per le strade di Siracusa gridando Εὕρηκα, cioè *l'ho trovato*. Ora su la fatta osservazione si mise egli a raziocinare così: Poichè ogni corpo immerso nell'acqua perde una certa porzione del suo peso, e lo stesso corpo comunque cambj figura, purchè conservi lo stesso volume, perde sempre la stessa quantità di peso, però se la corona è di oro puro, basterà prendere una massa d'oro puro, che essendo dello stesso peso della corona, gli sarà ancora eguale in volume, e immergendo queste due masse nell'acqua perderà l'una, e l'altra lo stesso peso: Che se nella corona coll'oro v'è mescolato dell'argento, in tal caso la massa d'oro puro eguale di peso alla corona gli sarà inferiore nel volume, poichè l'oro tra tutti i metalli contiene più di materia sotto un minor volume, e però immersa nell'acqua la massa d'oro puro perderà meno del suo peso, che la corona; prendendo poi una massa d'argento puro eguale in peso alla corona, gli sarà maggiore in volume, e conseguentemente immersa nell'acqua perderà più di peso. Ora supposte queste notizie, ed essendo cognito tanto il peso della corona, come il peso che ella perde immersa nell'acqua, e in oltre essendo cognito il peso, che perde la già detta massa tanto d'oro come d'argento immersa nell'acqua, veniamo alla soluzione generale del proposto Problema.

324. Sia $= a$ il peso della corona, e il peso, che ella perde nell'acqua si dica $= b$; il peso, che perde nell'acqua la detta massa d'oro si chiami $= c$, e il peso, che perde la massa d'argento $= d$. Sia $= x$ la quantità incognita dell'oro, che entra nella corona, sarà $= a - x$ la quantità d'argento mescolata coll'oro: E perchè come sta il peso della corona al peso di quella quantità d'oro, che v'è mescolata, così sta il peso $c$, che perde nell'acqua la massa d'oro al peso, che perde nell'acqua la mescolata quantità d'oro, cioè in linguaggio algebraico $a : x :: c :$ al quarto termine, però sarà $\frac{cx}{a}$ il peso, che perde nell'acqua la quantità d'o-

ro $x$: Iſteſſamente ſtando il peſo della corona al peſo della quantità d'argento, che v'è meſcolata, come ſta il peſo $d$, che perde nell'acqua la maſſa d'argento al peſo, che perde nell'acqua la meſcolata quantità d'argento, cioè in linguaggio algebraico $a : a-x :: d$: al quarto termine, ſarà $\frac{ad-dx}{a}$ il peſo, che perde nell'acqua la meſcolata quantità d'argento $a-x$. Ma il peſo, che perde nell'acqua la quantità d'oro $x$ più il peſo, che perde nell'acqua la quantità d'argento $a-x$ è eguale al peſo, che perde nell'acqua la corona, però l'equazione, che porta alla ſoluzione del Problema ſarà $\frac{cx}{a}+\frac{ad-dx}{a}=b$, per riſolvere la quale comincio a liberare il primo membro dal denominatore $a$, e ciò ottengo moltiplicando collo ſteſſo l'altro membro, con che ho $cx+ad-dx=ab$. Ora perchè il peſo $d$, che perde nell'acqua la maſſa d'argento è maggiore del peſo, che perde nell'acqua tanto la corona, come la maſſa d'oro, perchè ſotto a uno ſteſſo peſo la maſſa d'argento ha un maggior volume, perciò a fine di rendere poſitivo il termine $dx$, lo traſporto dall'altra parte del ſegno d'egualità facendo $cx+ad=ab+dx$. In oltre per mettere da una ſola parte del ſegno d'egualità tutti i termini, ne' quali entra l'incognita $x$, e dall'altra tutti i termini cogniti, traſporto al di là il termine $cx$, e al di quà il termine $ab$, con che ho $ad-ab=dx-cx$, cioè (perchè $ad-ab=a\times\overline{d-b}$, e $dx-cx=x\times\overline{d-c}$) $a\times\overline{d-b}=x\times\overline{d-c}$: Per lo che null'altro più rimane a fine di laſciare la incognita $x$ ſola da una parte del ſegno d'egualità, che liberarla dal ſuo fattore $d-c$, perciò con queſto fattore divido l'altro membro dell'equazione, e ho finalmente $a\times\frac{\overline{d-b}}{d-c}=x$. Ed ecco con ſole quantità cognite eſpreſſo il valore dell'incognita $x$, che eſprime il peſo della quantità d'oro miſto nella corona, lo che ſi cercava. Che ſe nell'eſpreſſione $a-x$, che dà il peſo dell'argento meſcolato, ſi ſoſtituirà in luogo di $x$ il ſuo pur ora ritrovato valore ſi avrà $a-a\times\frac{\overline{d-b}}{d-c}$, che è il ricercato peſo dell'argento meſcolato, cioè, riducendo allo ſteſſo denominatore, $ad-ac-ad+ab$, vale a dire $ab-ac=a\times\overline{b-c}$.

325. Si oſſervi l'artifizio uſato nel denominare l'incognito peſo dell'argento, che entra nella compoſizione della corona, eſſendoſi prevalſo dell'incognita già aſſunta ſenza introdurne alcun'altra, e ciò con oſſervare, che ſe dal peſo della corona ſi leverà il peſo dell'oro, il reſiduo ſarà il peſo dell'argento, che entra nel miſto, eguale perciò ad $a-x$. E ciò ſerva di regola per infiniti altri caſi.

326. Eſſendoſi ritrovata l'equazione $a\times\overline{d-b}=x\times\overline{d-c}$, ſarà (pel num. 491. del Tomo I.) $d-c : d-b :: a : x$; cioè ſtarà la differenza, che paſſa tra il peſo $d$, che perde nell'acqua la maſſa d'argento, e il peſo $c$, che perde nell'acqua la maſſa d'oro, alla differenza, che paſſa tra il peſo, che perde nell'acqua la maſſa d'argento, e il peſo, che perde nell'acqua la corona, come ſta il peſo della corona al ricercato incognito peſo dell'oro, che v'è meſcolato.

327. Ma per paſſare dalla generalità al caſo particolare ſupponiamo, che la propoſta corona peſi 7 libbre: Si ſa dalla Fiſica, che la gravità ſpecifica dell'oro

fino

fino viene espressa da questo numero 19639, quella dell'argento fino da 10534, e quella dell'acqua da 1000: Si sa in oltre, che come sta la gravità specifica di un solido alla gravità specifica di un fluido, così sta il peso di tale solido alla porzione di peso, che egli perde qualora è immerso in questo fluido: Onde per sapere quanto di peso perda nell'acqua la massa d'oro eguale in peso alla corona, si farà come 19639 gravità specifica dell'oro a 1000 gravità specifica dell'acqua, così 7 peso della massa d'oro al quarto termine, che trovasi essere $\frac{7000}{19639}$, peso, che perde la detta massa d'oro nell'acqua: Colla stessa maniera si troverà, che il peso perduto nell'acqua dalla massa d'argento eguale in peso alla corona viene espresso da $\frac{7000}{10534}$. Ma perchè (pel num. 455. del Tomo 1.) le frazioni, che hanno lo stesso numeratore stanno fra loro in ragione reciproca de' denominatori, perciò la porzione di peso perduta nell'acqua dalla massa d'oro verrà espressa dal numero 10534, quella che si perde dalla massa d'argento dal numero 19639, e quella che si perde dalla corona dal numero $\frac{294054}{21}$: Per lo che sarà $a=7$, $d=19639$, $b=\frac{294054}{21}$, $c=$ 10534, e sostituendo questi valori nella ritrovata equazione $\frac{a\times d-b}{a-c}=x$, ella si cambierà in quest'altra $\frac{7\times\overline{19639-\frac{294054}{21}}}{19639-10534}=x=\frac{7\times\overline{\frac{412419-294054}{21}}}{19639-10534}=\frac{7\times 118365}{21\times 9105}$ $=4\frac{1}{3}$, e però la quantità d'oro mescolata nella corona è di libbre $4\frac{1}{3}$, conseguentemente la quantità dell'argento è di libbre $2\frac{2}{3}$, perchè $7-4\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$.

328. Nella risoluzione delle equazioni s'incontrano non solo radici positive, ma ancora negative: Queste radici negative poi ci rendono avvertiti (giusta il num. 26.), che si è fatta qualche falsa supposizione nella enunciazione del Problema. Per rendere ciò manifesto coll'Esempio sia da risolversi il seguente

329. Prob. 4. Essendo entrati in società tre Mercanti con 1500 Filippi cercasi quale esser debba il loro guadagno, affinchè in capo al primo anno terminando la società gli possano toccare per cadauno 398 Filippi.

330. Risol. La cosa, che in questo problema si cerca, è il guadagno, che debbono fare in un anno questi tre Mercanti, quale guadagno si chiami $=x$. Due sono i dati, cioè il capitale di 1500 Filippi, che dico $=a$, e i 398 Filippi, che a ciascuno toccar devono alla fine del primo anno, quali chiamo $=b$. Una sola è la condizione proposta, cioè che il capitale $a$ più il guadagno $x$ diviso per 3 lascino un quoziente eguale a $b$, con che si ha l'equazione $\frac{a+x}{3}=b$, la quale porta alla soluzione cercata. Si liberi pertanto il primo membro dal denominatore 3, e si avrà $a+x=3b$: Si trasporti all'altro membro la quantità $a$, e ne verrà $x=3b-a$, che è l'equazione già risoluta. Si rimettano adesso in luogo di $a$, e di $b$ i suoi valori, e si avrà $x=3\times 398-1500$, cioè $x=1194-1500=-306$

ra-

radice negativa, la quale dà a vedere, che è ſtato propoſto malamente il Problema, mentre in vece di cercare quale doveſſe eſſere il loro guadagno, ſi doveva cercare quale doveſſe eſſere la loro perdita, affinchè dopo il primo anno dividendoſi il capitale rimaſto gli poteſſero toccare 398 Filippi per uno. Di fatto da 1500 levandoſi 306 reſtano 1194, che diviſi per 3 laſciano 398. Siccome quando tutte le radici di una equazione ſono negative, ciò vuol dire, che il Problema è ſtato falſamente propoſto, nel qual caſo emendando l'enunciazione le radici riſulteranno poſitive; così quando le radici ſono in parte poſitive, e in parte negative, ciò dà a vedere che il Problema è ſtato enunciato in parte giuſtamente, e in parte falſamente, ma implicitamente, nel qual caſo comunque ſi cambj l'enunciazione del Problema, non ſi porranno mai evitare le radici negative, mentre colle coſe cercate ſi meſcola una queſtione ſtraniera, che non è poſſibile di evitare avvegnachè dal calcolo ſteſſo venga introdotta.

331. I Problemi, che fino ad ora ho preſo a riſolvere ſono ſtati tali che ammettevano una ſola condizione, la quale portava toſto all' equazione finale: ma di tale natura non ſono tutti i Problemi, eſſendovene molti, anzi moltiſſimi, che involgono più condizioni, di cui ciaſcuna porta a una equazione peculiare, dalle quali poſcia haſſene a ricavare l' equazione finale, che ſcioglie il dato Problema. Per lo che ſotto due punti di viſta ſi poſſono conſiderare le equazioni: O come concluſioni ultime, alle quali ſi arriva nello ſciogliere il Problema: o come mezzi co' quali ſi giunge all'equazione finale. Le equazioni del primo genere contengono una ſola incognita, come abbiamo veduto: le equazioni del ſeçondo genere hanno più incognite; ma queſte equazioni devonſi talmente maneggiare, e paragonare tra loro, che facendo ſvanire tutte le incognite a riſerva d' una, ne riſulti da tutte una ſola equazione.

332. Per ritrovare le equazioni particolari niente altro devefi fare, che ridurre a eſpreſſione algebraica le condizioni propoſte nel Problema.

333. Se quante ſono le condizioni date nel Problema altrettante ſono le incognite, o ſia le coſe cercate, il Problema diceſi determinato: Siccome equazione determinata diceſi quella, in cui entra una ſola incognita.

334. Ho detto, che per riſolvere il Problema fa di meſtieri dedurre dalle equazioni peculiari eſprimenti le condizioni date una ſola equazione, che contenga ſoltanto una incognita, e di ciò la ragione ſi è, perchè queſte equazioni particolari non comprendono per ciaſcuna il Problema, che in parte, avvegnachè ſiano dedotte da quelle condizioni, che ſeparatamente ſonoſi ridotte al calcolo; laddove poi quando ſi riducono tutte queſte particolari equazioni a una ſola, che contenga una ſola incognita, tale equazione inchiuderà tutte le condizioni, e però i valori dell' altre incognite, conſeguentemente comprenderà tutto il Problema.

335. Reſta ora da eſporre il metodo di ridurre più equazioni all'equazione finale niegiante il faine ſparire tutte le incognite a riſerva d' una, lo che farò col ſeguente Eſempio.

336. Prob. 5. Dovendoſi fare una ſtatua di 17 libbre di peſo compoſta di due metalli, cioè d'Argento, e di Rame, de' quali il primo vale 38 lire alla libbra, e il ſecondo ne vale 7: Cercaſi la quantità dell'uno, e dell' altro metallo da meſcolarſi, affinchè ne riſulti un compoſto, che vaglia 29 lire alla libbra.

337. Riſol. Si chiamino $= a$ le 17 libbre, che peſa la ſtatua, ſi facciano $= c$ le 38. lire, che vale l' argento alla libbra, ſi dicano $= b$ le 29 lire, che deve coſtare ogni libbra di miſto, ſiano $= d$ le 7 lire, che vale il rame alla libbra, farà

rà $= ab$ l' intero prezzo della ſtatua. La quantità dell' argento, che deve entrare nel miſto ſi ponga $= x$, e la quantità del rame $= y$. Perchè una condizione propoſta nel Problema ſi è, che la quantità dell' argento, e del rame, che deve formare la ſtatua, aſcenda a 17 libbre, però tale condizione ſomminiſtrerà l' equazione $x + y = a$. Oltre queſta condizione poi ve n' è un' altra, cioè che la ſomma de' valori dell' uno, e dell' altro metallo, che compone la ſtatua, ſia eguale ad $ab$. Determiniamo adunque il valore di $x$, e il valore di $y$, indi facciamone la ſomma $= ab$. Per avere il valore di $x$ ſi oſſervi, che come ſta una libbra d' argento alla quantità $x$, così ſtà 38 prezzo di una libbra d'argento al prezzo di $x$, cioè $1 : x :: c :$ al quarto, che è $cx$ valore della quantità d' argento $x$: Nella ſteſſa maniera ſi troverà eſſere $dy$ il valore della quantità di rame $y$: Ma perchè la ſomma di queſti due valori deve eſſere eguale ad $ab$, però ſi ha la ſeconda equazione $cx + dy = ab$. Ora ſomminiſtrando queſto Problema due equazioni, e due incognite, egli è determinato. Mediante poi queſte due equazioni $x + y = a$, $cx + dy = ab$ ſi farà ſparire un' incognita, per Eſempio la $y$, in queſto modo. Si ricavi dall' una, e dall' altra equazione il valore di $y$ (non conſiderando la $x$ come incognita, ma trattandola a modo dell' altre cognite) giuſta il num. 315., e dalla prima equazione ſi avrà $y = a - x$, dalla ſeconda $y = \frac{ab - cx}{d}$; e perchè queſti ſono valori di una ſteſſa incognita $y$, eſſi ſono eguali, però ſarà $a - x = \frac{ab - cx}{d}$, cioè $ad - dx = ab - cx$, equazione, che comprendendo le condizioni propoſte, inchiude una ſola incognita. Si riſolverà poi queſta equazione al ſolito. traſponendo da una ſola parte del ſegno d'egualità tutti i termini, in cui entra la incognita $x$, e dall' altra parte tutti i termini cogniti. e ſi avrà $cx - dx = ab - ad$, o ſia $x \times \overline{c - d} = a \times \overline{b - d}$, e però $x = a \times \frac{\overline{b - d}}{\overline{c - d}}$. Se pertanto in luogo di $b$, $c$, $d$ ſi ſoſtituiranno i loro valori, ſi avrà $x = 17 \times \frac{\overline{29 - 7}}{\overline{38 - 7}} = 17 \times \frac{22}{31} = 12\frac{2}{31}$ numero delle libbre di argento, che devono entrare nel miſto. Che ſe queſto valore, o ſia peſo dell' argento $12\frac{2}{31}$ ſi ſoſtituirà nell' equazione $x + y = a$ in luogo di $x$, ſi avrà $12\frac{2}{31} + y = a$, conſeguentemente $y = a - 12\frac{2}{31}$, cioè, ſoſtituendo il valore di $a$, $y = 17 - 12\frac{2}{31} = 4\frac{29}{31}$, che è la quantità del rame ricercata.

338. Dall' equazione $x \times \overline{c - d} = a \times \overline{b - d}$ ſi ricava $c - d : b - d :: a : x$, vale a dire come ſta la differenza tra il prezzo dell'argento, e il prezzo del rame alla differenza tra il prezzo medio competente al compoſto, e il prezzo del rame, così ſta il peſo della ſtatua al peſo della quantità d'argento, che v'entra.

339. Mediante la ſomma, o la ſottrazione ſi poſſono ancora eliminare le incognite, con fare cioè ſvanire quei termini in cui eſſe ſi ritrovano. Se i termini rinchiudenti l' incognita, che ſi vuol eliminare, e i quali devono eſſere identici, ſaranno affetti da ſegni contrarj, baſterà ſommare inſieme le due propoſte equazioni per far-

farli ſvanire, ſe poi ſaranno affetti dallo ſteſſo ſegno, baſterà ſottrarre un' equazione dall' altra. Prenderò l' Eſempio dalle due equazioni $x + y = a$, $cx + dy = ab$ del precedente Problema: Si voglia pertanto eliminare la $y$. Poichè il termine, che contiene la $y$ nella prima equazione $x + y = a$ non è identico al termine, che contiene la $y$ nella ſeconda $cx + dy = ab$, e il metodo non ha luogo ſenza queſta identità, però ſi riducano identici in queſto modo: Col coefficiente $d$ del termine $dy$ nella ſeconda equazione ſi moltiplichi ciaſcun termine della prima equazione $x + y = a$ (lo che non turba l'egualità, perchè ſe quantità eguali ſi moltiplicheranno per una ſteſſa quantità, i prodotti ſaranno eguali), e ſi avrà $dx + dy = ad$, in cui il termine, che contiene la $y$ ſi è reſo identico, come ſi cercava. Ora perchè i termini, che contengono la $y$ nell' una, e nell' altra equazione ſono affetti dallo ſteſſo ſegno, però queſta ſeconda equazione ſi ſottragga dalla prima così

$$\begin{array}{rl} & cx + dy = ab \\ & dx + dy = ad \\ \hline \text{Reſiduo} & cx - dx = ab - ad \end{array}$$

Si ha pertanto l' equazione $cx - dx = ab - ad$, in cui entra una ſola incognita, e la quale comprende tutto il Problema, che è la ſteſſa trovata al num. 337.

340. Acciò ſi poſſa vedere la generalità del metodo, e anche per maggior eſercizio proporrò un altro Problema, il quale ammettendo quattro condizioni inchiuderà perciò quattro incognite, di cui tre dovranſi eliminare.

341. Prob. 6. Si debbano trovare quattro numeri con queſte condizioni, che il doppio del primo, più un terzo del ſecondo, più il quadruplo del terzo ſia eguale a 19; in ſecondo luogo che due quinti del primo, più tre quarti del terzo, più tre quinti del quarto ſieno eguali a 7; in terzo luogo che il triplo del ſecondo, più il ſettuplo del terzo, più due terzi del quarto ſia eguale a 41; in quarto luogo che tre ſettimi del primo, più ſei ſettimi del ſecondo, più una metà del quarto ſieno eguali a 6.

342. Riſol. Queſto Problema porta una operazione un poco lunga, ma io l' ho ſcielto a bella poſta acciò ſerva di eſercizio tanto pel calcolo, quanto per la maniera di procedere nello ſcioglimento de' Problemi. Quattro pertanto ſono le coſe cercate, e quattro ſono le condizioni propoſte, che portano ad altrettante equazioni, le quali devonſi talmente maneggiare, e paragonare fra loro, onde ſe ne ricavi una equazione, che contenendo una ſola incognita, ſarà perciò l' equazione finale. I quattro numeri cercati ſi chiamino $x, y, z, u$: Le altre denominazioni ſi facciano come ſegue

$2 = a$ $\quad$ $\frac{2}{3} = i$

$\frac{1}{3} = b$ $\quad$ $\frac{3}{7} = k$

$4 = c$ $\quad$ $\frac{6}{7} = m$

$\frac{2}{5} = d$ $\quad$ $\frac{1}{2} = n$

$\frac{3}{4} = e$ $\quad$ $19 = p$

$\frac{2}{5} = f$ $\quad$ $41 = r$

$3 = g$ $\quad$ $6 = s$

$7 = b$

Dalle quattro condizioni propoſte ſi hanno le ſeguenti quattro equazioni

I. $\quad ax + by + cz = p$

II. $\quad dx + ez + fu = b$

III. $\quad gy + bz + iu = r$

IV. $\quad kx + my + nu = s$

Ora prendo la prima, e la ſeconda equazione, e per fare ſvanire da loro la incognita $x$ moltiplico ciaſcun termine della prima equazione per $d$, poſcia ciaſcun termine della ſeconda per $a$, indi dalla ſeconda ſottraggo la prima così

Equaz. II. moltipl in $a$ $\quad adx + aez + afu = ab$

Equaz. I. moltipl. in $d$ $\quad adx + bdy + cdz = dp$

Reſiduo equaz. V. $\quad aez + afu - bdy - cdz = ab - dp$

V. cioè $\quad \overline{ae - cd} \times z + afu - bdy = ab - dp$

Paſſo ora, mediante queſta quinta equazione, e la terza, a eliminare la $y$, e a tale effetto moltiplico ciaſcun termine della V per $g$, e ciaſcun termine della III per $-bd$, poſcia dalla V ſottraggo la III così

Equaz. V moltipl. in $g$ $\quad \overline{aeg - cdg} \times z + afgu - bdgy = agb - dgp$

Equaz. III moltipl. in $-bd$ $\quad -bdgy - bdbz - bdiu = -bdr$

Reſiduo equaz. VI. $\quad \overline{aeg - cdg} \times z + afgu + bdbz + bdiu = agb - dgp + bdr$

VI. cioè $\quad \overline{aeg - cdg + bdb} \times z + \overline{afg + bdi} \times u = agb - dgp + bdr$

Per avere un'altra equazione, in cui entrino ſolamente le due incognite $z$, $u$, onde

de per mezzo loro ricavarne finalmente una equazione, che ammetta una ſola incognita, prendo la prima, e la quarta equazione, e moltiplicando primieramente la prima per $k$, indi la quarta per $a$, ſottraggo poſcia la prima dalla quarta così

Equaz. IV moltipl. in $a$ $\quad akx+amy+anu=as$
Equaz. I moltipl. in $k$ $\quad akx+bky+ckz=kp$

Reſiduo equaz. VII. $\quad amy+anu-bky-ckz=as-kp$

VII. cioè $\quad \overline{am-bk}\times y+anu-ckz=as-kp$

Mediante queſta ſettima equazione, e la terza ritrovo un'altra equazione, in cui entrino ſolamente le due incognite $z$, $u$, e ciò ottengo con moltiplicare tutti i termini della VII per $g$, indi tutti i termini della III per $am-bk$, e con ſottrarre poſcia la VII dalla III così

Equaz. III moltipl. in $am-bk$ $\quad \overline{agm-bgk}\times y+\overline{abm-bbk}\times z+\overline{aim-bik}\times u=amr-bkr$
Equaz. VII moltipl. in $g$ $\quad \overline{agm-bgk}\times y+agnu-cgkz=ags-gkp$

Reſiduo equaz. VIII $\quad \overline{abm-bbk}\times z+\overline{aim-bik}\times u-agnu+cgkz=amr-bkr-ags+gkp$

VIII cioè $\quad \overline{abm-bbk+cgk}\times z+\overline{aim-bik-agn}\times u=amr-bkr-ags+gkp$

Eſſendo giunto finalmente alle due equazioni VI, e VIII, le quali non hanno, che le ſteſſe due incognite, con eliminarne una di loro arriverò ad una equazione, che inchiuderà una ſola incognita. Delle due incognite pertanto $z$, $u$, a fine di eliminare la $z$, moltiplico primieramente tutti i termini dell'ottava equazione per $aeg-cdg+bdb$, poi tutti i termini della ſeſta per $abm-bbk+cgk$, indi ſottraggo dalla VI l'VIII così

Equaz. VI moltipl. in $abm-bbk+cgk$

$$\overline{aeg-cdg+bdb}\times\overline{abm-bbk+cgk}\times z+\overline{abm-bbk+cgk}\times\overline{afg+bdi}\times u=$$
$$\overline{abm-bbk+cgk}\times\overline{agb-agp+bdr}$$

Equaz. VIII moltipl. in $aeg-cdg+bdb$

$$\overline{aeg-cdg+bdb}\times\overline{abm-bbk+cgk}\times z+\overline{aeg-cdg+bdb}\times\overline{aim-bik-agn}\times u=$$
$$\overline{aeg-cdg+bdb}\times\overline{amr-bkr-ags+gkp}$$

Reſiduo equaz. IX

$$\overline{abm-bbk+cgk}\times\overline{afg+bdi}\times u-\overline{aeg+cdg-bdb}\times\overline{aim-bik-agn}\times u=$$
$$\overline{abg-dgp+bdr}\times\overline{abm-bbk+cgk}-\overline{aeg+cdg-bdb}\times\overline{amr-bkr-ags+gkp}$$

IX cioè $$\frac{abm-bbk+cgk \times afg+bdi-aeg+cdg-bdb \times aim-vik-agn \times u =}{abm-bbk+cgk \times agb-dgp+bdr-aeg+cdg-vdb \times amr-bkr-ags+gkp}$$

e però $$u = \frac{abm-bbk+cgk \times agb-dgp+bdr-aeg+cdg-bdb \times amr-bkr-ags+gkp}{abm-bbk+cgk \times afg+bdi-aeg+cdg-vdb \times aim-vik-agn}$$

se pertanto in questa equazione si sostituiranno in vece delle lettere i loro valori, si avrà il quarto numero cercato $u$, così

$$u = \frac{12-1+\frac{36}{7} \times 42-\frac{114}{5}+\frac{82}{15}-\frac{9}{2}+\frac{24}{5}-\frac{14}{15} \times \frac{492}{7}-\frac{41}{7}-36+\frac{171}{7}}{12-1+\frac{36}{7} \times \frac{18}{5}+\frac{4}{45}-\frac{9}{2}+\frac{24}{5}-\frac{14}{15} \times \frac{8}{7}-\frac{2}{21}-3}$$

cioè $$u = \frac{\frac{113}{7} \times \frac{74}{3}-\frac{19}{30} \times \frac{370}{7}}{\frac{113}{7} \times \frac{166}{45}-\frac{19}{30} \times -\frac{41}{21}} = \frac{\frac{2553}{7}}{\frac{7659}{126}} = \frac{321678}{53613} = 6,$$

e però il quarto numero cercato $u$ è $= 6$.
Per mezzo delle precedenti equazioni VI, e VIII ritrovo il valore del terzo numero $z$ con eliminare l' incognita $u$; ed ecco come: Moltiplico l' VIII equazione in $afg+bdi$, e la VI in $aim-bik-agn$, poscia dall'ottava sottraendo la sesta trovo il valore di $z = 4$. Sostituisco questi ritrovati valori di $z$, $u$ nella terza equazione, e ricavo il valore di $y = 3$. Finalmente sostituiti questi valori di $u$, e $z$ nella seconda mi viene il valore di $x = 1$. Il Calcolo si veda per esteso nella Tavola I.

Equaz. VIII. moltipl. in $afg+bdi$ — $\overline{afg+bdi} \times \overline{abm-bbk+$

Equaz. VI moltipl. in $aim-bik-agn$ — $\overline{aim-bik-agn} \times \overline{aep-$

Reſiduo equaz. X. — $\overline{afg+bdi} \times \overline{abm-bbk+$

X cioè — $\overline{afg+bdi} \times \overline{abm-bbk+cgk-aim+$

e però $z = \dfrac{\overline{afg+bdi} \times \overline{amr-bkr-ags+gkp-aim+bik+$ / $\overline{afg+bdi} \times \overline{abm-bbk+cgk-aim+bik+agn} \times$

cioè $z = \dfrac{\overline{\frac{166}{45}} \times \overline{\frac{370}{7}} + \overline{\frac{41}{21}} \times \overline{\frac{74}{3}}}{\overline{\frac{166}{45}} \times \overline{\frac{113}{7}} + \overline{\frac{41}{21}} \times \overline{\frac{19}{30}}} = \dfrac{\frac{61420}{315}}{\frac{18758}{315}} + \dfrac{\frac{30340}{630}}{\frac{779}{630}} = \dfrac{153$

Per avere il valore del ſecondo numero cercato $y$ ſoſtituiſco nella terza equazione $g$

$$y = \frac{r}{g} - \frac{b}{g} \times \frac{\overline{afg+bdi} \times \overline{amr-bkr-ags+gkp-aim+bik+agn} \times \overline{ag}}{\overline{afg+bdi} \times \overline{an}}$$

$$y = \frac{41}{3} - \frac{\overline{\frac{7}{3}} \times \overline{\frac{18}{5}} + \frac{4}{45} \times \frac{492}{7} - \frac{41}{7} - 36 + \frac{171}{7} - \frac{24}{21} + \frac{2}{21} + 3 \times}{\overline{\frac{18}{5}} + \frac{4}{45} \times}$$

$$\frac{41}{3} - \frac{\overline{\frac{7}{3}} \times \overline{\frac{61420}{315}} + \frac{3034}{63} - \frac{2}{9} \times \overline{\frac{8362}{21} - \frac{703}{21}}}{\frac{18758}{315} + \frac{779}{630}} = \frac{41}{3} - \frac{\overline{\frac{7}{3}} \times \overline{\frac{1702}{7}}}{\frac{851}{14}}$$

Finalmente per avere il valore del primo numero $x$ ſoſtituiſco nella ſeco

$$x = \frac{b}{d} - \frac{\frac{e}{d} \times \overline{afg+bdi} \times \overline{amr-bkr-ags+gkp-aim+bik+agn} \times \overline{agu}}{\overline{afg+bdi} \times}$$

$$x = \frac{35}{2} - \frac{\overline{\frac{15}{8}} \times \overline{\frac{18}{5}} + \frac{4}{45} \times \frac{402}{7} - \frac{41}{7} - 36 + \frac{171}{7} - \frac{24}{21} + \frac{2}{21} + 3 \times}{\overline{\frac{18}{5}} + \frac{4}{45} \times 12}$$

$$\frac{35}{2} - \frac{\overline{\frac{15}{8}} \times \overline{\frac{61420}{315}} + \frac{3034}{63} - \frac{15}{10} \times \overline{\frac{8362}{21} - \frac{703}{21}}}{\frac{18758}{315} + \frac{779}{630}} = \frac{35}{2} - \frac{\overline{\frac{15}{8}} \times \overline{\frac{1702}{7}} -}{\frac{851}{14}}$$

343. Dopo avere ritrovati i valori del terzo, e del quarto numero si sarebbero potuti ritrovare più speditamente i valori del primo, e del secondo, con sostituire i ritrovati valori numerici di $z$, e di $u$ nella terza, e nella seconda equazione così· III $gy=r-4b-6i$, e II $dx=b-4e-6f$, dalla prima delle quali si ha il valore di $y$ così $y=\frac{r-4b-6i}{g}$, cioè sostituendo i valori numerici $y=\frac{41-28-4}{3}=\frac{9}{3}=3$; e dalla seconda si ha il valore di $x$ così $x=\frac{b-4e-6f}{d}$, cioè sostituendo i valori numerici $x=\frac{7-3-\frac{18}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{10}{10}=1$.

344. Spesse volte per facilitare il calcolo in luogo di una quantità qualunque, complessa, si suole porre un' altra quantità letterale ad arbitrio, lo che chiamasi sostituire nel calcolo una quantità a un' altra; e quella quantità, a cui se ne sostituisce un' altra, si dice il valore della quantità sostituita: Per Esempio, perchè nella precedente soluzione pel valore di $y$ (lo stesso si dica pel valore di $x$) risultava una espressione molto lunga dalla sostituzione dei ritrovati valori di $u$, e di $z$ nella terza equazione, però si poteva abbreviare il calcolo sostituendo $s$ in vece del valore di $u$, e $q$ in vece del valore di $z$, con che si sarebbe avuto $gy=r-bq-it$, e però $y=\frac{r-bq-it}{g}$ espressione assai più spedita, e breve. E questa sorte di sostituzione ha uso frequente nel calcolo.

345. Quantunque il metodo esposto per l' eliminazione delle incognite dalle equazioni di primo grado, essendo generale, possa sempre servire, pure per facilitare il calcolo, torna sovente comodo l' avere formole ecumeniche, di cui, mediante la sola sostituzione, potersi prevalere nei casi particolari. A tale oggetto darò qui il modo di ritrovar queste formole, di cui poter usare al bisogno.

346. E per procedere ordinatamente, comincerò dalle formole, che nascono dalle equazioni di primo grado a due incognite. Siano pertanto le due equazioni generali $Ax+By+C=o$, $A'x+B'y+C'=o$, in cui le lettere A, B esprimono generalmente i coefficienti delle due incognite $x$, $y$ nella prima equazione, e C esprime il termine affatto cognito; lo che pur fanno le lettere A', B', C' nella seconda equazione. Si moltiplichi la prima di queste due equazioni per una lettera qualunque $p$, quantità per ora indeterminata, e da determinarsi poscia col calcolo con che si avrà $Apx+Bpy+Cp=o$, dalla quale, sottraendo la seconda equazione, si avrà $\overline{Ap-A'}\times x+\overline{Bp-B'}\times y+Cp-C=o$, come qui mostra l'esempio

Prima equazione moltiplicata in $p$ $Apx+Bpy+Cp=o$
Seconda equazione $A'x+B'y+C'=o$

Residuo (r) $\overline{Ap-A'}\times x+\overline{Bp-B'}\times y+Cp-C=o$

347. Ora acciò da questo residuo svanisca un' incognita per esempio $x$, bisogna, che il suo coefficiente sia eguale a zero, poichè (pel num. 318. del primo Tomo)

mo) col moltiplicarſi una quantità in zero torna zero; però ſi faccia $Ap-A'=o$, con che ſi verrà a determinare il valore dell' indeterminata $p$, così: $p=\frac{A'}{A}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini $\overline{Bp-B'}\chi y+Cp-C'=o$ dell' equazione (Γ) ſi avrà $\frac{\overline{AB}}{A}-B'\chi y+\frac{CA'}{A}-C'=o$, o ſia $\overline{AB-AB'}\chi y+A'C-AC'=o$, e però $\overline{A'B-AB'}\chi y=AC'-A'C$, conſeguentemente $y=\frac{AC'-A'C}{AB'-AB}$, o ſia $y=\frac{A'C-AC'}{AB'-AB}$ che è la formola generale per la eliminazione dell' incognita $x$.

348. Che ſe ſi aveſſe voluto eliminare la $y$, avrebbe biſognato ſupporre eguale a zero il ſuo coefficiente, così $Bp-B'=o$, da cui ricavaſi $p=\frac{B'}{B}$, il qual valore ſoſtituito nel primo, e nell'ultimo termine $\overline{Ap-A'}\chi x+Cp-C'=o$ dell'equazione (Γ), ne viene $\frac{\overline{AB'}}{B}-A'\chi x+\frac{CB'}{B}-C'=o$, cioè $\overline{AB'-A'B}\chi x+B'C-BC'=o$, vale a dire $\overline{AB'-A'B}\chi x=BC'-B'C$, e però $x=\frac{BC'-B'C}{AB'-A'B}$, o ſia $x=\frac{BC'-B'C}{AB'-A'B}$ che è la formola generale per la eliminazione dell' incognita $y$.

349. Date eſſendo pertanto due equazioni con due incognite, delle quali una debbaſi eliminare, ſi prenda delle due ritrovate formole quella, che corriſponde all' eliminazione, che ſi vuol fare, e in vece delle lettere A, B, C; A', B', C' ſi ſoſtituiſcano i corriſpondenti valori, oſſervando ſempre nelle ſoſtituzioni la legge de' ſegni, e in queſto modo ſi avrà l'equazione cercata, in cui entra una ſola incognita.

350. Paſſiamo ora alla formola generale per tre equazioni, e tre incognite, delle quali due ſi devono eliminare. Siano le equazioni generali $Ax+By+Cz+D=o$; $A'x+B'y+C'z+D'=o$; $A''x+B''y+C''z+D''=o$. Si moltiplichi la prima di queſte equazioni per la indeterminata $p$, e la ſeconda per la indeterminata $q$, quali determineremo in appreſſo; indi dalla loro ſomma ſi ſottragga la terza, come ſegue

| | |
|---|---|
| Prima equazione molt. per $p$ | $Apx+Bpy+Cpz+Dp=o$ |
| Seconda equazione molt. per $q$ | $A'qx+B'qy+C'qz+D'q=o$ |
| Somma | $\overline{Ap+A'q}\chi x+\overline{Bp+B'q}\chi y+\overline{Cp+C'q}\chi z+Dp+D'q=o$ |
| Terza equazione | $A''x+B''y+C''z+D''=o$ |

Reſiduo (Δ) $\overline{Ap+A'q-A''}\chi x+\overline{Bp+B'q-B''}\chi y+\overline{Cp+C'q-C''}\chi z+Dp+D'q-D''=o$

351. Che però volendoſi eliminare le due incognite $x$, $y$, biſognerà fare eguali a zero i loro coefficienti, così, $Ap+A'q-A''=o$; $Bp+B'q-B''=o$, mediante le quali due equazioni devonſi determinare le due indeterminate $p$, $q$. Ora avendoſi due

due equazioni, e due indeterminate si determinerà l'una, e l'altra col metodo poc' anzi esposto, e i loro valori sostituiti poscia nei due ultimi termini

$\overline{Cp+Cq-C''} \times z+Dp+D'q-D''=o$ dell' equazione (Δ), faranno scuoprire il valore dell'incognita $z$. A tale effetto pertanto moltiplico colla indeterminata $r$ la prima di queste due equazioni, e dal prodotto sottraggo la seconda, come segue

| | |
|---|---|
| Prima equazione molt. in $r$ | $Apr+A'qr-A''r=o$ |
| Seconda equazione | $Bp+B'q-B''=o$ |

Residuo (Θ) $\overline{Ar-B} \times p+\overline{A'r-B'} \times q-A''r+B''=o$

352. Per avere intanto il valore dell'indeterminata $q$ bisogna eliminare l'indeterminata $p$, lo che si ottiene con fare il suo coefficiente eguale a zero così: $Ar-B=o$, dalla quale equazione si ricava il valore di $r$, che è $r=\frac{B}{A}$, e questo valore sostituito ne' due ultimi termini $\overline{A'r-B'} \times q-A''r+B''=o$ dell'equazione (Θ) dà $\overline{\frac{A'B}{A}-B'} \times q-\frac{A''B}{A}+B''=o$, o sia $\overline{A'B-AB'} \times q-A''B+AB''=o$, mediante la quale si ha il valore dell' indeterminata $q$, che è $q=\frac{A''B-AB''}{A'B-AB'}$. Istessamente si trova il valore di $p$ con eliminare dall'equazione (Θ) l'indeterminata $q$, facendo cioè eguale a zero il suo coefficiente così: $A'r-B'=o$, colla quale ricavasi il valore di $r$, che trovasi essere $r=\frac{B'}{A'}$, e questo valore sostituito nel primo e nell'ultimo termine dell'equazione (Θ) dà $\overline{\frac{AB'}{A'}-B} \times p-\frac{A''B'}{A'}+B''=o$, cioè

$\overline{AB'-A'B} \times p-A''B'+A'B''=o$, da cui si ottiene il valore di $p$, che è $p=\frac{A'B''-A''B'}{A'B-AB'}$. Ritrovati essendosi pertanto i valori delle assunte due indeterminate $p$, $q$, si sostituiscano adesso nei due ultimi termini dell'equazione (Δ) (poichè i due primi si sono fatti eguali a zero); e fatta questa sostituzione si avrà

$$\overline{\frac{A'B''-A''B'}{A'B-AB'}} \times C+\overline{\frac{A''B-AB''}{A'B-AB'}} \times C'-C'' \times z+\overline{\frac{A'B''-A''B'}{A'B-AB'}} \times D+\overline{\frac{A''B-AB''}{A'B-AB'}} \times D'-D''=o,$$

o sia $\overline{A'B''-A''B'} \times C+\overline{A''B-AB''} \times C'+\overline{AB''-A''B'} \times C'' \times z+\overline{A'B''-A''B'} \times D$ $+\overline{A''B-AB''} \times D'+\overline{AB''-A''B} \times D''=o$; onde finalmente si ha il ricercato valore di $z$; e però non solo si sono eliminate le due incognite, ma ancora, si è risoluta l'equazione così

$$z=\frac{\overline{A'B-AB'} \times D''+\overline{AB''-A''B} \times D'+\overline{A''B-A'B''} \times D}{\overline{AB'-A'B} \times C''+\overline{A''B-AB''} \times C+\overline{A'B''-A''B'} \times C}$$

che è la formola generale, mediante la quale date tre equazioni, e tre incognite $x$, $y$, $z$ si eliminano le due prime $x$, $y$, e si determina il valore della terza $z$.

353.

353. Essendosi ritrovata la formola generale per la eliminazione delle due prime incognite, passiamo ora a ritrovare quella, che serve per la eliminazione delle due ultime $y$, $z$. A tale oggetto nell'equazione (Δ) faccio eguali a zero i coefficienti di $y$, e di $z$; onde ho $B'p+B'q-B''=0$; $Cp+Cq-C''=0$, colle quali due equazioni devonsi determinare i valori delle due assunte indeterminate $p$, $q$, affine di poscia sostituirli nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Δ). Moltiplico pertanto colla indeterminata $r$ la prima di queste due equazioni, e dal prodotto ne sottraggo la seconda così

$$\begin{array}{rl} \text{Prima equazione molt. in } r & B'rp+B'rq-B''r=0 \\ \text{Seconda equazione} & Cp+Cq-C''=0 \\ \hline \text{Residuo (A)} & \overline{B'r-C}\times p+\overline{B'r-C}\times q-B''r+C''=0 \end{array}$$

nella quale faccio primieramente eguale a zero il coefficiente di $p$, affine di determinare il valore di $q$ così $B'r-C=0$, da cui ricavasi il valore di $r$, che è $r=\frac{C}{B'}$, il qual valore sostituito nei due ultimi termini dell'equazione (A) dà

$\overline{\frac{B'C}{B'}-C}\times q-\frac{B''C}{B'}+C''=0$, o sia $\overline{B'C-BC'}\times q-B''C+BC''=0$, la quale equazione mi dà il valore di $q$, che è $q=\frac{B''C-BC''}{B'C-BC'}$. Similmente per avere il valore di $p$ faccio eguale a zero il coefficiente di $q$ così: $B'r-C'=0$, da cui si ha il valore di $r$, che è $r=\frac{C'}{B'}$, qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (A) dà

$\overline{\frac{BC'}{B'}-C}\times p-\frac{B''C'}{B'}+C''=0$: o sia $\overline{BC'-B'C}\times p-B''C'+B'C''=0$, e però

$p=\frac{B'C''-B''C'}{B'C-BC'}$. Si sostituiscano adesso questi ritrovati valori delle due assunte indeterminate $p$, $q$ nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Δ), con che si avrà

$$\overline{\frac{B'C''-B''C'}{B'C-BC'}\times A+\frac{B''C-BC''}{B'C-BC'}\times A'-A''}\times x+\overline{\frac{B'C''-B''C'}{B'C-BC'}\times D+\frac{B''C-BC''}{B'C-BC'}\times D'-D''}=0,$$

vale a dire $\overline{B'C''-B''C'}\times A+\overline{B''C-BC''}\times A'+\overline{BC'-B'C}\times A''\times x+\overline{B'C''-B''C'}\times D+\overline{B''C-BC''}\times D'+\overline{BC'-B'C}\times D''=0$,

e però $x=\frac{\overline{B'C''-B''C'}\times D+\overline{B''C-BC''}\times D'+\overline{BC'-B'C}\times D''}{\overline{B'C''-B''C'}\times A+\overline{B''C-BC''}\times A'+\overline{BC'-B'C}\times A''}$

cioè $x=\frac{\overline{B'C''-B''C'}\times D+\overline{B''C-BC''}\times D'+\overline{BC'-B'C}\times D''}{\overline{AB'-A'B}\times C+\overline{A'B-AB''}\times C+\overline{AB'-A'B'}\times C}$

che è la formola generale, colla quale date tre equazioni, e tre incognite $x$, $y$, $z$ si eliminano le due ultime, e si determina il valore della prima $x$.

354

354. Veniamo finalmente alla formola generale, colla quale reſtano eliminate la prima, e l'ultima delle tre incognite, e ſi determina il valore della ſeconda $y$. Nell'Equazione (Δ) ſi facciano eguali a zero i coefficienti di $x$, $z$, e ſi avrà $Ap+A'q-A''=0$; $Cp+C'q-C''=0$. Ora per determinare i valori delle indeterminate $p$, $q$ da ſoſtituirſi nel ſecondo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Δ) ſi moltiplichi colla indeterminata $r$ la prima di queſte due equazioni, e dal prodotto ſe ne ſottragga la ſeconda così:

| | |
|---|---|
| Prima equazione moltiplic. in $r$ | $Apr+A'qr-A''r=0$ |
| Seconda equazione | $Cp+C'q-C''=0$ |
| Reſiduo (Ξ) | $\overline{Ar-C}\times p+\overline{A'r-C'}\times q-A''r+C=0$ |

nella quale faccio eguale a zero il coefficiente di $p$, onde poter determinare il valore della indeterminata $q$, così: $Ar-C=0$, dalla quale ſi ricava il valore di $r$, che è $r=\frac{C}{A}$, il qual valore ſoſtituito nei due ultimi termini dell'equazione (Ξ) dà $\overline{\frac{A'C}{A}-C'}\times q-\frac{A''C}{A}+C''=0$, cioè $\overline{A'C-AC'}\times q-A''C+AC''=0$, la quale equazione eſibiſce il valore dell'indeterminata $q$, così $q=\frac{A''C-AC''}{A'C-AC'}$. Iſteſſamente per determinare il valore dell'indeterminata $p$, faccio eguale a zero il coefficiente di $q$, così: $A'r-C'=0$ dalla quale ſi ha il valore di $r$, che è $r=\frac{C'}{A'}$, e queſto valore ſoſtituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Ξ) dà $\overline{\frac{AC'}{A'}-C}\times p-\frac{A''C'}{A'}+C''=0$, cioè $\overline{AC'-A'C}\times p-A''C'+A'C''=0$, colla quale ſi determina il valore dell'indeterminata $p$, che trovaſi eſſere $p=\frac{A'C''-A''C'}{A'C-AC'}$. Si ſoſtituiſcano pertanto queſti ritrovati valori delle due aſſunte indeterminate $p$, $q$ nel ſecondo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Δ), e ſi avrà

$$\overline{\frac{A'C''-A'C'}{A'C-AC'}\times B+\frac{A''C-AC''}{A'C-AC'}\times B'-B''}\times y+\overline{\frac{A'C''-A'C'}{A'C-AC'}\times D+\frac{A''C-AC''}{A'C-AC'}\times D'-D''}=0,$$

o ſia $\overline{A'C''-A'C'\times B+A''C-AC''\times B'+AC'-A'C\times B''}\times y+\overline{A'C''-A'C'\times D+A''C-AC''\times D'+AC'-A'C\times D''}=0$, dalla quale ſi ha finalmente il valore della ſeconda incognita $y$ cioè

$$y=\frac{\overline{A'C''-A'C'\times D+A''C-AC''\times D'+AC'-A'C\times D''}}{\overline{A'C''-A'C'\times B+A''C-AC''\times B'+AC'-A'C\times B''}}\text{ o ſia}$$

$$y = \frac{\overline{AC''-A''C}\times D' + \overline{A''C-AC'}\times D' + \overline{AC'-A'C}\times D}{\overline{AB'-A'B}\times C + \overline{A''B-AB''}\times C' + \overline{A'B''-A''B'}\times C}$$, che è la formola

generale, colla quale date tre equazioni, e tre incognite $x$, $y$, $z$, si eliminano la prima, e l'ultima, e si determina il valore della seconda $y$.

355. Ritrovate le formole generali per eliminare una, e due incognite, cerchiamo adesso quelle, che servono per eliminarne tre. Siano pertanto le quattro equazioni generali $Ax+By+Cz+Du+E=o$; $A'x+B'y+C'z+D'u+E'=o$; $A''x+B''y+C''z+D''u+E''=o$; $A'''x+B'''y+C'''z+D'''u+E'''=o$, nelle quali il diverso apice affisso alle lettere A, B, C ec. disegna i coefficienti delle diverse equazioni. Di queste generali equazioni si moltiplichi la prima per la indeterminata $p$, la seconda per $q$, e la terza per $r$; indi dalla loro somma si sottragga la quarta, come segue

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prima eq. molt. in $p$ | $Ap x$ | $+$ | $Bpy$ | $+$ | $Cpz$ | $+$ | $Dpu$ | $+$ | $Ep=o$ |
| Seconda eq. molt. in $q$ | $A'qx$ | $+$ | $B'qy$ | $+$ | $C'qz$ | $+$ | $D'qu$ | $+$ | $Eq=o$ |
| Terza eq. molt. in $r$ | $A''rx$ | $+$ | $B''ry$ | $+$ | $C''rz$ | $+$ | $D''ru$ | $+$ | $E''r=o$ |
| Som. $\overline{Ap+A'q+A''r}\times x$ | | $+$ | $\overline{Bp+B'q+B''r}\times y$ | $+$ | $\overline{Cp+C'q+C''r}\times z$ | $+$ | $\overline{Dp+D'q+D''r}\times u$ | $+$ | $Ep+E'q+E''r=o$ |
| 4. Eq. $A'''x$ | | $+$ | $B'''y$ | $+$ | $C'''z$ | $+$ | $D'''u$ | $+$ | $E'''=o$ |

Ris. (II) $\overline{Ap+A'q+A''r-A'''}\times x + \overline{Bp+B'q+B''r-B'''}\times y + \overline{Cp+C'q+C''r-C'''}\times z +$

$\overline{Dp+D'q+D''r-D'''}\times u + Ep+E'q+E''r-E'''=o$

356. Volendo pertanto eliminare le tre incognite $y$, $z$, $u$, e conseguentemente trovar l'equazione, che contenga la sola incognita $x$, bisognerà supporre eguali a zero i coefficienti delle dette tre incognite, facendo $Bp+B'q+B''r-B'''=o$; $Cp+C'q+C''r-C'''=o$; $Dp+D'q+D''r-D'''=o$. mediante le quali tre equazioni devonsi determinare i valori delle tre indeterminate $p$, $q$, $r$. Per ottenere ciò, mi prevalgo del metodo usato finora, e moltiplico la prima di queste tre equazioni per la indeterminata $s$, e la seconda per la indeterminata $t$: poscia dalla loro somma sottraggo la terza, come segue

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prima eq. molt. in $s$ | $Bsp$ | $+$ | $B'sq$ | $+$ | $B''sr$ | $-$ | $B'''s=o$ | | |
| Secon. eq. molt. in $t$ | $Ctp$ | $+$ | $C'tq$ | $+$ | $C''tr$ | $-$ | $C'''t=o$ | | |
| Somma | $\overline{Bs+Ct}\times p$ | $+$ | $\overline{B's+C't}\times q$ | $+$ | $\overline{B''s+C''t}\times r$ | $-$ | $B'''s-C'''t=o$ | | |
| Terza equazione | $Dp$ | $+$ | $D'q$ | $+$ | $D''r$ | $-$ | $D'''$ | $=o$ | |

Residuo [Σ] $\overline{Bs+Ct-D}\times p + \overline{B's+C't-D'}\times q + \overline{B''s+C''t-D''}\times r - B'''s-C'''t+D'''=o$

Poscia faccio eguali a zero i coefficienti di $p$, $q$ così, $Bs+Ct-D=o$; $B's+C't-D'=o$, colle quali due equazioni si devono determinare i valori delle assunte indeterminate $s$, $t$, per avere i quali moltiplico la prima di queste due equazioni per la indeterminata $m$, e dal prodotto sottraggo la seconda, come segue:

Pri-

Prima eq. molt. per $m$ $\quad Bms+Cmt-Dm=o$
Seconda equazione $\quad B's+C't-D'=o$

Reſiduo [T] $\quad \overline{Bm-B'} \times s+\overline{Cm-C'} \times t-Dm+D'=o$

nella quale facendo eguale a zero il coefficiente di $s$ ſi ha il valore dell'aſſunta indeterminata $m$ così: $m=\frac{B'}{B}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini ultimi dell' equazione [T] dà $\frac{\overline{BC}}{B}-\overline{C'} \times t-\frac{B'D}{B}+D'=o$, mediante la quale ſi trova i valore di $t$, che è $t=\frac{BD-BD'}{\overline{BC}-\overline{BC'}}$: poſcia facendo uguale a zero il coefficiente di $t$, ſi avrà $Cm-C'=o$, e però $m=\frac{C'}{C}$, il qual valore ſoſtituito nel primo, e ultimo termine dell'equazione [T] dà $\frac{\overline{BC'}}{C}-B' \times s-\frac{C'D}{C}+D'=o$, mediante la quale ſi avrà il ricercato valore di $t$ così: $t=\frac{CD'-C'D}{\overline{BC}-\overline{BC'}}$. Ritrovati eſſendoſi dunque i valori di $s$, $t$ ſi ſoſtituiſcano adeſſo negli ultimi due termini dell' Equazione [Σ], con che ſi avrà

$$B'' \times \frac{CD''-C'D}{\overline{BC}-\overline{BC'}}+C'' \times \frac{BD''-BD'}{\overline{BC}-\overline{BC'}}-D'' \times r-B''' \times \frac{CD''-C'D}{\overline{BC}-\overline{BC'}}-C''' \times \frac{BD''-BD'}{\overline{BC}-\overline{BC'}}+D''$$

$=o$, o ſia $\overline{B'C''-B''C'} \times D+\overline{B''C-BC''} \times D'+\overline{BC'-B'C} D'' \times r+\overline{B'''C'-B'C'''} \times D$

$+\overline{BC'''-B'''C} \times D'+\overline{B'C-BC'} \times D'''=o$ e però

$r=\frac{\overline{B'C''-B''C'} \times D+\overline{B''C-BC''} \times D'+\overline{BC'-B'C} \times D''}{\overline{B'C''-B''C'} \times D+\overline{B''C-BC''} \times D'+\overline{BC'-B'C} \times D''}$, ed ecco ritrovato il valore dell'indeterminata $r$.

357. Veniamo ora a determinare il valore della indeterminata $q$, e a tale oggetto facciamo eguali a zero i coefficienti di $p$, $r$ nell'Equazione [Σ] con che ſi avrà $Bs+Ct-D=o$, $B's+C't-D'=o$, per mezzo delle quali due equazioni ſi elimini la indeterminata $s$ con moltiplicare la prima equazione colla indeterminata $m$, indi ſottrarne la ſeconda, come ſegue

Prima eq. molt. in $m$ $\quad Bms+Cmt-Dm=o$
Seconda equazione $\quad B's+C't-D'=o$

Reſiduo [Φ] $\quad \overline{Bm-B'} \times s+\overline{Cm-C'} \times t-Dm+D'=o$

in cui per eliminare la indeterminata $s$ si faccia uguale a zero il suo coefficiente così $Bm - B'' = o$, dalla quale ricavasi il valore dell'introdotta indeterminata $m$, che è $m = \frac{B''}{B}$, il qual valore sostituito negl'ultimi due termini dell'equazione [Φ], si avrà

$\overline{\frac{CB''}{B} - C''} \times t - \frac{B''D}{B} + D'' = o$, o sia $\overline{B'C - BC''} \times t - B''D + BD'' = o$, dalla quale si ricava il valore di $t$, che è $t = \frac{BD'' - B''D}{BC'' - B''C}$. Egualmente per determinare il valore di $s$ faccio eguale a zero il coefficiente di $t$, così $Cm - C'' = o$, da cui si ha $m = \frac{C''}{C}$ il qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Φ) dà

$\overline{\frac{BC''}{C} - B''} \times s - \frac{C''D}{C} + D'' = o$, o sia $\overline{BC'' - B''C} \times s - C''D + CD'' = o$, e però $s = \frac{C''D - CD''}{BC'' - B''C}$, i quali valori di $s$, $t$ se si sostituiranno nel secondo, e nel quarto termine dell'equazione (Σ), ne verrà $B' \times \overline{\frac{C''D - CD''}{BC'' - B''C}} + C' \times \overline{\frac{BD'' - B''D}{BC'' - B''C}} - D' \times q +$

$B''' \times \overline{\frac{CD'' - C''D}{BC'' - B''C}} + C''' \times \overline{\frac{B''D - BD''}{BC'' - B''C}} + D''' = o$, vale a dire

$\overline{\overline{BC'' - B''C} \times D + \overline{B''C - BC''} \times D' + \overline{BC' - B'C} \times D''} \times q + \overline{\overline{B''C''' - B'''C''} \times D +}$

$\overline{B'''C - BC'''} \times D'' + \overline{BC'' - B''C} \times D''' = o$ e però $q =$

$\frac{\overline{B''C''' - B'''C''} \times D + \overline{BC''' - B'''C} \times D'' + \overline{B''C - BC''} \times D'''}{\overline{BC'' - B''C} \times D + \overline{B''C - BC''} \times D' + \overline{BC' - B'C} \times D''}$ che è il cercato valore dell'altra indeterminata $q$.

358. Resta per ultimo da determinarsi il valore della indeterminata $p$, per ottenere il quale faccio uguali a zero i coefficienti di $q$, $r$ nell'equazione [Σ], onde si ha $B's + C't - D' = o$, $B''s + C''t - D'' = o$ mediante cui devonsi determinare i valori delle indeterminate $s$, $t$, per avere i quali moltiplico la prima di queste due equazioni per la indeterminata $m$, e dal prodotto sottraggo la seconda, come segue

| | |
|---|---|
| Prima eq. molt. per $m$ | $B'ms + C'mt - D'm = o$ |
| Seconda equazione | $B''s + C''t - D'' = o$ |
| Residuo [Ψ] | $\overline{B'm - B''} \times s + \overline{C'm - C''} \times t - D'm + D'' = o$ |

in cui facendo uguale a zero il coefficiente di $t$, si ha $C'm - C'' = o$, e però $m = \frac{C''}{C'}$ il qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione [Ψ] ne vie-

viene $\frac{\overline{B'C''}}{C'} - B'' \times s - \frac{C''D'}{C'} + D'' = o$, dalla quale si ottiene il valore di $s$, che è $s = \frac{C''D' - C'D''}{B'C'' - B''C'}$. Parimente per determinare il valore di $s$ faccio uguale a zero il coefficiente di $s$ nell'equazione (Ψ), con che ho $B'm - B'' = o$, e però $m = \frac{B''}{B'}$, il qual valore sostituito nel secondo, e terzo termine dell'equazione Ψ dà $\frac{\overline{B''C'}}{B'} - C'' \times s - \frac{B''D'}{B'} + D'' = o$, ossia $\overline{B''C' - BC''} \times s - B''D' + B'D'' = o$, conseguentemente $s = \frac{B'D'' - B''D'}{\overline{B'C'' - B''C'}}$. Essendosi pertanto ritrovati i valori di $s$, $s$, si sostituiscano adesso nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Σ), dalla quale sostituzione si avrà

$$\overline{B \times \frac{C'D' - C'D''}{B'C'' - B''C'} + C \times \frac{B'D'' - B''D'}{B'C'' - B''C'} - D} \times p + B'' \times \frac{C'D - C''D'}{B'C'' - B''C'} +$$

$$C'' \times \frac{B''D - BD''}{B'C'' - B''C'} + D'' = o, \text{ o sia } \overline{B''C - BC''} \times D + \overline{BC'' - B''C} \times D' + \overline{B'C - BC'} \times D'' \times p$$

$$+ \overline{B'C' - B''C'} \times D' + \overline{B'C' - BC''} \times D'' + \overline{BC'' - B''C} \times D'' = o \text{ e però } p = \frac{\overline{B''C'' - B''C'} \times D' + \overline{B''C' - BC''} \times D'' + \overline{BC' - B''C} \times D''}{\overline{B'C' - B''C'} \times D + \overline{B'C' - BC''} \times D' + \overline{BC' - B''C} \times D''}.$$

359. Ecco, che finalmente abbiamo determinati i valori delle assunte indeterminate $p$, $q$, $r$: che però se si sostituiranno nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (Π) (giacchè gli altri tre si sono supposti uguali a zero), si giungerà alla ricercata formola per la eliminazione di tre incognite. Si avrà pertanto in tal modo la formola generale, con cui date quattro equazioni, e quattro incognite $x$, $y$, $z$, $u$, si eliminano le tre ultime, e si determina il valore della prima $x$. Il calcolo si veda nella prima parte della Tavola II.

360. Passiamo ora a ritrovare la formola generale, che nasce dalla eliminazione delle tre incognite $x$, $z$, $u$, e però che serve a determinare il valore della seconda incognita $y$. Per ottenerla comincio dal fare uguali a zero nell'equazione [Π] i coefficienti di $x$, $z$, $u$ così $Ap + A'q + A''r - A''' = o$; $Cp + C'q + C''r - C''' = o$; $Dp + D'q + D''r - D''' = o$, mediante le quali devonsi determinare i valori delle indeterminate $p$, $q$, $r$, affine di sostituirli nel secondo, e nell'ultimo termine dell'equazione [Π]. A questo fine moltiplico la prima di queste tre equazioni per la indeterminata $s$, e la seconda per la indeterminata $s$, e dalla loro somma sottraggo la terza come segue

Pri-

Prima eq. molt. per $s$ $\quad A'sp+A'sq+A''sr-A'''s=0$
Second. eq. molt. per $t$ $\quad C'tp+C'tq+C''tr-C'''s=0$

Somma $\quad \overline{As+Ct}\times p+\overline{As+Ct}\times q+\overline{A''s+C''t}\times r-A'''s-C'''s=0$
Terza equazione $\quad Dp+D'q+D''r-D'''=0$

Reſiduo $(\beta)$ $\overline{As+Ct-D}\times p+\overline{A's+Ct-D'}\times q+\overline{A''s+C''t-D''}\times r-A'''s-C'''s+D'''=0$

e primieramente per determinare il valore di $p$ faccio eguali a zero i coefficienti di $q$, $r$ così $A's+C't-D'=0$; $A''s+C''t-D''=0$ delle quali due equazioni moltiplico la prima per $m$, e dal prodotto ſottraggo la ſeconda così

Prima eq. molt. per $m$ $\quad A'ms+C'mt-D'm=0$
Seconda Equazione $\quad A''s+C''t-D''=0$

Reſiduo $[\gamma]$ $\quad \overline{A'm-A''}\times s+\overline{C'm-C''}\times t-D'm+D''=0$

nella quale fatto uguale a zero il coefficiente di $s$ ſi ha $A'm-A''=0$ e però $m=\frac{A''}{A'}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini dell'equazione $[\gamma]$ dà

$\frac{\overline{A'C''}}{A'}-C''\times t-\frac{A''D'}{A'}+D''=0$, vale a dire $\overline{A'C''-A''C'}\times t-A'D'+A'D''=0$, da cui ſi ha il valore di $t$, che è $t=\frac{A'D''-A''D'}{A'C''-A''C'}$. Iſteſſamente ſupponendo eguale a zero il coefficiente di $t$, ſi avrà $C'm-C''=0$, e però $m=\frac{C''}{C'}$, e queſto valore ſoſtituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione $[\gamma]$ dà $\frac{\overline{A'C''}}{C'}-A''\times s-\frac{C''D'}{C'}+D''=0$, o ſia $\overline{A'C''-A''C'}\times s-C''D'+C'D''=0$, conſeguentemente $s=\frac{C''D'-C'D''}{A'C''-A''C'}$, che è il cercato valore della indeterminata $s$. Si ſoſtituiſcano pertanto queſti ritrovati valori di $s$, $t$, nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione $[\beta]$, dalla quale ſoſtituzione ne verrà $A\times\frac{\overline{C''D'-C'D''}}{\overline{A'C''-A''C'}}+C\times\frac{\overline{A'D''-A''D'}}{\overline{A'C''-A''C'}}-D\times p-A'''\times\frac{\overline{C''D'-C'D''}}{\overline{A'C''-A''C'}}-C'''\times\frac{\overline{A'D''-A''D'}}{\overline{A'C''-A''C'}}+D'''=0$; o ſia

$\overline{\overline{A'C-A''C'}\times D+\overline{AC''-A'C}\times D'+\overline{AC'-AC'}\times D''}\times p-\overline{A''C'+A'C''}\times D'-\overline{AC''+A''C}\times D''-\overline{A'C+AC'}\times D''=0$ e però

$p=$

$p = \frac{\overline{A''C'''-A'''C''}\times D'+\overline{A'''C'-A'C'''}\times D''+\overline{A'C''-A''C'}\times D'''}{\overline{A'C''-A''C'}\times D+\overline{A''C-AC''}\times D'+\overline{AC'-A'C}\times D''}$ che è il cercato valore dell' indeterminata $p$.

361. Iſteſſamente per determinare il valore di $q$ faccio eguali a zero i coefficienti di $p$, $r$ nell'equazione ($\beta$) così $As+Ct-D=o$; $A''s+C''t-D''=o$. Mediante queſte due equazioni devonſi determinare primieramente i valori di $s$, $t$, per avere i quali moltiplico la prima equazione per la indeterminata $m$, e dal prodotto ſottraggo la ſeconda come ſegue

Prima equaz. molt. per $m$ $Ams+Cmt-Dm=o$
Seconda equazione $A''s+C''t-D''=o$

Reſiduo ($\delta$) $\overline{Am-A''}\times s+\overline{Cm-C''}\times t-Dm+D''=o$

nella quale fatto eguale a zero il coefficiente di $s$, ſi ha $Am-A''=o$, e però $m=\frac{A''}{A}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini dell' equazione ($\delta$) dà

$\overline{\frac{A''C}{A}-C''}\times t-\frac{A''D}{A}+D''=o$, cioè $\overline{A''C-AC''}\times t-A''D+AD''=o$, da cui ſi ricava il valore di $t$, che è $t=\frac{A''D-AD''}{A''C-AC''}$ cercato valore della indeterminata $t$. Parimente ſuppoſto eguale a zero il coefficiente di $t$, ſi ha $Cm-C''=o$, e però $m=\frac{C''}{C}$, e queſto valore ſoſtituito nel primo, e nell'ultimo termine dell' equazione ($\delta$) dà $\overline{\frac{AC''}{C}-A''}\times s-\frac{C''D}{C}+D''=o$, o ſia $\overline{AC''-A''C}\times s-C''D+CD''=o$; e conſeguentemente $s=\frac{CD''-C''D}{A''C-AC''}$, che è il valore dell'altra indeterminata $s$. Eſſendoſi pertanto ritrovati i valori delle due aſſunte indeterminate $s$, $t$, ſi ſoſtituiſcano ora nel ſecondo, e nel quarto termine dell'equazione ($\beta$), con che ſi ha

$$A'\times\overline{\frac{CD''-C''D}{A''C-AC''}}+C'\times\overline{\frac{A''D-AD''}{A''C-AC''}}-D'\times q-A'''\times\overline{\frac{CD''-C''D}{A''C-AC''}}-$$

$$C'''\times\overline{\frac{A''D-AD''}{A''C-AC''}}+D'''=o, \text{ o ſia } \overline{A''C-AC''}\times D+\overline{AC'''-A'''C}\times D'+\overline{A'C-AC'}\times D''\times q$$

$$-\overline{A''C'''+A'''C''}\times D-\overline{A'''C+AC'''}\times D''+\overline{A''C-AC''}\times D'''=o; \text{ e però}$$

$$q=\frac{\overline{A''C'''-A'''C''}\times D+\overline{A'''C-AC'''}\times D''+\overline{AC''-A''C}\times D'''}{\overline{A''C-AC''}\times D+\overline{AC'''-A'''C}\times D'+\overline{A'C-AC'}\times D''}.$$

362.

362. Resta ora da determinarsi il valore della indeterminata $r$. A questo fine faccio eguali a zero i coefficienti di $p$, $q$ nell'equazione $(\beta)$. Così $As+Ct-D=o$; $A's+C't-D'=o$; e primieramente devonsi trovare i valori delle indeterminaae $s$, $t$; per lo che moltiplico la prima di queste due equazioni per l'indeterminata $m$, e dal prodotto sottraggo la seconda così

Prima eq. molt. per $m$ $\quad Amst+Cmt-Dm=o$
Seconda equazione $\quad A's+C't-D'=o$

Residuo $(\epsilon)$ $\quad \overline{Am-A'}\times s+\overline{Cm-C'}\times t-Dm+D'=o$

nella quale fatto eguale a zero il coefficiente di $s$ così $Am-A'=o$, si ha il valore di $m$, che è $m=\frac{A'}{A}$, il qual valore sostituito negli altri due termini dell'equazione $(\epsilon)$ dà $\overline{\frac{A'C}{A}-C'}\times t-\frac{A'D}{A}+D'=o$, o sia $\overline{A'C-AC'}\times t-A'D+AD'=o$; e però $t=\frac{A'D-AD'}{A'C-AC'}$, cercato valore della indeterminata $t$. Istessamente facendo eguale a zero il coefficiente di $t$ così $Cm-C'=o$, si ha $m=\frac{C'}{C}$, il qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione $(\epsilon)$ darà $\overline{\frac{AC'}{C}-A'}\times s-\frac{CD'}{C}+D'=o$, ciò $\overline{AC'-A'C}\times s-CD+CD'=o$; conseguentemente $s=\frac{CD'-CD}{A'C-AC'}$ valore dell'altra indeterminata $s$. Se pertanto si sostituiranno questi ritrovati valori di $s$, $t$ nel terzo, e quarto termine dell'equazione $(\beta)$, si avrà

$$\overline{A''\times\frac{CD'-C'D}{A'C-AC'}+C''\times\frac{A'D-AD'}{A'C-AC'}-D''}\times r-A''\times\frac{CD'-C'D}{A'C-AC'}-C''\times\frac{A'D-AD'}{A'C-AC'}+D''=o;$$

o sia $\overline{\overline{A'C''-A''C'}\times D+\overline{A''C-AC''}\times D'+\overline{AC'-A'C}\times D''}\times r+$

$\overline{A''C'-A'C''}\times D+\overline{AC''-A''C}\times D'+\overline{A'C-AC'}\times D''=o$; e però $r=$

$$\frac{\overline{A'C''-A''C}\times D+\overline{A''C-AC''}\times D'+\overline{AC'-A'C}\times D''}{\overline{A'C''-A''C}\times D+\overline{A''C-AC''}\times D'+\overline{AC'-A'C}\times D'}$$

cercato valore della terza assunta indeterminata $r$.

363. Ora, che ritrovati si sono i valori delle indeterminate $p$, $q$, $r$, null'altro rimane, che sostituirli nel secondo, e ultimo termine dell'equazione (II), con che si avrà la formola generale, con cui date quattro equazioni, e quattro incognite $x$, $y$, $z$, $u$, si eliminano le tre $x$, $z$, $u$, e si determina il valore della seconda $y$. Se ne veda il calcolo nella parte seconda della Tavola II.

364. Ritrovati essendosi i valori di $x$, $y$, determiniamo adesso il volore di $z$, ritrovando la formola generale per la eliminazione delle tre incognite $x$, $y$, $u$. Faccio per-

pertanto nell'equazione (Π) i loro coefficienti uguali a zero così: $Ap+A'q+A''r-A'''=o$; $Bp+Bq+B''r-B'''=o$; $Dp+D'q+D''r-D'''=o$: Con queſte tre equazioni devonſi determinare i valori delle indeterminate $p, q, r$. A queſto fine moltiplico la prima di queſte due per $s$, e la ſeconda per $t$, e dalla loro ſomma ſottraggo la terza, come ſegue

Prima equaz. molt. per $s$ $\quad Asp+A'sq+A''sr-A'''s=o$
Seconda equaz. molt. per $t$ $\quad Btp+B'tq+B''tr-B'''t=o$

Somma $\quad \overline{As+Bt}\times p+\overline{A's+B't}\times q+\overline{A''s+B''t}\times p-A'''s-B'''t=o$
Terza equazione $\quad Dp+D'q+D''r-D'''=o$

Reſiduo (ϑ) $\overline{As+Bt-D}\times p+\overline{A's+B't-D'}\times q+\overline{A''s+B''t-D''}\times r-A'''s-B'''t+D'''=o$

Per determinare in primo luogo il valore di $p$, faccio eguali a zero i coefficienti di $q$, $r$ così: $A's+Bt-D'=o$; $A''s+Bt-D''=o$, colle quali due equazioni determino i valori di $s, t$ moltiplicando la prima per la indeterminata $m$, e adl prodotto ſottraendone la ſeconda, con che ſi ha

Prima eq. molt. per $m$ $\quad A'ms+B'mt-D'm=o$
Seconda eduazione $\quad A''s+B''t-D''=o$

Reſiduo (λ) $\quad \overline{Am-A''}\times s+\overline{Bm-B''}\times t-D'm+D''=o,$

in cui facendo eguale a zero il coefficiente di $s$, ſi ha $A'm-A''=o$, e però $m=\frac{A''}{A'}$, il qual valore ſoſtituito negli ultimi due termini dell'equazione (λ) dà

$\overline{\frac{A''B'}{A'}-B''}\times t-\frac{A''D'}{A'}+D''=o$ quindi $t=\frac{A'D''-A''D'}{A'B''-A''B'}$. Iſteſſamente fatto uguale a $+D''=o$; zero il coefficiente di $t$ ne viene $B'm-B''=o$, conſeguentemente $m=\frac{B''}{B'}$, il qual valore ſoſtituito nel primo e nell'ultimo termine dell'equazione (λ) dà

$\overline{\frac{A'B''}{B'}=A''}\times s-\frac{B''D'}{B'}+D''=o$, e però $s=\frac{B''D'-B'D}{A'B''-A''B'}$. Queſti ritrovati valori di $s, t$ ſi ſoſtituiſcano nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione (ϑ), e ſi avrà

$A\times\frac{B''D'-B'D''}{A'B''-A''B'}+B\times\frac{A'D''-A''D'}{A'B''-A''B'}-D\times p-A'''\times\frac{B''D'-B'D''}{A'B''-A''B'}-B'''\times\frac{A'D''-A''D'}{A'B''-A''B'}+D'''=o$, conſeguentemente $p=$

$\frac{A''B''-A''B'''\times D'+A'B''-A''B'\times D''+A''B'-A'B''\times D'''}{A'B''-A''B'\times D+AB''-A''B\times D'+A'B-AB'\times D''}$. Ora per determinare il valore di $q$, faccio uguali a zero i coefficienti di $p$, $r$ nell'equazione (ϑ) così: $As+Bt-D=o$; $A''s+B''t-D''=o$, colle quali due equazioni determino i valori di $s$,

$t$ moltiplicando la prima equazione per $m$, e dal prodotto ſottraendo la ſeconda come ſegue

$$\begin{array}{rl} \text{Prima equazione molt. per } m & Ams+Bmt-Dm=0 \\ \text{Seconda equazione} & A''s+B''t-D''=0 \\ \hline \text{Reſiduo } (\mu) & \overline{Am-A''}\times s+\overline{Bm-B''}\times t-Dm+D''=0 \end{array}$$

in cui faccio uguale a zero il coefficiente di $s$ così $Am-A''=0$, da cui ricavo $m=\frac{A''}{A}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini dell'equazione $(\mu)$ dà

$\overline{\frac{A''B}{A}-B''}\times t-\frac{A''D}{A}+D''=0$; e però $t=\frac{A''D-AD''}{A''B-AB''}$. Parimente fatto uguale a zero il coefficiente di $t$, ſi ha $Bm-B''=0$; quindi $m=\frac{B''}{B}$, il qual valore ſoſtituito nel primo, e ultimo termine dell'equazione $(\mu)$ dà

$\overline{\frac{AB''}{B}-A''}\times s-\frac{B''D}{B}+D''=0$, conſeguentemente $s=\frac{BD''-B''D}{A''B-AB''}$. Queſti valori di $s$, $t$ ſi ſoſtituiſcano nel ſecondo, e ultimo termine dell'equazione $(\theta)$, e ſi avrà

$$A'\times\overline{\frac{BD''-B''D}{A''B-AB''}}+B'\times\frac{A''D-AD''}{A''B-AB''}-D'\times q-A''\times\overline{\frac{BD''-B''D}{A''B-AB''}}-B''\times\frac{A'D-AD''}{A''B-AB''}+D''=0$$

$$\text{e però } q=\frac{\overline{A'B''-A''B'}\times D+\overline{A''B-AB''}\times D'+\overline{AB''-A''B}\times D''}{\overline{A'B-AB'}\times D+\overline{AB''-A'B}\times D'+\overline{A'B-AB'}\times D'}$$

Reſta da determinarſi il valore di $r$, per lo che faccio uguali a zero i coefficienti di $p$, $q$ nell' equazione $(\theta)$ così: $As+Bt-D=0$; $A's+B't-D'=0$, colle quali due equazioni devo primieramente determinare i valori di $s$, $t$. A tale motivo moltiplico la prima colla indeterminata $m$, e dal prodotto ne ſottraggo la ſeconda come ſegue

$$\begin{array}{rl} \text{Prima equazione molt. per } m & Ams+Bmt-Dm=0 \\ \text{Seconda equazione} & A's+B't-D'=0 \\ \hline \text{Reſiduo } (\xi) & \overline{Am-A'}\times s+\overline{Bm-B'}\times t-Dm+D'=0 \end{array}$$

in cui facendo uguale a zero il coefficiente di $s$, ſi ha $Am-A'=0$, e però $m=\frac{A'}{A}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini dell'equazione $(\xi)$ dà

$\overline{\frac{A'B}{A}-B'}\times t-\frac{A'D}{A}+D'=0$; quindi $t=\frac{A'D-AD'}{AB-AB'}$. Similmente fatto uguale a zero il coefficiente di $t$, ſi ha $Bm-B'=0$, conſeguentemente $m=\frac{B'}{B}$ il qual valo-

re

re ſoſtituito nel primo, e nell' ultimo termine dell'equazione (ξ) dà

$\frac{\overline{AB'}}{B} - A' \times s - \frac{B'D}{B} + D' = o$; e però $s = \frac{BD' - B'D}{AB' - AB'}$. Ora ſi ſoſtituiſcano queſti valori di $s$, $t$ nei due ultimi termini dell' equazione (θ), e ſi avrà

$$A'' \times \frac{\overline{BD' - B'D}}{\overline{AB' - AB'}} + B'' \times \frac{\overline{AD' - AD'}}{\overline{AB' - AB'}} - D' \times r - A''' \times \frac{\overline{BD' - B'D}}{\overline{AB' - AB'}} - B''' \times \frac{\overline{AD' - AD'}}{\overline{AB' - AB'}}$$

$$+ D'' = o; \text{ conſeguentemente } r = \frac{\overline{A''B' - A'B''} \times D + \overline{AB'' - A''B} \times D' + \overline{A'B - AB'} \times D}{\overline{A'B - A'B''} \times D + \overline{AB'' - A'B} \times D' + \overline{A'B - AB'} \times D''}$$

Queſti ritrovati valori di $p$, $q$, $r$ ſi ſoſtituiſcano adeſſo nel terzo, e nell' ultimo termine dell' equazione (Π), con che ſi avrà la formola terza generale eſprimente l' equazione finale, a cui ſi giunge mediante quattro equazioni, e quattro incognite $x$, $y$, $z$, $u$, delle quali $x$, $y$, $u$ ſi eliminano, e ſi determina il valore di $z$. Il Calcolo ſi veda alla prima parte della Tavola III.

365. Reſta per ultimo da ritrovarſi la formola generale per la eliminazione delle tre incognite $x$, $y$, $z$, con cui reſta ancora determinato il valore della quarta incognita $u$. Per lo che nell'equazione (Π) faccio uguali a zero i coefficienti di $x$, $y$, $z$, con che ho $Ap + A'q + A''r - A''' = o$; $Bp + B'q + B''r - B''' = o$; $Cp + C'q + C''r - C''' = o$; poſcia moltiplico la prima per $s$, e la ſeconda per $t$; e dalla loro ſomma ſottraggo la terza, come ſegue

| | |
|---|---|
| Prima equazione molt. per $s$ | $Asp + A'sq + A''sr - A'''s = o$ |
| Seconda equaz. molt. per $t$ | $Btp + B'tq + B''tr - B'''t = o$ |
| Somma | $\overline{As + Bt} \times p + \overline{A's + B't} \times q + \overline{A''s + B''t} \times r - A'''s - B'''t = o$ |
| Terza equazione | $Cp + C'q + C''r - C''' = o$ |
| Reſiduo (σ) | $\overline{As + Bt - C} \times p + \overline{A's + B't - C'} \times q + \overline{A''s + B''t - C''} \times r - A'''s - B'''t + C''' = o$ |

E primieramente per determinare il valore di $p$ faccio eguali a zero i coefficienti di $q$, $r$, onde ho $A's + B't - C' = o$; $A''s + B''t - C'' = o$; indi moltiplico la prima per la indeterminata $m$, e dal prodotto ne ſottraggo la ſeconda come ſegue

| | |
|---|---|
| Prima equaz. molt. per $m$ | $A'ms + B'mt - C'm = o$ |
| Seconda equazione | $A''s + B''t - C'' = o$ |
| Reſiduo (σ) | $\overline{A'm - A''} \times s + \overline{B'm - B''} \times t - C'm + C'' = o$ |

in cui facendo uguale a zero il coefficiente di $s$, ſi ha $A'm - A'' = o$, e però $m = \frac{A''}{A'}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini dell' equazione (σ) dà

$\frac{\overline{A''B}}{A'} - B'' \times t - \frac{A''C}{A'} + C'' = o$; quindi $t = \frac{A''C - A'C''}{A''B - A'B''}$. Parimente fatto uguale a zero il coefficiente di $t$, si ha $B'm - B'' = o$; e però $m = \frac{B''}{B'}$, il qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione ($\sigma$) dà

$\frac{\overline{A'B''}}{B''} - A'' \times s - \frac{B''C}{B''} + C'' = o$; conseguentemente $s = \frac{B'C'' - B''C'}{A''B' - A'B''}$. Che se si sostituiranno questi valori di $s$, $t$ nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione ($\sigma$), si avrà

$$A \times \overline{\frac{BC'' - B''C}{A''B - A'B''}} + B \times \frac{A''C - A'C''}{A''B - A'B''} - C \times p - A''' \times \overline{\frac{BC'' - B''C}{A''B - A'B''}} -$$

$$B''' \times \overline{\frac{A''C - A'C''}{A''B - A'B''}} + C''' = o; \text{ e però}$$

$$p = \frac{\overline{A'B'' - A''B'} \times C' + \overline{A''B - A'B''} \times C'' + \overline{A'B' - A''B} \times C'''}{\overline{AB' - A'B} \times C + \overline{A'B - AB''} \times C + \overline{AB' - A'B} \times C''}$$

Determinato il valore di $p$, si determinerà il valore di $q$ con fare uguali a zero i coefficienti di $p$, $r$ nell'equazione ($\sigma$); onde si ha $As + Bt - C = o$; $A''s + B''t - C'' = o$, la prima delle quali moltiplico per $m$, e dal prodotto sottraggo la seconda come segue

| | |
|---|---|
| Prima equazione molt. per $m$ | $Ams + Bmt - Cm = o$ |
| Seconda equazione | $A''s + B''t - C'' = o$ |
| Residuo ($\tau$) | $\overline{Am - A''} \times s + \overline{Bm - B''} \times t - Cm + C'' = o$ |

nella quale faccio eguale a zero il coefficiente di $s$, onde ho $Am - A'' = o$, e però $m = \frac{A''}{A}$, il qual valore sostituito negli altri due termini dell'equazione ($\tau$) dà

$\frac{\overline{A''B}}{A} - B'' \times t - \frac{A''C}{A} + C'' = o$; quindi $t = \frac{A''C - AC''}{A'B - AB''}$. Parimente fatto uguale a zero il coefficiente di $t$, si ha $Bm - B'' = o$; e però $m = \frac{B''}{B}$, il qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione ($\tau$), dà

$\frac{\overline{AB''}}{B} - A'' \times s - \frac{B''C}{B} + C'' = o$; conseguente $s = \frac{BC'' - B''C}{A''B - AB''}$. Si sostituiscano pertanto questi valori di $s$, $t$ nel secondo, e nell'ultimo termine dell'equazione ($\sigma$), e si avrà

A' X

$$A' \times \frac{\overline{BC''-B'C}}{\overline{A''B-AB''}} + B' \times \frac{\overline{A''C-AC''}}{\overline{A''B-AB''}} - C' \times q - A'' \times \frac{\overline{BC''-B'C}}{\overline{A'B-AB''}} - B''' \times \frac{\overline{A''C-AC''}}{\overline{A''B-AB''}} + C''' = o$$

conſeguentemente $q = \dfrac{\overline{A'B''-A''B'} \times C + \overline{A''B-AB''} \times C' + \overline{AB'-A''B} \times C''}{\overline{A'B-AB'} \times C + \overline{AB-A'B} \times C' + \overline{A'B-AB'} \times C''}$

Finalmente per avere il valore di $r$ faccio uguali a zero i coefficienti di $p$, $q$ nell' equazione $(\pi)$ così $As+Bt-C=o$; $A's+B't-C=o$, la prima delle quali moltiplico coll' indeterminata $m$; indi dal prodotto ne ſottraggo la ſeconda come ſegue

Prima equazione molt. per $m$ $\quad Ams+Bmt-C=o$
Seconda equazione $\quad A's+B't-C=o$

Reſiduo $(\rho)$ $\quad \overline{Am-A'} \times s + \overline{Bm-B'} \times t - Cm + C = o$

in cui faccio uguale a zero il coefficiente di $s$, onde ho $Am-A'=o$, e però $m = \frac{A'}{A}$, il qual valore ſoſtituito negli altri due termini dell' equazione $(\rho)$ dà

$\overline{\frac{A'B}{A} - B'} \times t - \frac{A'C}{A} + C = o$; quindi $t = \frac{A'C-AC'}{AB-AB'}$. Parimente fatto eguale a zero il coefficiente di $t$, ſi ha $Bm-B'=o$, e però $m = \frac{B'}{B}$, il qual valore ſoſtituito nel primo, e nell' ultimo termine dell' equazione $(\rho)$ dà $\overline{\frac{AB'}{B} - A'} \times s - \frac{B'C}{B} + C = o$; quindi $s = \frac{BC'-B'C}{AB-AB'}$. Queſti ritrovati valori di $s$, $t$ ſi ſoſtituiſcano nei due ultimi termini dell' equazione $(\pi)$, e ſi avrà

$$A'' \times \frac{\overline{BC'-B'C}}{\overline{AB-AB'}} + B'' \times \frac{\overline{A'C-AC'}}{\overline{AB-AB'}} - C'' \times r - A''' \times \frac{\overline{BC'-B'C}}{\overline{AB-AB'}} - B''' \times \frac{\overline{A'C-AC'}}{\overline{AB-AB'}} + C''' = o,$$

conſeguentemente $r = \dfrac{\overline{AB''-A''B'} \times C + \overline{A''B-AB''} \times C' + \overline{AB'-A'B} \times C''}{\overline{AB''-A''B'} \times C + \overline{A''B-AB''} \times C' + \overline{AB'-A'B} \times C''}$

Reſtano ora per ultimo da ſoſtituirſi queſti valori di $p$, $q$, $r$ nei due ultimi termini dell' equazione $(\Pi)$, lo che facendo, ſi avrà il cercato valore di $u$, come ſi vede nella ſeconda parte della Tavola III.

366. Collo ſteſſo metodo, col quale trovate ſi ſono le formole generali per la eliminazione di una, di due, e di tre incognite, ſi dovrebbe procedere all'invenzione delle formole generali per la eliminazione di cinque, di ſei ec. incognite: vale a dire, che ſe foſſero date cinque equazioni con cinque incognite, delle quali quattro ſi doveſſero eliminare, ſi dovrebbero moltiplicare le quattro prime equazioni per

q'''

quattro indeterminate $p$, $q$, $r$, $s$, cioè la prima per $p$, la ſeconda per $q$ ec. Così date ſei equazioni con ſei indeterminate, delle quali cinque ſi doveſſero eliminare, biſognerebbe moltiplicare le cinque prime equazioni per cinque indeterminate $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ ordinatamente. Quanto più poi creſce il numero delle indeterminate da eliminarſi, tanto più a diſmiſura creſce il calcolo neceſſario per l'invenzione delle formole generali. Che però ſiccome i coefficienti di queſte indeterminate nelle formole generali oſſervano fra loro una certa diſpoſizione, o ſia relazione, baſterà oſſervare le formole già trovate, a fine di ſcoprire per induzione la relazione, che nelle formole generali per qualunque numero d'incognite devono oſſervare i coefficienti delle medeſime. A queſto fine ho meſſo per ordine nella Tavola IV. le formole già trovate, ſulle quali fare le oſſervazioni opportune per l'invenzione delle altre.

367. Ora dalla oſſervazione di queſte formole immediatamente ſi ſcorgono quattro regole. La prima è, che qualunque formola ha altrettanti termini, quante ſono le equazioni, e però le incognite date. La ſeconda, che le formole, che eſprimono il valore di altrettante incognite in altrettante equazioni, hanno comune il denominatore. La terza, che, mediante il denominatore delle formole, che ſervono per l'eliminazione di una incognita in due equazioni, e due incognite, ſi ottiene il denominatore, che ſerve per l'eliminazione di due in tre equazioni, e tre incognite; e mediante queſt'ultimo ſi ottiene quello, che ſerve per l'eliminazione di tre incognite in quattro equazioni, e così in ſeguito. La quarta, che mediante il denominatore ſi trovano i differenti numeratori, che eſprimono il valore di ciaſcuna delle incognite contenute nelle date equazioni. Per mezzo di queſte quattro regole ſi poſſono facilmente trovare le formole generali, che ſervono per qualunque numero d'incognite, e di equazioni, e ſi può tralaſciare di far queſti calcoli sì lunghi, e tedioſi per l'invenzione di quelle, che ſervono per un maggior numero d'equazioni, e d'incognite. A ciò fare però è neceſſario primieramente dare il modo di trovare i denominatori comuni alle formole, che ſervono per un qualunque numero d'equazioni, e ſecondariamente il modo di trovare i numeratori differenti, dato eſſendo il denominatore comune.

368. Le formole, che ſervono per due equazioni, ſono $x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}$, $y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}$ (come ſi è veduto ai num. 347., e 348.), delle quali il denominatore comune $AB' - A'B$ coſta di due termini. Mediante queſto denominatore, ſi otterrà quello, che ſerve per tre equazioni, il quale però coſterà di tre termini. Il primo termine ſi ricava da tutto il denominatore precedente $AB' - A'B$ moltiplicato pel coefficiente della terza incognita nella terza equazione; cioè per la lettera C proſſima ſeguente le contenute nel denominatore, la quale deve eſſere affetta dall'apice $''$ immediatamente ſeguente il più alto de' contenuti nello ſteſſo denominatore; onde il primo de' tre termini cercati è $\overline{AB' - A'B} \times C''$. Da queſto primo termine ſi ricavano gli altri due colla ſola variazione degli apici, e de' ſegni: Si avrà cioè il ſecondo diminuendo l'apice maggiore $''$ di una unità, accreſcendo di una unità il proſſimo minore, e mutando i ſegni; però il ſecondo termine ſarà $\overline{A''B - AB''} \times C'$. Si troverà finalmente il terzo mediante il primo diminuendo l'apice maggiore $''$ di due unità, cioè togliendo l'apice $''$ alla lettera C, accreſcendo di due unità il ſecondo proſſimo minore, cioè affiggendo l'apice $''$ a quelle lettere, che non ne hanno alcuno,

no, e cambiando i segni, onde il terzo termine è $\overline{A'B''-A''B'} \times C$. Dunque il cercato denominatore comune per tre incognite, e tre equazioni è $\overline{AB'-A'B} \times C'' + \overline{A''B-AB''} \times C' + \overline{A'B''-A''B'} \times C$.

369. Si cerchi ora il denominatore per quattro equazioni: Si riassuma per ciò il denominatore precedente, che serve cioè per tre equazioni, quale si moltiplichi per la prossima seguente lettera D, che esso non rinchiude, quale lettera D è affetta dall'apice $'''$, che supera di una unità il massimo $''$ contenuto nello stesso denominatore; il prodotto $\overline{AB'-A'B} \times C'' + \overline{A''B-AB''} \times C' + \overline{A'B''-A''B'} \times C \times D'''$, che nasce da questa moltiplicazione è il primo de'quattro termini componenti il denominatore cercato, e dal quale si ricavano gli altri tre. Il secondo si ottiene diminuendo di una unità il massimo apice, accrescendo di una unità il prossimo minore (lasciando gli altri apici quali sono), e mutando i segni; onde il secondo termine è $\overline{A'B-AB'} \times C''' + \overline{AB'''-A'''B} \times C' + \overline{A'''B'-A'B'''} \times C \times D''$. Il terzo si ha diminuendo nel primo l'apice massimo di due unità, e accrescendo di due unità il secondo prossimo minore, e di più cambiando i segni; e però il terzo termine è $\overline{A''B-AB''} \times C' + \overline{AB''-A''B} \times C''' + \overline{A''B'''-A'''B''} \times C \times D'$. Finalmente per avere il quarto si diminuisce nel primo termine di tre unità l'apice massimo, si accresce di tre unità il terzo minore seguente, e si mutano i segni; onde il quarto termine è $\overline{A'B'''-A'''B'} \times C' + \overline{A'''B''-A''B'''} \times C' + \overline{A''B'-A'B''} \times C''' \times D$. La somma poi di questi quattro termini dà il denominatore cercato.

370. Collo stesso metodo si procederà all'invenzione del denominatore per cinque equazioni, e cinque incognite; cioè si moltiplicherà il denominatore ora trovato per $E'''$, e il prodotto sarà il primo de'cinque termini, mediante il quale colle sopraddette variazioni di apici, e di segni si otterranno gli altri quattro.

371. Ritrovato in tal modo il denominatore, passiamo ora a cercare i rispettivi numeratori, che somministrano il valore di qualunque incognita nato dall'eliminazione delle altre. Dato per esempio il denominatore, che serve per tre equazioni, e tre incognite, si cerchino i rispettivi numeratori per le tre incognite $x$, $y$, $z$. Si cangi la lettera C in D, e si mutino i segni; questa mutazione darà il numeratore per l'ultima incognita $z$: Ora se a questo numeratore si muterà la lettera B in C, e si muteranno i segni, si avrà il numeratore per la seconda incognita $y$, e se finalmente a questo secondo numeratore si cambierà la lettera A in B, e si cambieranno i segni, si avrà il numeratore della prima incognita $x$. La serie di quest'operazione abbastanza si vede nelle formole riportate nella Tavola IV.

372. Similmente dato il denominatore per quattro equazioni, si avrà il numeratore, che serve per l'ultima incognita $u$ cambiando la lettera D in E, e cambiando i segni: per mezzo di questo numeratore si avrà quello, che serve per la penultima $z$ mutando la lettera C in D, e mutando i segni: si avrà quello, che serve per la seconda $y$ col mutare al denominatore, che serve per $z$, la lettera B in C, e col mutare i segni; e finalmente si avrà quello, che serve per la prima $x$ col cambiare a quest'ultimo l'A in B, e col cambiare i segni,

373.

373. Generalmente dunque dato il denominatore si troveranno i numeratori colla seguente regola. Si cambierà nel denominatore la lettera, che serve di coefficiente all'ultima incognita in quella, che rappresenta il termine affatto cognito, si muteranno i segni, e così si avrà il numeratore, che esprimerà il valore dell'ultima incognita: si troverà il numeratore che dà il valore della penultima mutando i segni al numeratore poco fa trovato, e cambiando la lettera che serve di coefficiente a questa penultima in quella, che serve di coefficiente all'ultima; e così successivamente per gli altri numeratori.

374. Quì poi si osservi, che ciascuno de'numeratori apparterrà a quella incognita, il coefficiente della quale non si troverà fra le lettere componenti lo stesso numeratore; così la lettera A non si troverà nel numeratore, che esprime il valore di $x$, perchè di $x$ nelle equazioni date il coefficiente è A quantunque affetta da diversi apici: Nel numeratore, che esprime il valore di $y$ non si troverà la lettera B, perchè B, quantunque affetta da diversi apici, è il coefficiente di $y$ nelle date equazioni. Lo stesso si dica rispetto alle altre incognite, qualunque sia il loro numero, e il numero delle equazioni.

374. Affinchè si veda il modo di usare queste formole, lo che per altro per se stesso è chiarissimo, proporrò un Problema a tre equazioni, e tre incognite, che è il seguente.

375. Problema. Cercasi il numero de'piedi solidi d'acqua, che in tempo uguale scaricherà ciascuna di tre fontane, la prima delle quali ne scarica il triplo della seconda più il duplo della terza; la seconda ne scarica quanto la prima meno 9. volte la scaricata dalla seconda più 27 piedi; La terza ne scarica $\frac{2}{9}$ della seconda più $\frac{2}{9}$ della prima meno 7 piedi.

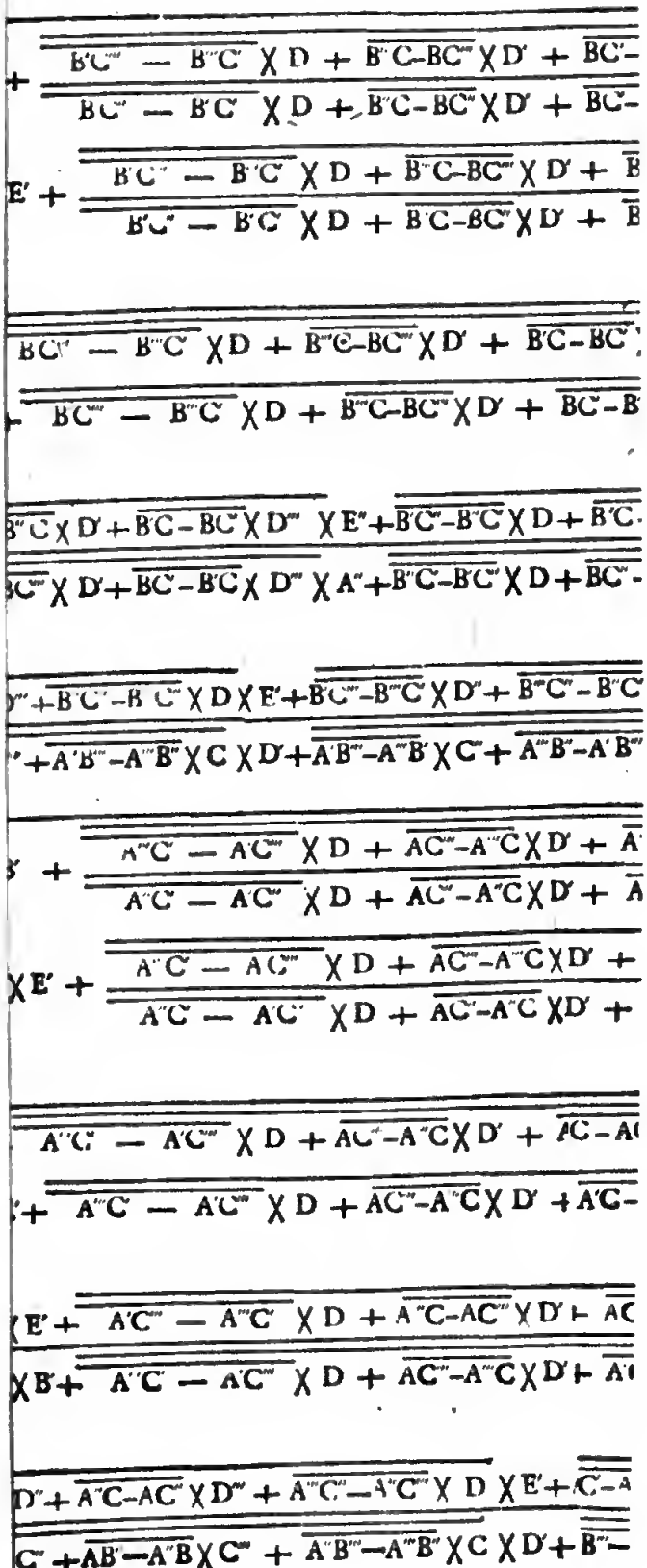
376. Ris. Relativamente alle tre date condizioni, si hanno le tre seguenti equazioni $x=3y+2z$; $y=x-9z+27$; $z=\frac{2}{9}y+\frac{2}{9}x-\frac{7}{9}$, e liberando quest'ultima dalle frazioni $9z=2y+2x-7$; ossia fatta l'eguaglianza a zero $x-3y-2z=0$; $y-x+9z-27=0$; $9z-2y-2x+7=0$, cioè ordinandole per $x$, $y$, $z$, $x-3y-2z=0$; $-x+y+9z-27=0$; $-2x-2y+9z+7=0$. Poichè tre sono le incognite, e tre le equazioni, devonsi prendere le formole generali, che servono alla eliminazione di due incognite. Si determinino pertanto i valori delle indeterminate di queste formole, con che si avrà $A=1$, $B=-3$, $C=-2$, $D=0$; $A'=-1$, $B'=+1$, $C'=9$, $D'=-27$; $A''=-2$, $B''=-2$, $C''=9$, $D''=7$. Si sostituiscano adesso questi valori nella prima delle tre formole per tre equazioni nella Tav. IV. la quale diventerà

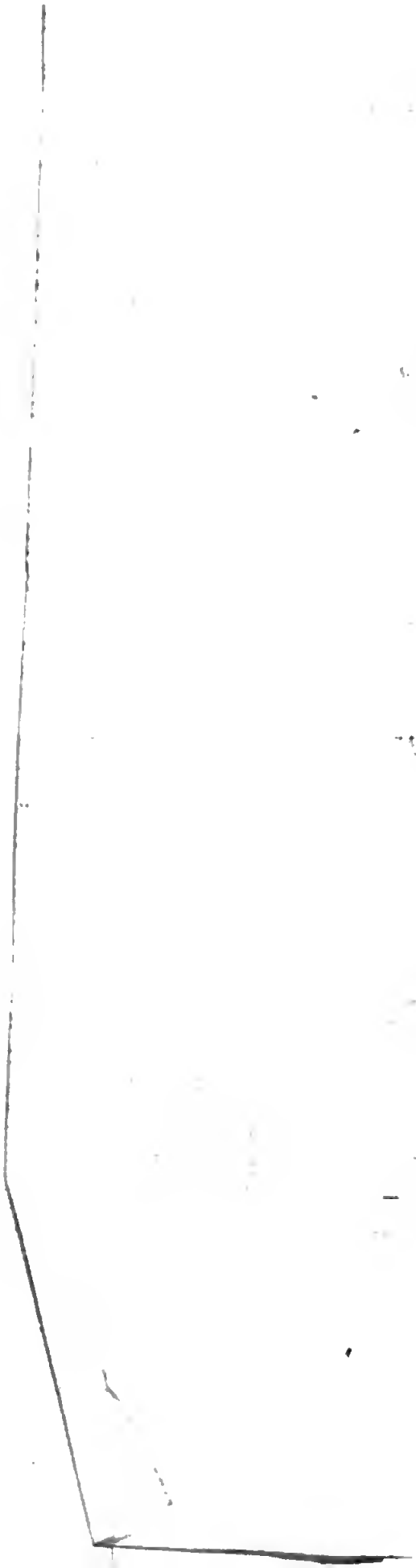
$$x=\frac{1\times\overline{-2}+3\times 9\times 7-3\times\overline{9+2\times\overline{-2}}\times-27}{1\times 1+1\times\overline{-3}\times 9-2\times\overline{-3-1\times\overline{-2}}\times 9-1\times\overline{-2+2\times 1\times\overline{-2}}}=$$

$$\frac{-\overline{-2+27}\times 7-\overline{-27-4\times\overline{-27}}}{1-\overline{3\times 9+6+2\times 9+2+2\times\overline{-2}}}=\frac{25\times 7-31\times-27}{-2\times 9+8\times 9+4\times-2}=\frac{175+837}{-18+72-8}=\frac{1012}{46}=22$$

Ed ecco ritrovato il valore di $x$, che è 22. Si sostituiscano ora nella seconda formola i valori delle indeterminate di questa formola, e si avrà

$y=$





$$y=\frac{1\times 9+1\times -2\times 7-2\times -2-1\times 9\times -27}{1\times 1+1\times -3\times 9-2\times -3-1\times -2\times 9-1\times -2+2\times 1\times -2}=$$

$$\frac{9-2\times 7+4-9\times -27}{1-3\times 9+0+2\times 9+2+2\times -2}=\frac{7\times 7-5\times -27}{-2\times 9+8\times 9+4\times -2}=\frac{49+135}{-18+72-8}=\frac{184}{46}=4$$

Il valore dunque della ſeconda incognita $y$ è 4. Si ſoſtituiſcano finalmente nella terza formola i valori delle indeterminate di queſta formola, onde avere il valore di $z$, che fatta la ſeguente operazione ſi troverà eſſere 5.

$$z=\frac{-1\times -3-1\times 1\times 7+1\times -2+2\times -3\times -27}{1\times 1+1\times -3\times 9-2\times -3-1\times -2\times 9-1\times -2+2\times 1\times -2}=$$

$$\frac{3-1\times 7-2-6\times -27}{1-3\times 9+6+2\times 9+2+2\times -2}=\frac{2\times 7-8\times -27}{-2\times 9+8\times 9+4\times -2}=\frac{14+216}{-18+72-8}=\frac{230}{46}=5.$$

377. Chiunque rifletterà alle fatte ſoſtituzioni, potrà per ſe ſteſſo oſſervare, che ogni qualvolta nelle equazioni condizionali manchera qualche termine, ſuccedendo ciò a motivo che va a zero il ſuo coefficiente, ſarà pure eguale a zero la lettera, che nelle formole gli corriſponde; onde è, che nella formola mancheranno tutti i termini, in cui entrerà quella tal lettera, perchè col moltiplicarſi una quantità in zero il prodotto è zero: Per lo che mancando nella prima equazione condizionale il termine cognito, a cui corriſponde D, ſvaniranno nelle formole tutti i termini, in cui entra queſta lettera D.

378. Inoltre un'altra coſa, a cui riflettere ſi è il ſegno, da cui deve eſſere affetto ciaſcun prodotto parziale, e in ciò ha luogo la regola data al num. 57., mentre ſe il prodotto dei valori corriſpondenti a un termine ſarà poſitivo, e nelle formole queſto tal termine ſia affetto dal ſegno +, o —, tale pure ſarà dopo fatta la ſoſtituzione; ma ſe il prodotto dei valori ſarà negativo, il corriſpondente termine della formola dopo fatta la ſoſtituzione dovrà eſſere affetto da ſegno contrario a quello che aveva; cioè ſe era poſitivo deve eſſere negativo, e ſe era negativo deve eſſere poſitivo.

## ARTICOLO II.

*Della risoluzione delle equazioni di secondo grado, o sia quadrate.*

379. DEf. L'equazione dicesi quadrata, quando la massima potestà, a cui ascende l'incognita, è il quadrato, come sarebbe $x^2 - ab + ac = o$, o pure $x^2 - bx + ad = o$.

380. Le equazioni di secondo grado si distinguono in pure, o sia incomplete, e in affette, o complete. Le prime oltre il termine, che comprende il quadrato dell'incognita, non altro contengono, che quantità cognite, come $x^2 + cx^2 - ab = o$, cioè $x^2 \sqrt{1+c} - ab = o$. Le seconde oltre il quadrato dell'incognita, e le quantità cognite, comprendono ancora un altro termine, in cui entra l'incognita elevata alla prima dimensione, come $x^2 + ax - bc = o$.

381. Per cominciare dalle prime, qualora sia proposta da risolversi una equazione pura di secondo grado, bisogna primieramente prepararla con lasciare da una parte del segno d'egualità il quadrato dell'incognita soltanto affetto dal segno positivo, e libero da qualunque fattore, o divisore, indi trasportare dall'altra parte del segno d'egualità tutte le quantità cognite; nel qual modo tutte le equazioni quadratiche pure, e preparate caderanno sotto questa formola generale $x^2 = \pm p$, in cui $p$ esprime il complesso di tutte le quantità cognite affette da qualsivoglia segno, o positivo, o negativo. Preparata poi così l'equazione, ella si risolverà con estrarre da ambi i membri la radice quadrata così $x = \pm\sqrt{\pm p}$, lo che non altera punto l'equalità, avvegnachè le radici de' quadrati eguali siano eguali. L'espressione poi $\pm\sqrt{\pm p}$ è il valore di $x$, o sia è la radice della equazione. Qualora pel valore dell'incognita si troverà una quantità radicale, ciò vorrà dire, che il Problema non ammette soluzione numerica esatta, ma solo per approssimazione.

382. E quì si osservi, che alla radice della quantità cognita si è prefisso il doppio segno $\pm$ a tenore di quanto si è detto al num. 114; onde è, che le equazioni di secondo grado hanno doppia radice, e però ammettono doppia soluzione: Per lo che le radici della proposta equazione generale $x^2 = \pm p$ sono $+\sqrt{\pm p}$, e $-\sqrt{\pm p}$. Veramente la regola del doppio segno ha luogo non solo nella quantità cognita, ma ancora nell'incognita, così che nel risolversi l'equazione $x^2 = \pm p$ si avrebbe dovuto fare $\pm x = \pm\sqrt{\pm p}$, con che si sarebbero avute quattro combinazioni, cioè $x = +\sqrt{\pm p}$; $-x = -\sqrt{\pm p}$; $x = -\sqrt{\pm p}$; $-x = +\sqrt{\pm p}$, ma poichè le due prime non sono fra loro diverse, siccome non lo sono le due seconde, mentre cambiati i segni a una di loro, lo che si può fare senza turbare l'eguaglianza (giusta il num. 320.), ne ritorna l'altra; come cambiando i segni ad $x = +\sqrt{\pm p}$ si ha $-x = -\sqrt{\pm p}$; e cambiando i segni ad $x = -\sqrt{\pm p}$ si ha $-x = +\sqrt{\pm p}$, però le accennate quattro combinazioni si riducono a due sole espresse da questa formola $x = \pm\sqrt{\pm p}$.

383.

383. Alla quantità cognita $p$ ho prefisso il doppio segno così $\pm$, perchè secondo le diverse condizioni del problema ella può essere o positiva, o negativa. Se tale quantità cognita sarà positiva, l' equazione avrà due radici, una positiva $x = +\sqrt{+p}$, e l'altra negativa $x = -\sqrt{+p}$; ma se la quantità cognita sarà affetta dal segno negativo, l'equazione avrà bensì due radici una positiva, e l'altra negativa così $x = \pm\sqrt{-p}$, ma ambedue saranno immaginarie giusta i num. 114, e 160. Qualora poi si trova immaginario il valore dell' incognita, egli è segno, che il Problema, a cui l'equazione si riferisce, è stato proposto con condizioni ripugnanti, che lo rendono impossibile o in tutto, o in parte, secondo che o tutte, o parte delle radici sono immaginarie.

384. Ho detto, che dell'equazione $x^2 = \pm p$, o sia $x^2 \mp p = o$ le radici sono $x = +\sqrt{\pm p}$, e $x = -\sqrt{\pm p}$. Di fatto in queste due equazioni si trasporti dalla parte del segno, ove è l' incognita, il suo valore, ed eguagliandone una di loro a zero, si moltiplichi una nell'altra, con che ne verrà l'equazione proposta, e ciò mostra abbastanza, che, essendo esse le di lei componenti, ne sono i suoi fattori, e però le sue radici: Mentre per radici di una equazione non altro si intendono, che i valori dell' incognita, che colla stessa incognita sommati, o sottratti, e fra loro moltiplicati, restituiscono la stessa equazione: Ecco il Calcolo

$$\left.\begin{array}{l} x-\sqrt{\pm p} = o \\ x+\sqrt{\pm p} \end{array}\right\} \text{ Fattori}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - x\sqrt{\pm p} \\ \quad + x\sqrt{\pm p} \mp p = o \end{array}$$

Prodotto $x^2 \mp p = o$, e però $x^2 = \pm p$ equazione proposta. Ma passiamo a vedere coll'esempio le dottrine esposte. Proporrò pertanto un Problema generalmente, che poscia applicherò al caso particolare.

385. Prob. 1. Si debbano ritrovare due numeri, de' quali il prodotto sia $ab$, e in oltre la differenza di questi due numeri cercati stia al secondo, come $b$ sta a $b + c$.

386. Risol. Il primo de'due numeri cercati si dica $= x$, e il secondo $= y$. Per la prima condizione proposta sarà $xy = ab$; per la seconda sarà $x - y : y :: b : b + c$, e però $bx - by + cx - cy = by$, cioè $bx + cx = 2by + cy$. Ora dalla prima equazione $xy = ab$ prendo il valore di $y$, che è $y = \frac{ab}{x}$, che sostituisco in luogo di $y$ nella seconda equazione a fine di eliminare questa incognita, con che ho $bx + cx = \frac{2ab^2}{x} + \frac{acb}{x}$. Passo adesso a preparare questa equazione con liberarne primieramente il secondo membro dal denominatore $x$ così $bx^2 + cx^2 = 2ab^2 + abc$, cioè $\overline{b+c} \times x^2 = 2ab^2 + abc$, poscia a liberare l' incognita dal suo coefficiente, a fine di lasciarla sola da una parte del segno d' egualità, lo che ottengo con dividere

tutta l'equazione per $b+c$ così $x^2 = \frac{2ab^2+abc}{b+c}$. Preparata in questo modo l'equazione non resta altro, che risolverla, e ciò si fa con estrarre la radice quadrata da ambi i membri dell'equazione così $x = \pm \sqrt{\frac{2ab^2+abc}{b+c}}$.

387. Paragonando questa ritrovata equazione coll'equazione ecumenica $x^2 = \pm p$ si vede, che è $\frac{2ab^2+abc}{b+c} = +p$.

388. Per avere il valore dell'altro numero cercato $y$ si prenda dall'equazione $xy = ab$ il valore di $x$ così $x = \frac{ab}{y}$, quale si sostituisca nell'equazione $bx+cx = 2by+cy$, e si avrà $\frac{ab^2}{y} + \frac{abc}{y} = 2by+cy$, cioè $ab^2+abc = 2by^2+cy^2$, e liberando l'incognita dal coefficiente, si avrà $\frac{ab^2+abc}{2b+c} = y^2$, e finalmente estraendo da ambi i membri la radice quadrata, si avrà $y = \pm \sqrt{\frac{ab^2+abc}{2b+c}}$.

389. Ma per venire al caso particolare sia $a = 23\frac{1}{3}$; $b = 6$, e però de' due cercati numeri il prodotto $ab = 140$; sia $c = 9$. Sostituendo questi valori numerici nella prima espressione $x = \pm \sqrt{\frac{2ab^2+abc}{b+c}}$, si avrà $x = \pm \sqrt{\frac{1680+1260}{15}} = \pm \sqrt{\frac{2940}{15}}$ $= \pm \sqrt{196} = \pm 14$. Sostituendo poi gli stessi valori numerici nella seconda espressione $y = \pm \sqrt{\frac{ab^2+abc}{2b+c}}$, si avrà $y = \pm \sqrt{\frac{840+1260}{21}} = \pm \sqrt{\frac{2100}{21}} = \pm\sqrt{100} = \pm 10$.

De' cercati numeri adunque il primo $x$ è $= \pm 13$, il secondo $y$ è $= \pm 10$. Di fatto con loro si adempiono le due proposte condizioni, cioè che il loro prodotto $14 \times 10 = 140$ sia $= ab$, e che in oltre sia $b : b+c :: x-y : y$, cioè $6 : 6+9 :: 14-10 : 10$. Il calcolo poi con darci l'uno, e l'altro numero affetto da doppio segno ci fa vedere, che questi numeri soddisfano al proposto Problema tanto prendendoli positivi, come prendendoli negativi, relativamente al senso indiretto del Problema. Se fosse stato $a = 17$; $b = 6$; $c = 9$, fatta la sostituzione di questi valori si sarebbe trovato $x = \pm \sqrt{\frac{2088}{15}}$, o sia $x = \pm \sqrt{\frac{676}{5}}$, vale a dire $x = \pm 26\sqrt{\frac{1}{5}}$; e $y = \pm \sqrt{\frac{1476}{21}}$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{492}{7}}$, le quali due radici essendo irrazionali danno a vedere (giusta il num. 381), che nell'ipotesi di $a = 27$, $b = 6$, $c = 9$ il Problema non è aritmeticamente risolubile.

390. Prob. 2. Dato il tempo, in cui un grave percorre un dato spazio, si debba ritrovare il tempo, in cui percorrerà un'altro spazio dato.

391. Risol. Il tempo dato si dica $= t$, lo spazio percorso $= s$, lo spazio da per-

percorrerſi $= a$, il tempo cercato $= x$. Poichè gli ſpazj percorſi dai corpi cadenti ſtanno fra loro in ragione duplicata dei tempi, ſarà $s : a :: t^2 : x^2$, e però $sx^2 = at^2$, e liberando l'incognita dal coefficiente, ſi avrà $x^2 = \frac{at^2}{s}$, ed eſtraendo da ambi i membri la radice quadrata ſarà $x = \pm \sqrt{\frac{at^2}{s}}$. Ora ponendo, che il tempo dato $t$ ſia $= 3$ ſecondi, lo ſpazio $s$ percorſo in queſto tempo $= 146$ piedi, lo ſpazio $a$ da percorrerſi $= 35834\frac{8}{9}$ piedi, ſe ſi ſoſtituiranno queſti valori ſi avrà $x = \pm \sqrt{\frac{32314}{146}} = \pm\sqrt{2209} = 47$. Il tempo cercato adunque è di 47 ſecondi.

392. Veniamo alle equazioni quadrate affette, o complete. La formola generale, che rappreſenta tutte le quadratiche affette, che diverſamente riſultano dalla diverſità de' ſegni, che poſſono convenire a ciaſcuno de' loro termini, è la ſeguente $x^2 \pm px \pm q = 0$, in cui la lettera $p$ rappreſenta il compleſſo delle quantità cognite, che moltiplicano l'incognita elevata alla prima dimenſione, e la lettera $q$ eſprime il compleſſo delle quantità, che formano il termine cognito dell'equazione.

393. Per riguardo ai ſegni da' quali poſſono eſſere affetti i termini delle equazioni di ſecondo grado, la propoſta equazione generale $x^2 \pm px \pm q = 0$ ſi riſolve nelle quattro ſeguenti.

I. $x^2 + px + q = 0$
II. $x^2 - px - q = 0$
III. $x^2 + px - q = 0$
IV. $x^2 - px + q = 0$.

394. Il modo di preparare queſte equazioni ſi è di fare, che la maſſima poteſtà dell'incognita reſti poſitiva, e immune tanto da fattori, come da diviſori, e in oltre che da una parte del ſegno d'egualità reſtino tutti i termini, in cui entra l'incognita, e dall'altra parte rimangano le ſole quantità cognite: Per Eſempio eſſendo propoſta l'equazione $ax^2 - dx^2 = ab - cx + ac$, ella ſi preparerà così $x^2 + \frac{cx}{a-d} = \frac{ab+ac}{a-d}$.

395. Preparata in queſto modo l'equazione deveſi paſſare a riſolverla. Il modo pertanto di riſolverla ſi è di eſtrarre la radice quadrata da ambi i membri dell'equazione. Ma affinchè, eſtraendo la radice quadrata dal primo membro, in cui ſi ritrova l'incognita, ſi poſſa ſeparare l'incognita dalle quantità cognite, biſogna che queſto primo membro ſia un quadrato perfetto, e ſiccome nella formola $x^2 \pm px = \mp q$ egli non lo è, però tutto l'artifizio conſiſte in ridurre il primo membro ad eſſere un quadrato perfetto. Per ottenere ciò, oſſervo, (giuſta il num. 771. del Tomo I.) che gli elementi, da' quali riſulta un quadrato di radice binomia ſono il quadrato della prima parte del binomio, più il doppio del prodotto della prima parte nella ſeconda, più il quadrato della ſeconda parte. Dunque riſpetto al primo membro $x^2 \pm px$ dell'equazione prendendoſi $x$ per una parte della radice, ſarà il coefficiente del ſecondo termine cioè $p$, il doppio dell'altra parte, e però l'altra parte

te sarà $\frac{1}{2}p$: Quindi, perchè coll'aggiungersi una stessa quantità a quantità eguali non si turba l'eguaglianza, se si aggiungerà all'uno, e all'altro membro dell'equazione il quadrato di $\frac{1}{2}p$, che è $\frac{1}{4}p^2$, si avrà $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 = +\frac{1}{4}p^2 \mp q$, il di cui primo membro è un quadrato perfetto, che ha per radice $x \pm \frac{p}{2}$: Per lo che estraendo la radice quadrata da ambi i membri della proposta equazione, si avrà $x \pm \frac{p}{2} = \pm\sqrt{+\frac{p^2}{4} \mp q}$, e però $x = \mp\frac{p}{2} \pm \sqrt{+\frac{p^2}{4} \mp q}$. Conseguentemente avendo particolar riflesso alla varietà de' segni, ciascuna delle quattro equazioni proposte al num. 393. si risolverà come segue

I. $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$

II. $x = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{+\frac{1}{4}p^2 + q}$

III. $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$

IV. $x = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$

396. Osserviamo adesso queste formole per determinare le spezie delle radici di ciascuna di queste equazioni. E primieramente se si rifletterà alle formole del num. 393. si vedrà apertamente, che solamente la prima, e la quarta in cui l'ultimo termine è positivo possono avere radici immaginarie, lo che succederà in caso, che sia $\frac{1}{4}p^2 < -q$, nel qual caso la quantità $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ essendo negativa, è necessariamente immaginaria. Ma supposto che niuna di queste formole ammetta radici immaginarie, consideriamo le stesse formole già risolute giusta il num. 395 per determinare lo stato delle radici di ciascuna, vale a dire se sono positive, o negative. E primieramente poichè in ciascuna di queste formole si ha $\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$ i nella prima formola sarà $\frac{1}{2}p > \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, e però l'una, e l'altra radice di questa equazione sarà negativa, cioè tanto $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, come $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. Per la stessa ragione la seconda, e terza formola, in cui è $\frac{1}{2}p < \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ avrà una radice positiva; e l'altra negativa; vale a dire della seconda for-

formola la radice positiva sarà $+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$, e la negativa $+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$; della terza formola la radice positiva sarà $-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$, la negativa $-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$. Finalmente la quarta formola, in cui è $\frac{1}{2}p>\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, ha tutte due le radici positive. Rispetto alla prima, e quarta formola resta da osservarsi il caso, in cui sia $\frac{1}{4}p^2=q$, nel qual caso sarà $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0$, e però queste equazioni avranno ambe le radici eguali, cioè l'una, e l'altra delle radici della prima formola sarà eguale a $-\frac{1}{2}p$, e della quarta formola a $+\frac{1}{2}p$.

397. Che poi i ritrovati valori siano le vere radici dell'equazione, basta, per accertarsene, moltiplicare fra loro i due valori di una equazione, che se ne vedrà risultare di prodotto la stessa equazione. Prendo pertanto le due ritrovate radici $-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, e $-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ della prima formola $x^2+px+q=0$, e le moltiplico tra loro come segue, trasferendole prima dalla parte dell'incognita, e uguagliandone una a zero

Fattori
$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0 \\ x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} \end{cases}$$

Prodotto
$$\begin{cases} x^2+\frac{1}{2}px-x\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}+\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}+q=0 \\ +\frac{1}{2}px+x\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} \end{cases}$$

Somma $x^2+px+0+0+0+q=0$.

Il prodotto pertanto delle due proposte radici restituendo l'equazione da cui erano state dedotte, fa vedere, che sono le vere radici di tale equazione.

398. Una cosa poi nel precedente prodotto deve osservare, che è comune non solo a tutte le equazioni di secondo grado affette, ma eziandio a tutte le equazioni di qualunque grado siano, come farò vedere a suo luogo, ed è, che il coefficiente del secondo termine non è altro, che la somma delle radici dell'equazione prese con segno mutato, e il termine cognito dell'equazione è il prodotto delle stesse radici. Ma coll'Esempio riduciamo al caso particolare il modo di risolvere le equazioni di secondo grado affette.

399. Prob. 3. Uno si mise a giocare con 150 zecchini, e dopo averne perso un certo numero gli capitò un colpo di fortuna, in cui guadagnando 5518 zecchini venne a rifarsi di quanto aveva perso, e in oltre a raddoppiare tante volte i suoi 150 zecchini, quante ne esprimeva il numero de' rimastigli dalla perdita. Cercasi il numero de' zecchini, che aveva perso.

400.

400. Risol. I 150. zecchini si dicano $=a$, il numero de' persi $=x$, i rimasti dalla perdita saranno stati $a-x$, il guadagno si dica $=b$. Una sola è la condizione in questo Problema proposta, cioè che il guadagno $b$ sia eguale ad $x$ più il prodotto di $x$ in $a-x$, con che si ha l'equazione $x+ax-x^2=b$, e riducendo positivo il termine, in cui l'incognita è elevata alla massima potestà, si avrà $x^2-x-ax=-b$, o sia $x^2+\overline{1+a}\times-x=-b$, equazione, che si riferisce alla IV. formola, per risolvere la quale bisogna primieramente aggiungere ad ambi i membri il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine così $x^2+\overline{1+a}\times-x+\frac{\overline{1+a}^2}{4}=+\frac{\overline{1+a}^2}{4}-b$, indi passare all' estrazione della radice quadrata, con che si avrà $x-\frac{1-a}{2}=\pm\sqrt{\frac{\overline{1+a}^2}{4}-b}$ e però $x=+\frac{1+a}{4}\pm\sqrt{\frac{\overline{1+a}^2}{2}-b}$. Che se in luogo delle lettere si sostituiranno i loro valori numerici, si avrà $x=\frac{151}{2}\pm\sqrt{\frac{22801}{4}-5518}$, cioè $x=\frac{151}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}}$, e però $x=\frac{151}{2}\pm\frac{27}{2}$. Due pertanto sono i numeri, che soddisfano al presente quesito, il primo è $\frac{151+27}{2}=89$, il secondo è $\frac{151-27}{2}=62$, cioè a dire la perdita fatta giusta la proposta condizione può essere stata tanto di 89, come di 62 zecchini. Di fatto se la differenza tra 150, e 89, che è 61, si moltiplicherà per 89, e al prodotto si aggiungerà 89, si avrà 5518: Parimente se la differenza tra 150, e 62, che è 88, si moltiplicherà per 62, e al prodotto si aggiungerà 62, si avrà 5518.

401. Prob. 4. Data dentro il Barometro una qualunque quantità d'aria, cercasi l'altezza, a cui dentro il tubo starà sospeso il mercurio.

402. Risol. L' altezza incognita, a cui deve stare sospeso il mercurio si dica $=x$, si chiami $=a$ la pressione di una colonna aerea, che pesa quanto una colonna egualmente grossa di mercurio alta 28 pollici, sarà $a-x$ la pressione dell'aria rinchiusa dentro il tubo: In oltre, sia $=d$ la quantità d'aria dentro rinchiusa, si faccia $=b$ la lunghezza del tubo, sarà $b-x$ lo spazio, in cui dentro al tubo si dilaterà l'aria rinchiusa. Ma gli spazj, ne' quali una data massa d'aria si dilata sono in ragione reciproca delle forze, che la comprimono, quindi si avrà la seguente proporzione $a:a-x::b-x:d$, e facendo il prodotto de' medj, e degli estremi si avrà $ad=ab-bx-ax+x^2$, o sia $x^2-\overline{b-a}\times x=a\times\overline{d-b}$ equazione, che si riferirebbe alla II. formola se il termine $a\times\overline{d-b}$ fosse positivo, ma perchè egli è necessariamente negativo, però l'equazione si riferisce alla quarta formola. Si aggunga pertanto all'uno, e all'altro membro di questa equazione il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, e si avrà $x^2-\overline{b-a}\times x+\frac{\overline{b+a}^2}{4}=a\times\overline{d-b}+\frac{\overline{b+a}^2}{4}$, e le-

e levando la radice quadrata da ambi i membri ne verrà $x - \frac{b-a}{2} = \pm \sqrt{a \times d - b + \frac{b+a}{4}^2}$, e conseguentemente $x = + \frac{b+a}{2} \pm \sqrt{a \times d - b + \frac{b+a}{4}^2}$.

403. Per venire al caso particolare si ponga eguale a 28 la pressione della colonna aerea, onde sarà $a = 28$, la rinchiusa quantità d'aria $d = 1\frac{11}{28}$, la lunghezza del tubo $b = 38$ pollici; sostituiti questi valori in luogo delle lettere, si avrà $x = \frac{38+28}{2} \pm \sqrt{-36\frac{17}{28} \times 28 + \frac{4356}{4}}$, cioè $x = 33 \pm \sqrt{-1025+1089}$, e però $x = 33 \pm \sqrt{64}$, e finalmente $x = 33 \pm 8$. Due pertanto sono le radici di questa equazione, la prima $x = 33+8 = 41$, la seconda $x = 33-8 = 25$, e questa seconda è la sola, che scioglie il problema proposto; che però la cercata altezza del mercurio nel tubo sarà di 25 pollici. La prima radice poi 41 scioglie il Problema nella supposizione, che (la lunghezza del tubo essendo assai maggiore della data) si cercasse l'altezza, a cui dovrebbesi alzare il mercurio, qualora il peso della colonna aerea si aumentasse di $1\frac{11}{28}$. E quì opportunamente si osservi, che vi sono de' casi, ne' quali tutte le radici di una equazione risolvono ciascuna il Problema nel senso diretto coerentemente alla fatta enunciazione, e tali a cagion d'Esempio sono le due radici del precedente 3. Problema, ma ve ne sono ancora di quelli, in cui le radici sciolgono il Problema in sensi opposti, come succede nel presente per cui trovansi due radici reali, e positive, e pure la sola 25 scioglie direttamente il Problema nel senso proposto. La ragione poi, per cui si trovi l'altra radice 41 si è, perchè ne sarebbe venuta la stessa equazione, e però la stessa soluzione anche dal supporsi $a : a+x :: b+x : d$, per lo che l'equazione trovata deve necessariamente inchiudere le dette due differenti quistioni.

404. Mediante l'introduzione di una nuova incognita si possono ridurre le equazioni di secondo grado affette ad essere pure, ed ecco come. Ho detto al num. 395, che nell'equazione $x^2 \pm px = \pm q$, acciò il primo membro sia un quadrato perfetto, vi si deve aggiungere il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine così $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2$: se pertanto questa quantità si farà eguale al quadrato di una nuova incognita, per Esempio $y$, si avrà $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 = y^2$, e trasponendo il termine cognito $\frac{1}{4}p^2$, sarà $x^2 \pm px = y^2 - \frac{1}{4}p^2$, con che i due termini incogniti dell'equazione si rendono eguali a due altri termini, uno cognito, e l'altro incognito. Stante poi questa ritrovata eguaglianza, se nell'equazione ecumenica $x^2 \pm px = \pm q$ si sostituiranno i due termini $y^2 - \frac{1}{4}p^2$ in luogo del primo membro, ne verrà $y^2 - \frac{1}{4}p^2 = \pm q$, e però $y^2 = + \frac{1}{4}p^2 \pm q$, ed estraendo finalmente da ambi i membri la radice quadrata, si avrà per ultimo $y = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$.

Qualora pertanto vogliasi ridurre all' espressione di quadratica pura una equazione affetta del secondo grado, si operi in questo modo: si eguagli ad una nuova incognita l' incognita dell' equazione proposta accresciuta della metà del coefficiente del secondo termine, poscia si inalzi al quadrato l' uno, e l' altro membro di questa equazione, indi si trasporti dalla parte della nuova incognita il termine affatto cognito, finalmente si sostituisca nell' equazione proposta questo secondo membro in luogo del primo, e se ne avrà una pura eguale alla proposta affetta, come si cercava. Ma veniamo all' Esempio.

405. Prob. 5. Cercansi i due lati di uno spazio di terra di piedi quadrati 4465, e de' quali lati la differenza è 48.

406. Risol. De' lati cercati il maggiore si dica $= x$, il minore $= y$, lo spazio dato di piedi quadrati $4465 = a$, la differenza $48 = b$. Poichè lo spazio dato risulta dal prodotto de' lati, sarà $xy = a$, e la differenza de' lati essendo $b$, si avrà $x - y = b$. Ora mediante queste due equazioni si elimini una incognita, per esempio la $y$, lo che si ottiene con prendere dalla prima equazione $xy = a$ il valore di $y$ così $y = \frac{a}{x}$, e sostituirlo nella seconda equazione $x - y = b$ in questo modo $x - \frac{a}{x} = b$, cioè, liberando il secondo termine dal denominatore, $x^2 - a = bx$, e però $x^2 - bx = a$. A fine di ridurre ad equazione pura questa equazione affetta, faccio $x - \frac{1}{2}b = z$, e quadrando l'uno, e l'altro membro ho $x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 = z^2$, e trasponendo il termine cognito $x^2 - bx = z^2 - \frac{1}{4}b^2$. Ora nell'equazione $x^2 - bx = a$ sostituisco $z^2 - \frac{1}{4}b^2$ in vece del primo membro, onde ho $z^2 - \frac{1}{4}b^2 = a$, cioè $z^2 = a + \frac{1}{4}b^2$ equazione pura, che risolvo mediante l'estrazione della radice quadrata così $z = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}b^2}$. Ma la $z$ si è fatta eguale a $x - \frac{1}{2}b$, quale valore rimesso in luogo di $z$ darà finalmente $x - \frac{1}{2}b = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}b^2}$, e però $x = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2}$, risoluzione, che in sostanza non è differente dalla già data per le quadratiche affette. Che se questo valore di $x$ si sostituirà nell' equazione $x - y = b$, si avrà $\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2} - y = b$, e $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}bp}$ valore dell' altro lato cercato $y$. Si rimettano adesso in luogo delle lettere i loro valori numerici, e si avrà $x = 24 \pm \sqrt{4465 + 576}$, cioè $x = 24 \pm \sqrt{5041}$ cioè $x = 24 \pm 71$, e $y = -24 \pm 71$. Valendo il segno superiore in queste due espressioni trovasi $x = 95$, e $y = 47$, valendo poi il segno inferiore il lato $x$ è $= -47$, e il $y = -95$, e tanto i primi, come i secondi numeri soddisfanno al Problema, mentre il loro prodotto è 4465, e la loro differenza è 48. Questi secondi numeri poi indicano, che i cercati lati devonsi prendere in una direzione opposta ai primi; che pe-

però ne verrà un quadrato uguale al primo, ma a lui oppoſto di ſito, e queſta ſoluzione fa vedere, che il Problema pativa doppio ſenſo, uno diretto, e l'altro indiretto.

407. Alcune volte le condizioni, che accompagnano il Problema ammettono quantità radicali, che involgono l'incognita, e in tal caſo per preparare l'equazione biſogna primieramente liberarla dai radicali. Se nell'equazione propoſta v'è un ſol termine radicale, baſta laſciarlo ſolo da una parte del ſegno d'egualità, e trasferire all'altra parte tutti gli altri, indi alzare l'uno, e l'altro membro alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo, e in queſto modo ſi farà egli ſvanire: Come per far ſvanire il radicale dall'equazione $\sqrt[m]{ax^2+c^2}^n + ab = cd$, ſi farà $\sqrt[m]{ax^2+c^2}^n = cd - ab$, ed elevando l'uno, e l'altro membro alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo, ſi avrà $ax^2+c^2 = \overline{cd-ab}^m$, che ſe ſi vorrà riſolvere queſta equazione, ſi farà primieramente $ax^2+c^2 = \overline{cd-ab}^{\frac{m}{n}}$, indi $x^2 = \frac{\overline{cd-ab}^{\frac{m}{n}} - c^2}{a}$, finalmente $x = \pm \sqrt{\frac{\overline{cd-ab}^{\frac{m}{n}} - c^2}{a}}$.

408. Eſſendovi più radicali, eſſi ſi faranno ſvanire mediante una ſemplice ſoſtituzione nel ſeguente modo. Si debbano far ſvanire i radicali dalla ſeguente equazione $ab = \sqrt[3]{cx} + \sqrt[3]{dx}$. Ciaſcun radicale ſi faccia eguale a una nuova incognita, quale ſi ſoſtituiſca nell'equazione in luogo del corriſpondente radicale, con che ſi avrà primieramente in luogo dell'equazione propoſta una nuova equazione, la quale non comprenderà radicali; in ſecondo luogo ſi avranno altrettante equazioni a due termini, quanti erano i radicali nell'equazione propoſta, e ciaſcuna di queſte equazioni ſi renderà libera dal radicale con alzare i ſuoi due membri alla poteſtà indicata dall'eſponente del vincolo: Per lo che non reſterà più, che far ſvanire le incognite introdotte, e ciò otterraſſi così. Si faccia adunque $\sqrt[3]{cx} = y$, $\sqrt[3]{dx} = z$, e ſi avranno queſte tre equazioni $ab = y + z$; $y^3 = cx$; $z^3 = dx$. Dalla prima ſi ha $y = ab - z$, dal qual valore ſoſtituito nella ſeconda equazione in luogo di $y^3$, ne riſulta $a^3b^3 - 3a^2b^2z + 3abz^2 - z^3 = cx$, la quale mediante la ſoſtituzione del valore di $z^3$ trovati eſſere $a^3b^3 - 3a^2b^2z + 3abz^2 - dx = cx$; dalla quale ricavo il valore di $z^2$ facendo al ſolito $z^2 = \frac{cx + dx + 3a^2b^2z - a^3b^3}{3ab}$. Moltiplico adeſſo per $z$ i due membri di queſta equazione, e mi viene $z^3 = \frac{cxz + dxz + 3a^2b^2z^2 - a^3b^3z}{3ab}$, nella quale di nuovo rimetto $dx$ in luogo di $z^3$, con che ho $dx = \frac{cxz + dxz + 3a^2b^2z^2 - a^3b^3z}{3ab}$, da cui prendo il valore di $z^2$ così $z^2 = \frac{3abdx - cxz - dxz + a^3b^3z}{3a^2b^2}$. Ora paragono i due ritrovati valori di $z^2$ così

$\frac{cx+dx+3a^2b^2z-a^3b^3}{3ab} = \frac{3abdx-cxz-dxz+a^3b^3z}{3a^2b^2}$, e ne ricavo una equazione, in cui la $z$ ascende a una sola dimensione, quale risolvo facendo $z = \frac{a^3b^3+2abdx-abcx}{2ab^3+cx+dx}$, e questo valore sostituito in una delle precedenti equazioni, come nella $a^3b^3-3a^2b^2z+3abz^2-dx=cx$, dà finalmente $x^3\sqrt{c+d^3}+3a^3b^3x^2\sqrt{-c^2+7cd-d^2}+3a^6b^6cx+3a^6b^6dx=a^9b^9$ equazione, che non contiene altra incognita, che quella, che era nell'equazione proposta, che si è liberata dai radicali. Per venire al caso particolare sia il seguente

409. Prob. 6. Cercasi un numero tale, che stia alla radice quadrata del prodotto del medesimo numero nella differenza tra 21, e il quadrato di questo stesso numero, come 21 sta al doppio di se stesso.

410. Risol. il numero cercato si dica $=x$, il $21=a$, a tenore della condizione proposta si avrà $x:\sqrt{ax-x^2}::a:2a$, e facendo il prodotto degli estremi, e de' medj farà $2ax=a\sqrt{ax-x^2}$. Ma a fine di preparare questa equazione bisogna togliere il radicale, lo che ottengo con inalzare l'uno, e l'altro membro al quadrato così $4a^2x^2=a^2x-a^2x^2$. Questa equazione poi ha per fattore $a^2x$, e siccome col dividersi quantità eguali per una stessa quantità i quozienti sono eguali, però fatta la divisione per $a^2x$, si avrà $x^2+4x=a$. La risolvo pertanto al modo delle quadratiche affette così $x^2+4x+4=a+4$, ed estraendo da ambi i membri la radice quadrata, ne hò $x+2=\pm\sqrt{a+4}$, cioè $x=-2\pm\sqrt{a+4}$, in cui rimesso il valore di $a$ si ha $x=-2\pm\sqrt{21+4}$, vale a dire $x=-2\pm5$. Due adunque sono le radici, la prima $x=3$, la seconda $x=-7$, ognuna delle quali soddisfa al quesito nel modo altre volte esposto. Giusta il num. 396. quando l'ultimo termine di una equazione di secondo grado uguagliata a zero essendo positivo trovasi essere maggiore del quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, l'equazione ha due radici immaginarie. Ma siccome colla formola data $x=\pm\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ non appariscono tali, torna commodo esprimerle in quest'altra maniera $x=\pm\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}\times\sqrt{-1}$, o sia $x=\pm\frac{1}{2}p\pm\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}\times\sqrt{-1}$, la quale formola non differisce dalla precedente, che nella sola espressione.

411. A questa spezie di equazioni si riducono molte altre equazioni, in cui l'esponente della massima potestà dell'incognita eccede il secondo grado; siccome però queste equazioni si possono trattare egualmente, che le equazioni quadrate, perciò si chiamano derivative del secondo grado. La loro formola generale [supposto che $m$ sia una potestà di 2.] è la seguente $x^{2m}\pm px^m\pm q=0$, vale a dire (determinando l'esponente $m$) $x^4\pm px^2\pm q=0$; o $x^8\pm px^4\pm q=0$; o $x^{16}\pm px^8\pm q=0$ ec. Queste equazioni pertanto non devono avere, che due termini, in cui entri l'incognita, e l'esponente della massima potestà dell'incognita deve essere doppio dell'esponente dell'incognita nel secondo termine. Ogniqualvolta adunque una equazione, in cui l'esponente della massima potestà dell'incognita, sia maggiore di 2, avrà queste due condizioni, ella si risolverà col metodo usato per le quadratiche affet-

fette: Onde per risolvere l'equazione $x^4+px^2$ si farà $x^4+px^2+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$, e levando la radice quadrata da ambi i membri, si avrà $x^2+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, cioè $x^2=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, e di nuovo estraendo da ambi i membri la radice quadrata, si avrà finalmente $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$. Istessamente dovendosi risolvere l'equazione $x^8+px^4=q$, si aggiunga a tutti due i membri il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, onde si abbia $x^4+px^4+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$, da cui levandosi la radice quadrata ne verrà $x^4+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ cioè $x^4=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, ed estraendo ad ambi i membri la radice quadrata si avrà $x^2=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$, e finalmente levando di nuovo la radice quadrata da una parte, e dall'altra, sarà $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}}$. Così rispetto all'equazione $x^{16}+px^8=q$ si avrà $x^8=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, o sia $x^4=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$, e però $x^2=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}}$, e finalmente $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}}}$. Ma veniamo all'Esempio.

412. Prob. 7. Data la somma di due quali si siano potenze dello stesso grado, e dato il loro prodotto, se ne debbano determinare le radici.

413. Risol. Le potenze date siano per esempio di quarto grado, delle quali le radici si suppongano essere $x$, e $y$. Le dette potenze saranno $x^4$, $y^4$. La somma di queste potenze si dica $=a=2482$, il loro prodotto si faccia $=b=194481$. A tenore della prima condizione si avrà $x^4+y^4=2482$, e rispetto alla seconda $x^4y^4=194481$. Ora dalla seconda equazione si prenda il valore di $y^4$ così $y^4=\frac{b}{x^4}$, che si sostituisca nella prima equazione in questo modo $x^4+\frac{b}{x^4}=a$, e togliendo il denominatore si avrà $x^8+b=ax^4$, cioè $x^8-ax^4=-b$, che risoluta nella maniera delle quadratiche affette è $x^4=\frac{a}{2}\pm\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}$, e di nuovo estraendo

do

do da ambi i membri la radice quadrata, ſi avrà $x^2 = \pm\sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}}$, e finalmente eſtraendo ancora la radice quadrata, ſarà per ultimo $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}}}$. Che ſe paſſeremo a determinare il valore di $y$, prendendo primieramente dalla ſeconda equazione il valore di $x^4$, che è $x^4 = \frac{b}{y^4}$, e ſoſtituendolo nella prima, ſi avrà $\frac{b}{y^4} + y^4 = a$, cioè $y^8 - ay^4 = -b$ equazione in tutto eguale alla precedente, e in cui il valore di $y$ trovaſi eſſere affatto ſimile a quello di $x$, cioè $y = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}}}$. Se ſi ſoſtituiranno pertanto in $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}}}}$ i valori numerici di $a$, e di $b$, ſi avrà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{1241 \pm \sqrt{-194481+1540081}}}$, cioè $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{1241 \pm \sqrt{134000}}}$, ed eſtraendo la radice quadrata dall'ultimo radicale ſarà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{1241 \pm 1160}}$, cioè $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{2401}}$, facendo valere il ſegno ſuperiore, e $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{81}}$ facendo valere il ſegno inferiore. Dal valore poi $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{2401}}$ ſi ha primieramente $x = \pm\sqrt{49}$, e per ultimo $x = \pm 7$. Dall'altro valore $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{81}}$ ſi ha in primo luogo $x = \pm\sqrt{9}$, e finalmente $x = \pm 3$. La cercata radice adunque $x$ può eſſere tanto 7, come 3, e tanto poſitiva, come negativa, poichè comunque ſia o poſitiva, o negativa la radice di una poteſtà d'eſponente pari, tale poteſtà è ſempre poſitiva. Siccome poi pel valore di $y$ ritorna la ſteſſa eſpreſſione, che ſi è trovata pel valore di $x$, cioè $y = \pm 7$, e $y = \pm 3$; però prendendoſi $\pm 7$ pel valore di $x$ ſarà $\pm 3$ il valore della altra radice $y$; e prendendoſi $\pm 3$ pel valore di $x$ ſarà $\pm 7$ il valore di $y$.

414. La ritrovata formola $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$, che naſce dal riſolverſi l'equazione $x^4 + px^2 = q$ mi porta ora al modo di eſtrarre la radice qnadrata dai radicali binomj. Per dare la formola generale, che ſerve a tale eſtrazione, prendo il generale binomio radicale $\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$, e ſuppongo, che la

ſua

ſua radice ſia $x+\sqrt{y}$, onde ſarà $\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}} = x \pm \sqrt{y}$, e quadrando l' uno, e l'altro membro, ſi avrà $\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2} = x^2 \pm 2x\sqrt{y}+y$, in cui le quantità razionali alle razionali, e le irrazionali alle irrazionali dovendo eſſere uguali, ſi avranno le due equazioni $\frac{1}{2}p = x^2+y$, e $2x\sqrt{y} = \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, per mezzo delle quali ſi determineranno i valori delle due indeterminate $x$, $y$, che ſi ſono aſſunte. Dalla prima equazione pertanto $\frac{1}{2}p = x^2+y$ ſi ha $x^2 = \frac{1}{2}p - y$; quindi quadrando la ſeconda equazione $2x\sqrt{y} = \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ ſi ha $4x^2y = q+\frac{1}{4}p^2$, in cui ſoſtituendo il ritrovato valore di $x^2$, ne verrà $2py - 4y^2 = q+\frac{1}{4}p^2$, o ſia $4y^2 - 2py = -q - \frac{1}{4}p^2$ e però $y^2 - \frac{1}{2}py = -\frac{q+\frac{1}{4}p^2}{4}$, quale riſolvendoſi (giuſta il num. 395.), ſi ha $y = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - \frac{q+\frac{1}{4}p^2}{4}}$, cioè col farſi la riduzione al comune denominatore $y = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}$, e $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$. Determinato il valore di $y$, ſi determini adeſſo il valore di $x$. A tale effetto prendo dall'equazione $\frac{1}{2}p = x^2+y$ il valore di $y$, che è $y = \frac{1}{2}p - x^2$, e lo ſoſtituiſco nell'equazione $4x^2y = q+\frac{1}{4}p^2$ onde ho $2px^2 - 4x^4 = q+\frac{1}{4}p^2$ cioè $4x^4 - 2px^2 = -q - \frac{1}{4}p^2$, e però $x^4 - \frac{1}{2}px^2 = -\frac{q+\frac{1}{4}p^2}{4}$, la quale riſolvendoſi giuſta il num. 411. laſcia $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - \frac{q+\frac{1}{4}p^2}{4}}}$, cioè, fatta la riduzione al comune denominatore, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$. Per lo che mettendo nella ſuppoſta radice $x \pm \sqrt{y}$ i ritrovati valori di $x$, $y$ ſi avrà $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$, che è la formola ecumenica per l'eſtrazione della radice quadrata dai binomj radicali della forma

√

$\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$, o sia $\sqrt{n \pm \sqrt{m}}$, intendendo per $n$ le quantità razionali, e per $\sqrt{m}$ le irrazionali. Siccome ogni quadrato ha doppia radice, quindi è, che la ritrovata formola è affetta da doppio segno; e però del proposto binomio radicale $\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ una radice quadrata è $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} + \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$, l'altra è $-\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} - \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$.

415. Affinchè poi a niuno rimanga difficoltà su la ritrovata formola generale, ne farò l'applicazione al caso particolare. Debbasi estrarre la radice quadrata dal binomio $3+\sqrt{8}$, che indicata sarebbe $\sqrt{3+\sqrt{8}}$. Paragonato questo bin. $3+\sqrt{8}$ al binomio generale $\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, si avrà $\frac{1}{2}p = 3$, e però $\frac{1}{4}p = \frac{3}{2}$: In oltre $\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2} = \sqrt{8}$, e sostituendo in vece di $\frac{1}{4}p^2$ il suo valore, che ricavasi dal quadrare l'equazione $\frac{1}{2}p = 3$ così $\frac{1}{4}p^2 = 9$, si avrà $\sqrt{q+9} = \sqrt{8}$, e quadrando $q+9 = 8$, e però $q = 8-9$, cioè $q = -1$, conseguentemente $\frac{1}{4}q = -\frac{1}{4}$. Ora i ritrovati valori di $\frac{1}{4}p$, e $\frac{1}{4}q$ si sostituiscano nella formola generale $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} + \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$, con che si avrà $\sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}} + \sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}$, cioè $\sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}$, e perchè $\sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}$ è tanto $\sqrt{2}$, come 1, però la radice cercata sarà tanto $1+\sqrt{2}$ come $\sqrt{2}+1$.

416. Si offervi, che se le parti del binomio proposto saranno unite col segno $+$, tale binomio si riferirà al binomio generale $\frac{1}{2}p + \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, e però per l'estrazione della radice servirà la formola generale $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} + \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$: Ma se le parti del binomio saranno unite col segno $-$, tale binomio si riferirà al binomio generale $\frac{1}{2}p - \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, conseguentemente per

l'e-

l'eſtrazione della radice ſervirà la formola generale $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} - \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$. Queſti due caſi poi ſono indicati dal binomio generale $\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{3}{4}p}$, e dalla formola ecumenica per l'eſtrazione della radice $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$. Quando per la prima parte della radice ſi prende la prima parte $\sqrt{\frac{1}{4}p + \sqrt{-\frac{3}{4}q}}$ della formola, per la ſeconda parte della radice deveſi prendere l'altra parte $\sqrt{\frac{1}{4}p - \sqrt{-\frac{1}{4}q}}$, e *vice verſa*.

417. Ritrovata la formola ecumenica per l'eſtrazione della radice quadrata dai binomj reali, paſſiamo adeſſo all'invenzione della formola generale per l'eſtrazione della radice quadrata dai binomj immaginarj. Abbiamo veduto al num. 410., che i binomj immaginarj cadono ſotto a queſta forma $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} \times \sqrt{-1}$, la di cui radice quadrata ſuppongaſi eſſere $x \pm y\sqrt{-1}$, onde ſarà $\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}} \times \sqrt{-1} = x \pm y\sqrt{-1}$, e quadrando l'uno, e l'altro membro ſi avrà $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} \times \sqrt{-1} = x^2 \pm 2xy\sqrt{-1} - y^2$, in cui le quantità reali tra loro, e tra loro le immaginarie dovendo eſſere eguali (affinchè l'equazione poſſa verificarſi) ſarà $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}p$, e $\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} \times \sqrt{-1} = 2xy\sqrt{-1}$, o ſia dividendo per $\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} = 2xy$, vale a dire $\sqrt{4q - p^2} = 4xy$, che inalzata al quadrato è $4q - p^2 = 16x^2y^2$, da cui prendendoſi il valore di $y^2$, ſi avrà $y^2 = \frac{4q - p^2}{16x^2}$, che ſoſtituito nell'equazione $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}p$ dà $x^2 - \frac{4q + p^2}{16x^2} = \frac{1}{2}p$, cioè $16x^4 - 4q + p^2 = 8px^2$, vale a dire $x^4 - \frac{1}{2}px^2 = \frac{4q - p^2}{16}$, quale riſoluta a tenore del num. 411. dà $x^2 = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{3}{16}p^2 + \frac{4q - p^2}{16}}$, e però $x^2 = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q}$, conſeguentemente $x = \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q}}$. Se pertanto queſto ritrovato valore di $x$ ſi ſoſtituirà nell'equazione $\sqrt{4q - p^2} = 4xy$, ſi avrà

$\sqrt{4q-p^2} = 4y \times \sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q}}$, e però $y = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{4\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q}}}$, o sia riducendo nel denominatore il numero 4 sotto ai vincoli $y = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{\sqrt{4p \pm 16\sqrt{\frac{1}{4}q}}} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}}}$. Ora se questi ritrovati valori di $x$, $y$ si sostituiranno nella supposta radice $x \pm y\sqrt{-1}$, si avrà $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q}} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2} \times \sqrt{-1}}{2\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}}}$, che è la formola generale per l'estrazione della radice quadrata da un binomio immaginario della forma $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2} \times \sqrt{-1}$.

418. Siccome poi l'espressione generale $\sqrt{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{4q-p^2} \times \sqrt{-1}}$ rappresenta le radici immaginarie di una qualsifia equazione; per le quali si è trovata la formola ecumenica $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q}} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2} \times \sqrt{-1}}{2\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}}}$, ben si vede, che rappresentando colla lettera A le quantità reali di questa formola, e colla lettera B le altre quantità, che sono coefficienti di $\sqrt{-1}$, sarà $A+B\sqrt{-1}$ la forma delle radici immaginarie di qualsivoglia equazione.

419. Ma veniamo all'applicazione della formola trovata al caso particolare. Debbasi estrarre la radice quadrata dal binomio $-40-42\sqrt{-1}$, dal di cui paragone col binomio generale $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2} \times \sqrt{-1}$ si ha $-40 = \frac{1}{2}p$, $-42\sqrt{-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2} \times \sqrt{-1}$, e dividendo per $\sqrt{-1}$, $-42 = -\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$. Essendo pertanto $-40 = \frac{1}{2}p$, sarà $\frac{1}{4}p = -20$, $p = -80$, $p^2 = 6400$; che però nell'equazione $42 = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$ sostituendo il ritrovato valore di $p^2$, si avrà $42 = \frac{1}{2}\sqrt{4q-6400}$, o sia $84 = \sqrt{4q-6400}$, e quadrando

$7056 = 4q - 6400$, e però $4q = 13456$, e finalmente $q = 3364$, onde sarà $\frac{1}{4}q = 841$. Si sostituiscano pertanto nella formola generale $\sqrt{\frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}q - \frac{\sqrt{4q - p^2} \times \sqrt{-1}}{2\sqrt{p} \pm 2\sqrt{q}}}}$ i ritrovati valori; e si avrà $\sqrt{-20 \pm \sqrt{841 - \frac{\sqrt{13456 - 6400} \times \sqrt{-1}}{2\sqrt{-80} \pm 2\sqrt{3364}}}}$, cioè $\sqrt{-20 \pm 29 - \frac{\sqrt{7056} \times \sqrt{-1}}{2\sqrt{-80} \pm 116}}$

Ma il primo termine è tanto 3, come $\sqrt{-49}$, o sia $7\sqrt{-1}$, ed il secondo è tanto $-\sqrt{49} \times \sqrt{-1}$, o sia $-7\sqrt{-1}$, come $-\sqrt{-9} \times \sqrt{-1}$, o sia $-\sqrt{9} = 3$; dunque la radice quadrata del proposto binomio è tanto $3 - 7\sqrt{-1}$, come $-3 + 7\sqrt{-1}$.

420. Queste formole generali sono bensì comode al bisogno per operare più speditamente, non però è necessario averle sempre presenti alla mente, bastando ancora fare le sopra esposte operazioni col binomio, di cui si tratta. Così pel binomio dato al num. 415. si farà $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = x + \sqrt{y}$, indi si opererà nel modo ivi esposto: Parimente pel binomio $-40 - 42\sqrt{-1}$ dato al num. 419. si farà $\sqrt{-40 - 42\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$, poscia col metodo tenuto si proseguirà l'operazione.

## ARTICOLO III.

### *Dei Problemi più che determinati, indeterminati, semideterminati, e degli artifizj di Diofanto.*

421. Siccome (pel num. 333.) Problema determinato è quello, in cui il numero delle cose, che si cercano, è uguale al numero delle condizioni date, così problema più che determinato è quello, in cui il numero delle condizioni proposte è maggiore del numero delle cose cercate. E tale sarebbe il seguente Problema: Trovare due numeri $x$, $y$, de' quali la somma de' quadrati sia 34, la differenza de' cubi 98, e il prodotto 26, in cui tre sono le condizioni date, e due le cose cercate. In questi Problemi tante sono le condizioni superflue, che alla determinazione del problema non si richiedono, quante ne mostra la differenza, che passa tra il numero delle condizioni proposte, e delle cose cercate: Il più delle volte poi queste condizioni superflue pugnando colle necessarie rendono il problema impossibile, come nel proposto esempio il Problema è impossibile, poichè la terza condizione pugna colle due prime; che se la terza condizione fosse stata, che il prodotto de' due numeri fosse 15, il problema sarebbe bensì stato possibile, ma la condizione in

quanto che derivante neceſſariamente dalle due prime, ſarebbe ſtata ſuperflua. Tali problemi rendonſi determinati con togliere le condizioni ſuperflue. Se le condizioni non pugnano, baſta ritenerne tante, quante ſono le coſe cercate; ſe pugnano queſte tali devonſi levare: Così nel problema propoſto, perchè la terza condizione, che il prodotto de' due numeri ſia 26, pugna, ella deveſi levare, e il problema reſterà determinato: Che ſe la terza condizione ſarà, che il prodotto de' due numeri ſia 15, per rendere il problema dererminato baſterà levarne una qualunque ſiaſi, ritenendo o la prima, e la ſeconda, o la prima, e la terza, o la ſeconda, e la terza.

422. Problema indeterminato è quello, in cui il numero delle condizioni propoſte è minore delle coſe cercate, e ſiccome a fine di giungere ad una equazione finale, in cui entri una ſola incognita, è neceſſario che tante ſiano le condizioni, o ſia le equazioni, quante ſono le incognite, eſſendo in queſta ſorte di Problemi il numero delle equazioni minore del numero delle incognite, ben ſi vede, che nell' equazione finale neceſſariamente rimarrà più d'una incognita: Quindi è, che non ſi potrà mai venire alla ſoluzione del problema, e però non ſi potrà ritrovare il valore di una incognita, qualora non ſi determini ad arbitrio il valore dell' altra, o delle altre, nel qual caſo il Problema d'indeterminato ſi fa determinato; e poichè infiniti ſono i valori, che a tali incognite ſi poſſono aſſegnare, perciò il Problema ammette infinite ſoluzioni. Ma veniamo all'Eſempio.

## PROBLEMA 1.

423. Cercanſi due numeri con queſta condizione, che il loro prodotto ſtia alla differenza de' loro quadrati come $a : b$.

424. Riſol. Il numero maggiore ſi chiami $x$, il minore $y$, de' quali il prodotto è $xy$, e la differenza de' quadrati è $x^2 - y^2$, e però giuſta la condizione propoſta ſi avrà $a : b :: xy : x^2 - y^2$, e facendo il prodotto degli eſtremi, e de' medj, nè verrà $ax^2 - ay^2 = bxy$, in cui prendendo la $x$ per la incognita, ſi ordinerà l' equazione così, $ax^2 - bxy = ay^2$, e però $x^2 - \frac{by}{a}x = y^2$, che riſolvo giuſta il num. 395 così $x = \frac{by}{2a} \pm \sqrt{y^2 + \frac{b^2y^2}{4a^2}}$, o ſia $x = \frac{b}{2a}y \pm \frac{y}{2a}\sqrt{4a^2 + b^2}$. Se pertanto la ragione, con cui il prodotto de' due cercati numeri ſta alla differenza de' loro quadrati ſarà 1 : 3, ſi avrà $a = 1$, $b = 3$, dalla ſoſtituzione de' quali valori ne verrà $x = \frac{3}{2}y \pm \frac{y}{2}\sqrt{4+9}$, in cui ſe ſi ſupporrà $y = 1$, ſi avrà $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$; ſuppoſta $y = 2$, ſarà $x = 3 \pm \sqrt{13}$; ſuppoſta $y = 3$, ſarà $x = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{13}$ ec.;

fatta $y = -1$, ſarà $x \mp -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$; fatta $y = -2$, ſarà $x = -3 \mp \sqrt{13}$ ec.

fatta $y = \frac{1}{2}$, ſarà $x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{13}$; fatta $y = \frac{1}{3}$, ſarà $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{13}$ ec.;

fatta $y = \sqrt{3}$, ſarà $x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{13}$; fatta $y = \sqrt{13}$, ſarà $x = 3\sqrt{\frac{13}{2}} \pm \frac{13}{2}$ ec.;

e co-

e così in infinito continuando pel valore di $y$ le ſuppoſizioni di numeri interi, o fratti, razionali, o irrazionali, poſitivi, o negativi, u avranno infinite ſoluzioni, e in conſeguenza infiniti valori di $x$.

## PROBLEMA 2.

425. Cercanſi quattro numeri con queſte due condizioni, la prima che la ſomma del primo col ſecondo ſia uguale al quadrato del terzo, la ſeconda che la ſomma del primo col quadrato del terzo ſia uguale al prodotto del ſecondo nell' ultimo più 2.

426. Riſol. Il primo de' cercati numeri ſia $x$, il ſecondo $y$, il terzo $z$, il quarto $u$. Sarà, giuſta la prima condizione, $x+y=z^2$; giuſta la ſeconda $x+z^2=yu+2$, mediante le quali due equazioni eliminando una incognita, per eſempio la $x$, ſi avrà $z^2-y=uy-z^2+2$, e però $y=\frac{2z^2-2}{u+1}$, il qual valore ſoſtituito nella prima equazione $x+y=z^2$ darà $x=z^2-\frac{2z^2+2}{u+1}$, o ſia $x=\frac{uz^2-z^2+2}{u+1}$, vale a dire $x=\frac{u-1}{u+1}\times\frac{z^2+2}{u+1}$. In queſte due equazioni $y=\frac{2z^2-2}{u+1}$, ed $x=\frac{u-1}{u+1}\times\frac{z^2+2}{u+1}$ vi ſono le due $u$, $z$ da determinarſi ad arbitrio: Se pertanto ſi ſupporrà $u=1$, $z=2$, la prima equazione ſarà $y=3$, la ſeconda ſarà $x=\frac{0+2}{2}$. Che coſa poi ſignifichi l' eſpreſſione $\frac{0}{2}$ s' intende chiaramente dal numero 226. del primo Tomo, poichè col diminuirſi il numeratore di una frazione, diminuendoſi il ſuo valore, qualora il numeratore ſi diminuirà a ſegno di divenire infinitamente piccolo, anche il valore della frazione ſarà infinitamente piccolo, lo che ſuccede nel preſente caſo, e perchè una quantità infinitamente piccola aggiunta ad una quantità finita non l' aumenta, però ſarà $x=\frac{2}{2}=1$: Chi deſideraſſe ancora un'idea più chiara del valore di queſta eſpreſſione $\frac{0}{2}$, baſta che rifletta, che (giuſta il num.495. del I. Tomo), in qualſivoglia frazione il diviſore ſta al dividendo, come l'unità al quoziente, o ſia alla frazione, ma in queſta eſpreſſione il diviſore eſſendo 2, e il dividendo eſſendo 0, la ragione del diviſore al dividendo, e però dell'unità alla frazione è infinitamente grande, dunque *vice verſa* la ragione della frazione all' unità è infinitamente piccola, conſeguentemente il valore di queſta frazione $\frac{0}{2}$ è una quantità infinitamente piccola. Facendoſi $u=\frac{1}{3}$, $z=5$, ſarà $y=36$, $x=-11$ ec.

427. Problema ſemideterminato è quello, che a motivo di certe condizioni ammette un finito, e determinato numero di ſoluzioni, quantunque di natura ſua ſia indeterminato, in quanto che la di lui equazione inchiude più d'una incognita. Le con-

condizioni, che diminuendo il numero delle ſoluzioni fanno paſſare il Problema da indeterminato a eſſere ſemideterminato, poſſono eſſere tre, ed aver luogo, o ſeparatamente, o tutte inſieme. La prima che le quantità cercate ſiano intere, la ſeconda che ſiano poſitive, la terza che ſiano razionali, al che ſi riducono gli artifizj di Diofanto. Per fare, che ſi verifichino queſte condizioni, tutta l'arte conſiſte in ſapere aſſegnare tali valori all'incognita, o all'incognite da determinarſi ad arbitrio, onde il valore dell'equazione riſulti intero, poſitivo, e razionale, ſe tutte tre le condizioni ſaranno propoſte, o pure l'uno, o l'altro, ſe ſolamente l'una, o l'altra condizione ſarà data.

428. Se l'equazione eſſendo immune dalle frazioni non monterà, che al primo grado, la ſola ſeconda condizione, cioè che le quantità da trovarſi ſiano poſitive, potrà aver luogo ogni qualvolta l'incognita, o l'incognite da determinarſi ad arbitrio ſiano affette dal ſegno —: Se l'equazione avendo frazioni ſarà di primo grado, avrà ſempre luogo la prima condizione, che le quantità da trovarſi ſiano intere, e ve lo potrà avere anche la ſeconda, che ſiano poſitive nel caſo poc'anzi detto. Se finalmente l'equazione avendo frazioni aſcenderà a grado maggiore del primo, potrà ſempre cadervi la prima, e l'ultima condizione, e ſpeſſiſſimo anche la ſeconda. Il primo caſo ſpetta all'equazione di queſta forma $y = \pm d \pm ax$, ovvero $y = \pm ax \pm bz \pm c$ ec. Il ſecondo all'equazione $y = \pm \frac{bx \pm d}{a}$, o pure $y = \pm d \pm \frac{bx}{a}$, o $y = \pm \frac{ax \pm bz \pm c}{e}$ ec. Il terzo all'equazione $y = \pm \frac{bx}{a} \pm \sqrt{\frac{dx \pm e}{c}}$. Quanto al primo caſo non potendo aver luogo ſe non ſe la condizione, che il valore di $y$ ſia poſitivo, per fare, che ella ſi verifichi nella ſuppoſizione, che il termine $ax$ ſia affetto dal ſegno —, biſognerà aſſegnare un tal valore a $x$, che ſia minore di $\frac{d}{a}$, cioè ſia $\frac{d}{a} > x$. Siane l'Eſempio.

## PROBLEMA 3.

429. Cercaſi quale ſarà il peſo di due maſſe di piombo, la prima delle quali accreſciuta di 2 libbre è uguale a 9 libbre meno il triplo della ſeconda maſſa.

430. Riſol. La prima maſſa ſi chiami $x$, e la ſeconda $y$. A tenore della condizione propoſta ſi avrà l'equazione $x + 2 = 9 - 3y$, e però $x = 9 - 2 - 3y$, cioè $x = 7 - 3y$, in cui deveſi dare all'incognita $y$ un tal valore, che ſia $7 - 3y$ una quantità poſitiva: Ora acciò $7 - 3y$ ſia poſitivo deve eſſere $\frac{7}{3} > y$, e però il 2 è il numero maggiore intero, che ſi poſſa ſoſtituire in luogo di $y$, onde ſia $7 - 3y$ una quantità poſitiva. Soſtituendoſi adunque il 2 in vece di $y$, ſi avrà $x = 1$; ſoſtituendo 1, ſara $x = 4$; e queſti ſono i ſoli valori poſitivi, e interi, che nel preſente caſo poſſono convenire ad $x$, e $y$. Se il Problema foſſe ſtato propoſto con queſta condizione, che la prima maſſa accreſciuta di due libbre doveſſe eſſere uguale al triplo della ſeconda maſſa meno 9 libbre, l'equazione ſarebbe ſtata $x = 3y - 11$, in cui il valore di $x$ è ſempre poſitivo qualunque ſia il numero intero ſoſtituito in luogo

luogo di $y$ cominciando dal 4, perchè deve eſſere $y > \frac{11}{3}$, per lo che il numero delle ſoluzioni va all'infinito: E perchè col ſoſtituirſi in luogo di $y$ i numeri 4, 5, 6, 7, 8 ec. ſi hanno pel valore di $x$ i numeri 1, 4, 7, 10, 13 ec., che ſono in progreſſione Aritmetica, la di cui differenza è 3, quindi è, che eſſendo propoſto qualſivoglia numero da ſoſtituirſi in luogo di $y$, ſi avrà toſto il valore di $x$ giuſta il num. 1012. del I. Tomo ſenza aver biſogno di fare l'attuale ſoſtituzione, niente altro richiedendoſi, che moltiplicare coll'eſponente 3 il propoſto numero diminuito di quattro unità, e al prodotto aggiungervi una unità. Qual poi ſi oſſervi, che da queſte equazioni della forma $x = \pm d \pm d\,ay$ ne naſce ſempre una progreſſione aritmetica, la di cui differenza è $a$. Dalla formola $x = -d + ay$ naſce una progreſſione aſcendente, e dalla formola $x = -ay$ naſce una progreſſione diſcendente.

431. Quanto al ſecondo caſo potendo aver luogo le due prime condizioni, per determinare la maniera di farle verificare prendiamo a conſiderare le formole generali per le equazioni a due incognite, mentre le oſſervazioni, che ſe ne faranno ſerviranno di regola per le equazioni, che hanno più di due incognite. Le formole generali pertanto ſono $x = \pm a \pm \frac{by}{c}$, ed $x = \pm \frac{a \pm by}{c}$. Quanto alla prima ſe ſarà $x = a + \frac{by}{c}$, il valore di $x$ ſarà ſempre intero, e poſitivo, ogni qual volta il valore ſoſtituito in luogo di $y$ ſarà un moltiplo di $c$: Se ſarà $x = -a + \frac{by}{c}$, la $x$ avrà ſempre un valore intero, e poſitivo, ſe ſoſtituendoſi in luogo di $y$ un moltiplo di $c$, ſarà $\frac{a}{b} < \frac{y}{c}$. Eſſendo $x = a - \frac{by}{c}$, nè riſulterà per $x$ un numero intero, e poſitivo, ſe ſoſtituendoſi in luogo di $y$ un moltiplo di $c$ così $\frac{bnc}{c}$, ſarà $a > bn$, il che non potendoſi molte volte verificare, non ammetterà il Problema alcuna ſoluzione. Quando poi ſia $x = -a - \frac{by}{c}$, il Problema ſarà ſempre impoſſibile. Per non eſſere troppo lungo, porterò un Eſempio ſolo, che poſcia applicherò a tutti tre i caſi.

## PROBLEMA 4.

432. Dovendoſi diſtribuire un certo numero di ſoldi a due poveri con queſta legge, che il numero de' ſoldi dati al primo diminuito di 3 ſia uguale a 24 meno $\frac{2}{5}$ del numero de' ſoldi dati al ſecondo, cercaſi il numero de' ſoldi dati a ciaſcuno.

433. Riſol. Il numero de' ſoldi dati al primo ſi dica $x$, e il numero de' ſoldi dati al ſecondo ſi chiami $y$. A tenore della condizione propoſta ſi avrà $x - 3 = 24 - \frac{2y}{5}$, cioè $x = 27 - \frac{2y}{5}$ equazione, che ſi riferiſce all'ecumenica $x = a - \frac{by}{c}$. Affinchè adunque $x$ ſia intera, e poſitiva deve eſſere $27 > \frac{2 \times n \times 5}{5}$, o ſia $27 > 2n$, e pe-

e però $\frac{27}{2} > n$, dunque $n$ non deve ſorpaſſare il numero 13, conſeguentemente qualunque dei prodotti di 5 in qualſivoglia numero minore di 14 ſoſtituito in vece di $y$ darà ad $x$ un valore intero, e poſitivo. Se pertanto ſi ſoſtituirà 5 in luogo di $y$, ſi avrà $x = 25$; ſe ſi ſoſtituirà 10, ſi avrà $x = 23$; ſe ſi ſoſtituirà 15, ſi avrà $x = 21$, i quali valori ſono in progreſſione aritmetica decreſcente, la di cui differenza è 2, lo che può ſervire per determinare ſenza l'attuale ſoſtituzione il valore di $x$.

434. Se la condizione propoſta nel Problema foſſe ſtata, che il numero de' ſoldi dati al primo diminuito di 3 doveſſe eſſere uguale a $\frac{2}{5}$ de'ſoldi dati al ſecondo diminuito di 24, l'equazione ſarebbe ſtata $x - 3 = \frac{2}{5}y - 24$, e però $x = \frac{2}{5}y - 21$, equazione che ſi riferiſce alla formola generale $x = -a + \frac{by}{c}$; onde acciò la $x$ ſia intera, e poſitiva deve eſſere $\frac{a}{b} < \frac{ne}{c}$, cioè $\frac{a}{b} < n$, e però $n$ deve eſſere maggiore di 10: Se adunque cominciando dall'11 fino all'infinito ſi moltiplicherà ſucceſſivamente il 5, indi queſti prodotti ſi ſoſtituiranno in luogo di $y$, avrà ſempre la $x$ un valore poſitivo, e però il Problema riceverà infinite ſoluzioni. Così ſoſtituendoſi 55 in luogo di $y$, ſarà $x = 1$; ſoſtituendoſi 60, ſarà $x = 3$; ſoſtituendoſi 65, ſarà $x = 5$ ec., i quali valori di $x$ ſono in progreſſione aritmetica principiante dall' unità, la di cui differenza è 2.

435. Finalmente ſe il problema foſſe ſtato propoſto con queſta condizione, che il numero de' ſoldi dati al primo povero diminuito di 3 foſſe uguale a 24 più $\frac{2}{5}$ del numero de'ſoldi dati al ſecondo, l'equazione ſarebbe ſtata $x - 3 = 24 + \frac{2}{5}y$, cioè $x = 27 + \frac{2}{5}y$, che ſi riferiſce alla formola generale $x = a + \frac{by}{c}$; che però qualunque ſia il moltiplo di 5, che ſi ſoſtituiſca in vece di $y$, il valore di $x$ ſarà ſempre poſitivo, e intero: Così ſoſtituendoſi 5 in luogo di $y$, ſi avrà $x = 29$; ſoſtituendoſi 10, ſarà $x = 31$ ec.

436. Paſſiamo ora a conſiderare la ſeconda formola generale $x = \frac{\pm a + by}{c}$, di cui le ſole tre combinazioni $\frac{a+by}{c} = x$; $\frac{a-by}{c} = x$, $-\frac{a+by}{c} = x$ poſſono venire al calcolo. E quanto alla prima formola $\frac{a+by}{c}$ ben ſi vede, che acciò la $x$ riſulti un numero intero, ſi deve in luogo di $y$ ſoſtituire un tal numero, onde l'aggregato $a + by$ ſia un moltiplo di $c$: Quanto alla ſeconda formola $\frac{a-by}{c}$ non ſolo ſi deve ſoſtituire in vece di $y$ un tal numero, che renda $a - by$ moltiplo di $c$, ma in oltre deve eſſere $\frac{a}{b} > y$, cioè in luogo di $y$ ſi deve ſoſtituire un numero, che

ſia

ſia minore di $\frac{a}{b}$, acciocchè il valore di $x$ riſulti poſitivo. Riſpetto alla terza formola $-\frac{a+by}{c}$ il numero da ſoſtituirſi in luogo di $y$ e deve eſſere maggiore di $\frac{a}{b}$, e deve rendere $-a+by$ un moltiplo di $c$. Riſpetto poi a ciaſcuna di queſte tre formole i diverſi corriſpondenti valori di $x$, e di $y$ ſono ſempre in progreſſione aritmetica con queſta legge coſtante, che la progreſſione aritmetica nata dai valori di $x$ ha per differenza la quantità $b$, cioè il coefficiente di $y$, e la progreſſione aritmetica nata dai valori di $y$ ha per differenza la quantità $c$, cioè il coefficiente di $x$ in ſuppoſizione che la frazione ſia ridotta a minimi termini. Riſpetto alle due formole $\frac{a+by}{c}=x$, e $-\frac{a+by}{c}=x$ le progreſſioni tanto dei valori di $x$, come di $y$ ſono aſcendenti, ma riſpetto alla formola $\frac{a-by}{c}=x$ una delle progreſſioni è aſcendente, e l'altra diſcendente, lo che coſta dalla ſola iſpezione delle formole: Per lo che baſta trovare di queſte due progreſſioni il primo termine per avere nel tempo iſteſſo anche tutti gli altri, che ſervono alla ſoluzione. Un poco d'eſercizio poi unito a qualche deſtrezza baſterà per iſcuoprire con facilità la prima quantità da ſoſtituirſi in luogo di $y$, dalla quale ſoſtituzione ſi avrà il primo valore di $x$, e così poſcia ritrovati i primi termini delle due progreſſioni aritmetiche, ſi avranno mediante la regola data tutti gli altri.

## PROBLEMA 5.

437. Cercaſi lo ſpazio percorſo in tempi uguali da due mobili, i quali con celerità ineguali ſi movono in guiſa, che il quintuplo dello ſpazio percorſo dal primo più 17 è coſtantemente uguale al ſettuplo dello ſpazio percorſo dal ſecondo.

Riſol. Lo ſpazio percorſo dal primo ſi chiami $x$, e lo ſpazio percorſo dal ſecondo in tempo uguale ſi dica $y$. Giuſta la condizione propoſta ſi avrà $5x+17=6y$, e però $\frac{5x+17}{6}=y$. Si ſoſtituiſca pertanto in vece di $x$ il 5, che è il primo numero, che poſſa aver luogo, e ſi avrà $y=7$. Ora giuſta la regola data al num. 436. la progreſſione aritmetica, che naſce dai valori di $x$ deve avere per differenza il 6, e la progreſſione aritmetica, che naſce dai valori di $y$ deve avere per differenza il 5: Quindi la progreſſione, che dà i valori di $x$, è 5, 11, 17, 23 ec., e la progreſſione, che dà i valori di $y$, è 7, 12, 17, 22 ec. Se in vece di ritrovare il valore di $y$ nel riſolvere l'equazione, ſi foſſe ritrovato il valore di $x$, così $x=\frac{6y-17}{5}$, ſi ſarebbe toſto veduto, che pel valore di $y$ ſarebbe ſtato d'uopo prendere un numero maggiore di $\frac{17}{6}$, il quale rendeſſe $6y-17$ un moltiplo di 5.

438. Si oſſervi, che acciò l'eſpreſſione $\frac{\pm a \pm by}{c}$ riſulti un numero intero mediante la ſoſtituzione di qualche numero intero in luogo di $y$, devono le due quantità $b, c$ eſſere numeri primi fra loro; che ſe non ſaranno tali, non ſi potrà aſſegnare a $y$ alcun valore intero, che renda la frazione un numero intero. Difatto non eſſendo $b, c$ numeri primi fra loro, ſarà o $\frac{b}{c}=m$, o $\frac{b}{c}=\frac{mr}{mt}$, o $\frac{b}{c}=\frac{1}{m}$, conſeguen-

temente $\frac{c}{b} = m$. Si faccia pertanto la frazione $\pm \frac{a \pm by}{c}$, uguale a Q, che ſuppongo numero intero, e ſoſtituendoſi $m$ in luogo di $\frac{b}{c}$ giuſta il primo caſo, ſi avrà $\pm \frac{a}{c} \pm my = Q$, quindi eſſendo $m$ numero intero, dovrà $y$ eſſere neceſſariamente una frazione, mediante cui poſſa eſſere $\pm \frac{a}{c} \pm my$ un numero intero, e però non ſi potrà dare a $y$ alcun valore intero, che renda la frazione un numero intero. Si ſoſtituiſca adeſſo $\frac{mr}{mt}$ in vece di $\frac{b}{c}$ giuſta il ſecondo caſo, e ſi avrà $\pm \frac{a \pm mry}{mt} = Q$, vale a dire $\pm \frac{a}{m} \pm ry = Qt$; che però eſſendo $Qt$ un numero intero, lo dovrà eſſere ancora $\pm \frac{a}{m} \pm ry$, e non potendo eſſerlo, ſe $y$ non è una frazione, ben ſi vede, che nemmeno in queſto caſo ſi potrà aſſegnare a $y$ un numero intero, che renda intero il valore della frazione. Finalmente eſſendo $\frac{b}{c} = \frac{1}{m}$, purchè non ſia $b$ un diviſore eſatto di $a$, nemmeno in queſto caſo ſi potrà ſoſtituire un numero intero in vece di $y$, che renda la frazione un numero intero; poichè facendo $\pm \frac{a \pm by}{c} = Q$, ſi avrà $\pm a \pm by = Qc$, o ſia $\pm by = Qc \mp a$, e però $y = \frac{Qc \mp a}{b}$: Ma eſſendo $\frac{b}{c} = \frac{1}{m}$, è $\frac{c}{b} = m$; per lo che ſoſtituito queſto valore ſi ha $y = Qm \mp \frac{a}{b}$, in cui non eſſendo $a$ diviſibile per $b$, ſarà $Qm \mp \frac{a}{b}$ una frazione, e tale neceſſariamente ſarà la $y$, alla quale perciò niun valore intero ſi potrà dare, che renda la frazione un numero intero. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

439. Non ſi può diſſimulare, che riſpetto alla formola $x = \pm \frac{a \pm by}{c}$ il volere tentare diverſi valori di $y$ interi, che rendano la $x$ un numero intero, oltre che non è un operare ſcientifico, rieſce ſovente un operare lungo, e nojoſo; però darò la maniera di potere ciò facilmente ottenere. Conſidero pertanto la propoſta formola così $cx - by = a$, o $by - cx = a$ con liberarla dal diviſore; poſcia di queſta formola $by - cx = a$ per eſempio prendo i fattori $b, c$ di $y, x$, e con loro ne formo una frazione così $\frac{b}{c}$, dopo di che cerco un' altra frazione $\frac{\delta}{\beta}$, la quale ſottratta dalla precedente, e traſcurato il comune denominatore laſci di reſiduo $\pm 1$, cioè ſia $b\beta - c\delta = \pm 1$ (al num. 858. darò il modo di trovare la frazione $\frac{\delta}{\beta}$). Ora ſi moltiplichi queſta equazione $b\beta - c\delta = \pm 1$ per $a$ termine cognito della formola data, e ſi avrà $ab\beta - ac\delta = \pm a$, la quale ſi ſommi, o ſi ſottragga dalla precedente $by - cx = \pm a$, ſecondo che nell' una, e nell' altra la quantità $a$ ha diverſo, o lo ſteſſo ſegno, con che ne verrà $b \sqrt{y \mp a\beta} - c \sqrt{x \mp a\delta} = 0$, da cui ſi ricava $\frac{b}{c} = \frac{x \mp a\delta}{y \mp a\beta}$. Ma per ipoteſi i numeri $b, c$ ſono primi fra loro, dunque la frazione tro-

trovata è ridotta ai ſuoi minimi termini di maniera, che $x$, $y$ dovendo eſſere numeri interi, biſognerà, che ſia $x \mp a\delta = bm$, e $y \mp a\beta = cm$ (la lettera $m$ eſprime un qualunque numero intero); quindi ſi avrà $x = bm \pm a\delta$, e $y = cm \pm a\beta$. Queſte pertanto ſono le eſpreſſioni generali di tutti i numeri intieri, che poſſono convenire ad $x$, $y$ ſecondo i diverſi infiniti valori, che ſi poſſono aſſegnare ad $m$. Prendo l'eſempio dall'equazione $5y - 7x = 13$. I coefficienti delle due incognite ridotti nel modo detto a frazione danno $\frac{5}{7}$, e la frazione da ſottrarſi, così che ſia $b\beta - c\delta = \pm 1$, trovaſi eſſere $\frac{2}{3}$, di fatto ſottraggo $\frac{2}{3}$ dà $\frac{5}{7}$, e non curando il comune denominatore, trovo $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$: moltiplico queſta equazione pel termine cognito 13 della propoſta, e mi viene $13 \times 3 \times 5 - 13 \times 2 \times 7 = 13$. Sottraggo queſta equazione dalla data $5y - 7x = 13$, e mi naſce $5 \times \overline{y - 13 \times 3} - 7 \times \overline{x + 13 \times 2} = 0$, cioè $\frac{5}{7} = \frac{x + 13 \times 2}{y - 13 \times 3}$. Faccio $x + 13 \times 2 = 5m$, e però $x = 5m - 13 \times 2$; e $y - 13 \times 3 = 7m$, quindi $y = 7m + 13 \times 3$. Acciò riſpetto alla prima equazione $x = 5m - 13 \times 2$ il valore di $x$ ſia poſitivo, il minimo numero, che ſi poſſa ſupporre in luogo di $m$ deve rendere $m > \frac{13 \times 2}{5}$, tutte le altre ſuppoſizioni poi all'infinito pel valore di $m$ daranno infinite riſoluzioni alla propoſta equazione. Un altro eſempio ci ſomminiſtrerà l'equazione $33x - 59y = 76$. Coi due coefficienti delle incognite formo la frazione $\frac{33}{59}$, e la frazione da ſottrarſi, acciò ſi abbia $b\beta - c\delta = \pm 1$, ſi trova eſſere $\frac{14}{25}$, onde ſottraendo queſta dall'altra ſenza curare il comun denominatore ſi ſi trova $33 \times 25 - 59 \times 14 = -1$. Moltiplico queſta equazione pel termine cognito 76 così $76 \times 33 \times 25 - 76 \times 59 \times 14 = -76$, che ſommo coll'equazione data $33x - 59y = 76$, e mi viene $33 \times \overline{x + 76 \times 25} - 59 \times \overline{y + 76 \times 14} = 0$, da cui ſi ricava $\frac{33}{59} = \frac{y + 76 \times 14}{x + 76 \times 25}$. Ora nulla più reſta a fare, che $y + 76 \times 14 = 33m$, ed $x + 76 \times 25 = 59m$. Dalla prima ſi ha $y = 33m - 76 \times 14$, riſpetto a cui deve eſſere $m > \frac{76 \times 14}{33}$, acciò il valore di $y$ ſia poſitivo; e dalla ſeconda $x = 59m - 76 \times 25$, riſpetto alla quale deve eſſere $m > \frac{76 \times 25}{59}$, acciò il valore di $x$ ſia poſitivo.

440. Veniamo ora alla terza ſpezie di Problemi, ne'quali ſi tratta di ritrovare numeri, che ſiano poteſtà perfette, la quale condizione, come ognun vede, non eſclude i numeri frarti, e riſpetto alla poteſtà pari non eſclude i numeri negativi, poichè (pel num. 114.) le poteſtà d'eſponente pari ſono ſempre poſitive, comunque la loro radice ſia poſitiva, o negativa. Eſſendo che la condizione propoſta eſige, che ſi ritrovino numeri commenſurabili, o ſia razionali, i quali ſoddisfino ai Problemi indeterminati, ai quali porrebbe ſoddisfare una infinità di numeri incommenſurabili; però tutta l'arte da uſarſi nella ſoluzione di quelli Problemi conſiſte in far ſparire dall'equazione il quadrato, e le più alte poteſtà dell'incognita,

che deve eſſere il valore dell'equazione, così che reſtando eſſa elevata al primo grado, ſi poſſa riſolvere l'equazione ſenza che v'intervengano quantità radicali. Per ciò fare molti ſono gli artifizj, che paſſano ſotto il nome di Diofanto, per avere egli ſpezialmente trattato di queſta ſpezie di Problemi. Io indicherò i principali, da' quali ſi potrà prender norma per gli altri caſi, facendone l'applicazione agli eſempj particolari.

## PROBLEMA 6.

441. Si debbano ritrovare due numeri con queſta condizione, che i loro quadrati più il rettangolo del ſecondo in una quantità cognita $a$, diano un numero quadrato.

442. Riſol. Il maggiore de' due cercati numeri ſia $y$, il minore ſia $x$, ed $u^2$ ſia il quadrato, cui deve eſſere uguale la ſomma de' loro quadrati più il rettangolo del ſecondo $x$ in $a$: Si avrà a tenore della condizione $x^2+ax+y^2=u^2$. Ora $u$ ſi faccia uguale a $y+b$, e ſi avrà $x^2+ax+y^2=y^2+2by+b^2$, cioè $x^2+ax=2by+b^2$, e però $y=\frac{x^2+ax-b^2}{2b}$, in cui qualunque ſia il valore ſoſtituito in luogo di $x$ ſi ha ſempre per $y$ un valor razionale. Tutto l'artifizio in queſta ſoluzione è ſtato di introdurre il primo numero cercato $y$ in luogo di $u^2$, onde ſi poteſſe far ſparire il quadrato della ſteſſa $y$. Ma veniamo a determinare i due numeri cercati: Sia $a=7$, $b=2$, ſe ſi ſoſtituirà 1 in vece di $x$, ſi avrà $y=\frac{1+7-4}{4}=1$; ſe ſi ſoſtituirà 2 in vece di $x$, ſi avrà $y=\frac{7}{2}$; ſe ſi ſoſtituirà 3, ſi avrà $y=\frac{13}{2}$ ec.

443. Lo ſteſſo artifizio ſi ſarebbe potuto uſare, qualora foſſe ſtato propoſto di ritrovare due numeri con queſta condizione, che la ſomma de' loro quadrati, o pure la differenza foſſe un numero quadrato, mentre chiamando $x$ uno de' cercati numeri, e l'altro $y$, giuſta la condizione propoſta ſi avrebbe $x^2+y^2=u^2$, o $x^2-y^2=u^2$, e facendo $u=x+z$ ne viene giuſta la prima condizione $x^2+y^2=x^2+2xz+z^2$, cioè $y^2=2xz+z^2$, e però $x=\frac{y^2-z^2}{2z}$, e giuſta la ſeconda condizione $x^2-y^2=x^2-2xz+z^2$, vale a dire $-y^2=-2xz+z^2$, e però $x=\frac{y^2+z^2}{2z}$. Un altro artifizio ancora puoſſi uſare, ed è riſpetto alla prima condizione di chiamare il primo numero $x^2-y^2$, ed il ſecondo $2xy$, mentre al quadrato del primo, che è $x^4-2x^2y^2+y^4$ aggiungendoſi il quadrato del ſecondo, che è $4x^2y^2$, ſi ha $x^4+2x^2y^2+y^4$, che è un numero quadrato, la di cui radice è $x^2+y^2$: Riſpetto alla ſeconda condizione ſi chiami $x^2+y^2$ il primo numero, e $2xy$ il ſecondo, e la differenza de' loro quadrati ſarà $x^4-2x^2y^2+y^4$, che è numero quadrato, la di cui radice è $x^2-y^2$; o pure il primo numero ſi chiami $x^2+y^2$, e il ſecondo $x^2-y^2$, e la differenza de' loro quadrati ſarà $4x^2y^2$ numero quadrato, la di cui radice è $2xy$.

444. Un'equazione di queſta forma $az^2=x^2-y^2$ ſi potrà riſolvere ancora così: Poichè $x^2-y^2=\overline{x+y}\,\overline{x-y}$, ſi faccia $x+y=r$, ed $x-y=t$, e ſi avrà $az^2=rt$

$= rt$ mediante la ſoſtituzione; quindi $t = \frac{az^2}{r}$, onde biſognerà, che $az^2$ ſia diviſibile per $r$. Sia P la più grande miſura di $a$, e di $r$, così che ſia $a = PQ$, ed $r = PR$, eſſendo Q, R numeri primi fra loro, e ſi avrà $t = \frac{Qz^2}{R}$, conſeguentemente $z^2 = RS$, e però $t = QS$, eſſendo P, Q due qualſivoglia fattori di $a$. Sia in oltre $s$ la più grande miſura di R, S, e ſiccome RS deve eſſere uguale a un quadrato, egli è chiaro, che R, S non potranno eſſere, che di queſta forma $R = sm^2$, $S = sn^2$, eſſendo $s$, $m$, $n$ numeri interi: Per lo che ſi avrà $z^2 = s^2m^2n^2$, $r = x + y = Psm^2$, $t = x - y = Qsn^2$; dunque $z = smn$, $x = s \times \frac{Pm^2 + Qn^2}{2}$, $y = s \times \frac{Pm - Qn^2}{2}$, e facendoſi $s = 2$, giacchè è inutile queſto comun fattore nell' eſpreſſione dei valori di $x$, $y$, $z$, ſarà $z = 2mn$, $x = Pm^2 + Qn^2$, $y = Pm^2 - Qn^2$. Or ecco riſoluta l'equazione, cioè ritrovati i valori razionali di $z$, $x$, $y$, mentre per $m$, $n$ ſi poſſono prendere qualſivoglia numeri interi, e P, Q ſono i due fattori di $a$, tra' quali deveſi contare ancor l'unità. Quante poi ſaranno le maniere di dividere il numero $a$ in due fattori, altrettante ſaranno le differenti eſpreſſioni di $z$, $x$, $y$. Per eſempio l' equazione propoſta ſia $3z^2 = x^2 - y^2$, ſarà $3 = PQ$, e perchè i fattori di 3 non poſſono eſſere, che 1, 3, cioè $3 = 1 \times 3$, ſarà $P = 1$, $Q = 3$. Prendendoſi poi per $m$, $n$ de' numeri ad arbitrio, ſe ſi dirà $m = 1$, $n = 2$, ſarà $z = 4$, $x = 1 + 12 = 13$, $y = 1 - 12 = -11$. Se pertanto ſi ſoſtituiranno queſti valori di $z$, $x$, $y$ nell' equazione $3z^2 = x^2 - y^2$, ella diverrà $48 = 169 - 121$, cioè $48 = 48$ equazione identica, la quale fa vedere, che i trovati numeri razionali corriſpondenti a $z$, $x$, $y$ ſoddisfano all' equazione.

## PROBLEMA 7.

445. Si debbano ritrovare due numeri con queſta condizione, che la ſomma de' loro quadrati ſtia al loro prodotto, come il primo numero cercato accreſciuto di una quantità cognita $a$ ſta al ſecondo.

Riſol. Il primo numero cercato ſi dica $x - a$, il ſecondo $y + b$; giuſta la condizione propoſta ſi avrà $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 : xy - ay + bx - ab :: x : y + b$, e moltiplicando inſieme gli eſtremi, e i medj, ſi avrà $x^2y - 2axy + a^2y + y^3 + 2by^2 + b^2y + bx^2 - 2abx + a^2b + by^2 + 2b^2y + b^3 = x^2y - axy + bx^2 - abx$, cioè togliendo i termini, che ſi eliſono, $-axy + ay^2 + y^3 + 3by^2 - abx + a^2b + b^3 = 0$, e però $x = \frac{y^3 + 3by^2 + a^2y + 3b^2y + a^2b + b^3}{ay + ab}$. Quì tutto l' artifizio è conſiſtito in diminuire la prima incognita aſſunta, ed accreſcere la ſeconda di una quantità coſtante per modo, che nell' equazione ſvaniſſero i termini, in cui entra $x^2$.

Queſto ſteſſo artifizio ha luogo per far ſvanire delle poteſtà di quantità cognite: Per eſempio cercandoſi di dividere in due quadrati un dato numero riſultante dalla ſomma di due quadrati, come $m^2 + n^2$, ſi chiami $ax - m$ uno de' cercati numeri, e $bx - n$ l'altro: Giuſta la condizione propoſta ſi avrà $m^2 + n^2 = a^2x^2 - 2amx + m^2 + b^2x^2 - 2bnx + n^2$, cioè $a^2x - 2am + b^2x - 2bn = 0$, e però $x = \frac{2am + 2bn}{a^2 + b^2}$.

Nel-

Nella ſteſſa maniera ſi ſarebbe operato ſe foſſe ſtato propoſto di ritrovare due numeri con queſta condizione, che la ſomma de' loro quadrati ſia uguale alla ſomma di altri due quadrati; mentre chiamando $x$, $y$ i due numeri cercati, ſi avrebbe, giuſta la condizione propoſta, $x^2+y^2=u^2+z^2$, e in luogo di $u$ ſoſtituendo $x-a$, e $y+b$ in vece di $z$ ne verrebbe $x^2+y^2=x^2-2ax+a^2+y^2+2by+b^2$, cioè $-2ax+a^2+2by+b^2=0$, e però $x=\frac{2by+b^2+a^2}{2a}$.

## PROBLEMA 8.

446. Si debba ritrovare un numero con queſta condizione, che dal di lui quadrato ſottraendoſi un quadrato dato, il reſiduo ſia un quadrato.

Riſol. Il quadrato dato ſia $b^2$, e il numero da cercarſi per ora ſi dica $x$, onde ſi avrà $x^2-b^2$, che ſi faccia uguale ad $\overline{x-b}^2 \times u^2$ così $x^2-b^2=\overline{x-b}^2 \times u^2$, e dividendo per $x-b$, ne verrà $x+b=\overline{x-b} \times u^2$, cioè $x+b=xu^2-bu^2$, e però $x=\frac{bu^2+b}{u^2-1}$, che è il numero cercato. Di fatto ſe dal quadrato di queſto numero ſi ſottrerrà il quadrato di $b$, il reſiduo ſarà un numero quadrato, come lo dimoſtra il calcolo, poichè $\frac{\overline{bu^2+b}^2}{\overline{u^2-1}^2}-b^2$ è, mediante la riduzione allo ſteſſo denominatore, $\frac{b^2u^4+2b^2u^2+b^2-b^2u^4+2b^2u^2-b^2}{\overline{u^2-1}^2}=\frac{4b^2u^2}{\overline{u^2-1}^2}$ numero quadrato.

Il medeſimo artifizio ſi ſarebbe praticato, qualora aveſſe dovuto eſſere $b^2-x^2$ uguale a un numero quadrato.

447. Quando nelle equazioni di queſta forma $z^2=Bu^2+A$, che naſcono dal riſolverſi qualche problema ſemideterminato, ove perciò le incognite $z$, $u$ devono eſſere numeri razionali, o l'una, o l'altra delle quantità A, B, o tutte due ſono numeri quadrati, ſarà ſempre facile il ritrovare valori razionali per $z$, $u$ giuſta il num. 442, mentre ſe è $A=a^2$, baſterà trasformare l'equazione facendo $z=a+ux$, e ſe è $B=b^2$, baſterà fare $z=bu+x$; non egualmente però ſi potrà procedere alla riſoluzione, qualora niuna delle quantità A, B ſia numero quadrato. Prima di eſporre il modo di operare in queſto caſo, farò vedere come qualunque equazione di ſecondo grado a due incognite, ciaſcuna delle quali debba eſſere razionale, ſia riducibile a queſta forma $z^2=Bu^2+A$. Prendo a queſto fine l'equazione ecumenica di ſecondo grado $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, in cui $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ ſono numeri cogniti poſitivi, o negativi, che ſe foſſero fratti, ſi potrebbero levare le frazioni mediante la riduzione allo ſteſſo denominatore, che poi ſi traſcura. Diſpongo queſta equazione così $ax^2+bxy+dx=-cy^2-ey-f$, indi la riſolvo al modo delle quadratiche affette, con che mi viene $x+\frac{by+d}{2a}=$

$$\sqrt{-\frac{cy^2-ey-f}{a}+\frac{b^2y^2+2bdy+d^2}{4a^2}}, \text{ o ſia } 2ax+by+d=$$

$\sqrt{b^2-4ac} \times y^2 + 2bd-4ae \times y + d^2-4af$. Ora questo secondo membro deve essere quadrato, acciò la $x$ riesca razionale, quindi devesi determinare la $y$ in modo, che egli lo possa essere: Per brevità faccio $b^2-4ac=B$, $bd-2ae=m$, $d^2-4af=n$, con che si cambierà in $\sqrt{By+2my+n}$ la quantità $\sqrt{b^2-4ac} \times y^2 + 2bd-4ae \times y + d^2-4af$, e perchè questa quantità deve essere un quadrato, si faccia $By^2+2my+n=u^2$. Si disponga questa equazione così $By^2+2my=u^2-n$, e risolvendola si avrà $By+m=\sqrt{Bu^2+m^2-Bn}$; onde niente altro più si richiede, se non che $Bu^2+m^2-Bn$ sia un quadrato; per lo che si faccia $m^2-Bn=A$, così che si abbia $Bu^2+A$, che deve essere un quadrato, e perciò lo uguaglio a $z^2$. Tutta adunque la difficoltà consisterà in soddisfare a questa equazione $z^2=Bu^2+A$, alla quale si è ridotta l'equazione generale $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, come era proposto, così che i valori di $z$, $u$ siano razionali. Ma poichè si è fatto $\sqrt{By^2+2my+n}=2ax+by+d=u$, e $\sqrt{Bu^2+m^2-Bn}=By+m=z$, sarà $y=\frac{z-m}{B}$, $x=\frac{u-d}{2a}-\frac{b \times \overline{z-m}}{2aB}$, i valori poi di $z$, $u$, si potranno prendere ad arbitrio positivi, o negativi. Ora per avere i valori di $x$, $y$ debbono prima esser cogniti i valori razionali di $u$, $z$: Quindi si deve risolvere l'equazione $z^2=Bu+A^2$ in modo, che $u$, $z$ siano numeri razionali interi, o fratti. Prendiamoli primieramente a considerare fratti, così che ridotti allo stesso denominatore siano $z=\frac{r}{q}$, $u=\frac{t}{q}$, le quali frazioni siano espresse co' minimi termini, e però $r$, $t$, $q$ siano numeri primi frà loro. Mediante la sostituzione di questi valori di $z$, $u$, l'equazione $z^2=Bu^2+A$ si cambierà in $\frac{r^2}{q^2}=\frac{Bt^2}{q^2}+A$, o sia $Aq^2=r^2-Bt^2$. Ed ecco ridotta tutta l'operazione a ritrovare per $r$, $t$, $q$ de' numeri interi razionali.

448. Siccome or si suppone, che nè A, nè B siano numeri quadrati, così suppongo, che nè A, nè B contenga fattori quadrati, mentre se fosse $A=cd^2$, con fare $z=\frac{dr}{q}$, $u=\frac{dt}{q}$, l'equazione si cambierebbe in $\frac{d^2r^2}{q^2}=\frac{Bd^2t^2}{q^2}+cd^2$, cioè $r^2=Bt^2+cq^2$, in cui B, $c$ non solo non sono numeri quadrati, ma nemmeno contengono fattori quadrati. Se fosse $B=be^2$, con fare $z=\frac{r}{q}$, $u=\frac{t}{eq}$, l'equazione risulterebbe $\frac{r^2}{q^2}=\frac{be^2t^2}{e^2q^2}+A$, cioè $r^2=bt^2+Aq^2$, come prima: Finalmente se fosse $A=cd^2$, $B=be^2$, con fare $z=\frac{dr}{q}$, $u=\frac{dt}{eq}$, l'equazione sarebbe $\frac{d^2r^2}{q^2}=\frac{be^2d^2t^2}{e^2q^2}+cd^2$, cioè $r^2=bt^2+cq^2$, che ricade sempre nel caso supposto. Suppongo in oltre, che non sia $B=1$, perchè in tal caso la risoluzione dell'equazione si ridurrebbe al num. 444, lo che pure succederebbe ogniqualvolta fosse $A=B$, poichè allora l'equazione essendo $z^2=Au^2+A$, con fare $z=\frac{Ar}{q}$, $u=\frac{t}{q}$, l'equazione diverrebbe $\frac{A^2r^2}{q^2}=\frac{At^2}{q^2}+A$, vale a dire $Ar^2=t^2+q^2$. Suppongo per ultimo, che sia $A>B$, e conseguentemen-

mente $A > 1$; che se fosse $A < B$, non si avrebbe a far altro, che cambiare nell'equazione A in B, e $t$ in $q$.

449. Poste queste premesse veniamo alla risoluzione dell'equazione $Aq^2 = r^2 - Bt^2$ nelle assunte ipotesi. Tutto l'artifizio per giungere alla bramata risoluzione consiste in dedurre nella maniera, che or ora esporrò, da questa una seconda equazione, dalla seconda una terza ec, e così in poi, finchè si giunga ad una equazione di questa forma $az^2 = x^2 - y^2$, la di cui risoluzione si ha facilmente mediante il num. 444. Da questa equazione già risoluta ripassando per tutte le altre, nelle quali si è sviluppata l'equazione $Aq^2 = r^2 - Bt^2$, a lei finalmente si arriverà, e se ne otterrà la risoluzione cercata. Prima di vedere come ciò debbasi fare, osservo che se (avendosi la frazione $\frac{r'}{t'}$ tale, che con fare $\frac{r}{t} - \frac{r'}{t'}$, e con trascurare il comun denominatore sia $rt' - r't = \pm 1$, di cui siccome $r$, $t$ sono incognite, così $r'$, $t'$ restano da determinarsi col calcolo) si moltiplicherà l'equazione $Aq^2 = r^2 - Bt^2$ per $r'^2 - Bt'^2$ onde si abbia $Aq^2 \times \overline{r'^2 - Bt'^2} = \overline{r^2 - Bt^2} \times \overline{r'^2 - Bt'^2}$, in cui $\overline{r^2 - Bt^2} \times \overline{r'^2 - Bt'^2} = \overline{rr' \pm Btt'}^2 - B \times \overline{rt' \pm r't}^2$, come costa dal fare le indicate operazioni, poichè $- B \times \overline{rt' \pm r't}^2 = \mp B$, con supporre $\overline{rr' \pm Btt'}^2 = a^2$, l'equazione farà $Aq^2 \times \overline{r'^2 - Bt'^2} = a^2 - B$. Dunque il termine cognito A dell'equazione deve essere un divisore di una quantità di questa forma $a^2 - B$, cioè di un numero quadrato diminuito del coefficiente di $t^2$, o sia $\frac{a^2 - B}{A}$ deve essere un numero intero: Che se questo numero intero, vale a dire questo quoziente si dirà $= A'$, sarà $AA' + B = a^2$, quindi un multiplo del termine cognito A aumentato del coefficiente B di $t^2$ deve essere un quadrato perfetto. Si osservi, che il prodotto di due, tre ec. formole di questa forma $m^2 - An^2$ è sempre della medesima forma, cioè $M^2 - AN^2$. Di fatto $\overline{m^2 - An^2} \times \overline{m'^2 - An'^2} = \overline{mm' \pm Ann'}^2 - A \times \overline{mn' \pm m'n}^2$ che con farsi $\overline{mm' \pm Ann'}^2 = M^2$, $\overline{mn' \pm m'n}^2 = N^2$, è $= M^2 - AN^2$. Se le formole saranno tre, come $\overline{m^2 - An^2} \times \overline{m'^2 - An'^2} \times \overline{m''^2 - An''^2}$, poichè il prodotto delle due prime, come pur ora si è veduto, è di questa forma $M^2 - AN^2$, se si moltiplicherà questo prodotto colla terza formola, si avrà $\overline{M'^2 - AN'^2} \times \overline{m''^2 - AN''^2} = \overline{Mm'' \pm ANn''}^2 - A \times \overline{Mn'' \pm Nm''}^2 = P'^2 - AQ'^2$ con farsi $\overline{Mm'' \pm ANn''}^2 = P'^2$ $\overline{Mn'' \pm Nm''}^2 = Q'^2$ ec. Basta poi una leggerissima riflessione per osservare la legge, colla quale si formano dai proposti fattori le formole $\overline{mm' \pm Ann'}^2 - A \times \overline{mn' - m'n}^2$ ec.

450. Per trovare questo numero $a$, che deveti cercar tentando, si rifletta che sarà sempre $a < \frac{A}{2}$: Onde se fra i numeri naturali da 1 fino ad $\frac{A}{2}$ non se ne troverà alcuno, che renda $\frac{a^2 - B}{A} = A'$ (non si considerino i segni di $a$, A), l'equazione non sarà risolubile con numeri razionali: E poichè è $a < \frac{A}{2}$, sarà $a^2 < \frac{A^2}{4}$ e molto più $a^2 - B < \frac{A^2}{4}$; ma si è trovato $AA' = a^2 - B$, dunque fattane la so-

sti-

ſtituzione ſarà $AA' < \frac{A^2}{4}$, cioè $A' < \frac{A}{4}$. Che ſe in vece di eſſere $AA' = a^2 - B$, foſſe $AA' = a^2 + B$, con ſoſtituirſi A in luogo di B, ſi avrebbe $AA' < a^2 + A$, e e molto più $AA' < \frac{A^2}{4} + A$ (con ſoſtituire $\frac{A^2}{4}$ in luogo di $a^2$) conſeguentemente $A' < \frac{A}{4} + 1$. Ed ecco fiſſati i limiti al numero $a$, che deve eſſere $< \frac{A}{2}$, e al quoziente $A'$, che deve eſſere $< \frac{A}{4}$ quando l'equazione è $Aq^2 = r^2 - Bt^2$, ma quando l'equazione è $Aq^2 = r^2 + Bt^2$, deve eſſere $A' < \frac{A}{4} + 1$.

Ciò poſto veniamo al modo di giungere a una equazione di queſta forma $az^2 = x^2 - y^2$. L'equazione data è $Aq^2 = r^2 - Bt^2$: Colle regole date ſi trovi un numero $a$ tale, onde ſia $\frac{a^2 - B}{A} = A'$. Se $A'$, che deve eſſere un numero intero, è $< B$, o pure $= B$, non occorre far altro; ma ſe è $A' > B$, biſognerà trovare un'altro numero $b$ tale, che ſia $\frac{b^2 - B}{A'} = A''$; lo ſteſſo ſi ripeta ſe $A'' > B$; finchè ſi abbia un quoziente minore di B. Queſte equazioni $\frac{a^2 - B}{A} = A'$, $\frac{b^2 - B}{A'} = A''$ ec., o ſia $a^2 - B = AA'$, $b^2 - B = A'A''$ ec. ſi chiamino equazioni ſecondarie: L'equazione data poi $Aq^2 = r^2 - Bt^2$ ſi dica una equazione primaria. Suppoſto che il quoziente minore, o eguale a B ſia $A''$, di lui ſi prevalga per giungere alla ſeconda delle equazioni primarie, che dovrà eſſere $Bq'^2 = r'^2 - A't'^2$. Da queſta equazione ſi deducano le ſue ſecondarie, finchè ſi trovi un quoziente, per eſempio $C = A'$, o $C < A'$ nel qual caſo ſi paſſi alla terza delle equazioni primarie, che dovrà eſſere $A'q''^2 = r''^2 - Ct''^2$. Da queſta ſi ricavino le convenienti ſecondarie giuſta la legge fiſſata, cioè finchè ſi abbia un quoziente minore, o eguale a C, del qual quoziente, che ſia per eſempio D, ſi prevalerà per la quarta delle equazioni primarie, che ſarà $Cq'''^2 = r'''^2 - Dt'''^2$. Quando da una equazione ſecondaria ſi avrà per quoziente l'unità, niente altro più ſi richiederà per giungere a una equazione primaria di queſta forma $az^2 = x^2 - y^2$. Per mettere la coſa ſotto degli occhi, ordinerò ſotto l'equazione data le altre naſcenti equazioni primarie, e a lato le equazioni ſecondarie corriſpondenti a ciaſcuna

| Equazioni primarie | | Equazioni ſecondarie | |
|---|---|---|---|
| Equaz. data | I. $Aq^2 = r^2 - Bt^2$ | $\frac{a^2-B}{A} = C$ | |
| | | $\frac{b^2-B}{C} = D$ | Si ſuppone $D < B$ |
| | II. $Bq'^2 = r'^2 - Dt'^2$ | $\frac{e^2-D}{B} = E$ | Si ſuppone $E < D$ |
| | III. $Dq''^2 = r''^2 - Et''^2$ | $\frac{g^2-E}{D} = F$ | |
| | | $\frac{b^2-E}{F} = H$ | Si ſuppone $H = 1$ |
| | IV. $Eq'''^2 = r'''^2 - t'''^2$ | | |

vale a dire

| Equazioni primarie | | Equazioni ſecondarie | |
|---|---|---|---|
| Equaz. data | I. $Aq^2 = r^2 - Bt^2$ | $AC = a^2 - B$<br>$CD = b^2 - B$ | $(\Delta)$ |
| | II. $Bq'^2 = r'^2 = Dt'^2$ | $BE = e^2 - D$ | $(\Theta)$ |
| | III. $Dq''^2 = r''^2 - Et''^2$ | $DF = g^2 - E$<br>$FH = b^2 - E$ | $(\Lambda)$ |
| | IV. $Eq'''^2 = r'''^2 - t'''^2$ | | |

Se l'ultima equazione IV. foſſe $Eq'''^2 = r'''^2 + t'''^2$ a motivo di $H = -1$, in tal caſo biſognerebbe continuare ancora l'operazione, trovando un'altra equazione primaria nella ſolita maniera, onde ſi aveſſe un'equazione della forma $az^2 = x^2 - y^2$.

Or che ſono giunto a queſta IV. delle equazioni primarie, baſta così: Ella cade ſotto la forma $az^2 = x^2 - y^2$, e però ſi riſolve giuſta il num. 444, mediante il quale ſi hanno i valori di $q'''$, $r'''$, $t'''$. Avuti queſti valori ſi paſſi a trovare i valori di $q''$, $r''$, $t''$, i quali ſi otterranno con mettere primieramente l'equazione IV. ſotto la forma delle equazioni $(\Lambda)$ (poichè ella era ſtata voltata così $t'''^2 = r'''^2 - Eq'''^2$) indi moltiplicarla nel loro prodotto, mentre paragonando ciò, che ne verrà coll'equazione III., ſi potranno determinare i valori di $q''$, $r''$, $t''$. Per ritrovare i valori di $q'$, $r'$, $t'$ ſi diſponga per la ſteſſa ragione precedente l'equazione III. così $Et''^2 = r''^2 - Dq''^2$, e ſi moltiplichi nell'equazione $(\Theta)$, e queſto prodotto ſi paragoni coll'equazione II., e con tal mezzo ſi determinino i valori di $q'$, $r'$ $t'$. Finalmente per avere i valori di $q$, $r$, $t$, ſi diſponga l'equazione II. così $Dt'^2 = r'^2 - Bq'^2$, quale ſi moltiplichi nel prodotto delle due epuazioni $(\Delta)$, e paragonandoſi ciò, che ne viene coll'equazione I, ſi otterranno per ultimo i ricercati valori razionali di $q$, $r$, $t$.

L'eſempio particolare riſchiarirà anche di più l'idea del metodo. Debbaſi riſolvere l'equazione $157 = z^2 - 19u^2$ per modo, che eſſendo $z = \frac{r}{q}$, $u = \frac{t}{q}$, ſiano $q$, $r$, $t$ numeri razionali, giacchè i due numeri 157, 19 nè ſono quadrati, nè con-

contengono fattori quadrati. Fatta la ſoſtituzione di $\frac{r}{q}$ in luogo di $z$, e di $\frac{t}{q}$ in luogo di $u$, l'equazione ſi cambierà in $157q^2 = r^2 - 19t^2 \ldots$ (Δ). Si ha adunque $A = 157$, $B = -19$. Acciò l'equazione (Δ) poſſa ſuſſiſtere deve eſſere un multiplo di A accreſciuto di B eguale a un numero quadrato, cioè $mA + B = a^2$, e nello ſteſſo tempo deve eſſere $a > \frac{A}{2}$ cioè $< \frac{157}{2}$, ſiccome deve eſſere $m < \frac{157}{4}$. Ora ſi trova $m = 6$, $a = 31$, con che ſi ha la prima equazion ſecondaria $157 \times 6 = 31^2 - 19 \ldots$ (Θ), e ſiccome il numero 6, che è fattore di 157, e nel tempo ſteſſo quoziente di $\frac{31^2 - 19}{157}$, è minore di 19, però la prima ſerie delle equazioni ſecondarie ſi riduce a queſta ſola. Paſſo pertanto alla ſeconda delle equazioni principali, che è $19q'^2 = r'^2 - 6t'^2 \ldots$ (Λ), la quale ſuſſiſterà ogniqualvolta ſia un multiplo di 19 accreſciuto di 6 coefficiente di $t^2$ eguale a un quadrato perfetto, come $19n + 6 = b^2$, così che ſia $n < \frac{19}{4}$, $b < \frac{19}{2}$. Per poco, che a ciò ſi rifletta ſi trova $n = 1$, $b = 5$, con che ſi ha l'equazione ſecondaria $19 \times 1 = 5^2 - 6$ (Π), la quale è la ſola, che ſi deve dedurre dall'equazione (Λ), perchè il fattore $1 < 6$. Paſſo quindi alla terza delle equazioni primarie, cioè $6q''^2 = r''^2 - t''^2$ (Φ), che è anche l'ultima, poichè cade ſotto la forma $az^2 = x^2 - y^2$. Ecco qui ſotto le ritrovate equazioni primarie colle corriſpondenti ſecondarie.

| | Equazioni primarie | Equazioni ſecondarie. |
|---|---|---|
| (Δ) | $157q^2 = r^2 - 19t^2$ | $157 \times 6 = 31^2 - 19$ (Θ) |
| (Λ) | $19q'^2 = r'^2 - 6t'^2$ | $19 \times 1 = 5^2 - 6$ (Π) |
| (Φ) | $6q''^2 = r''^2 - t''^2$ | |

Paragonando queſt'ultima equazione $6q''^2 = r''^2 - t''^2$ coll'equazione $az^2 = x^2 - y^2$ del num. 444, ſi ha $q'' = z$, $r'' = x$, $t'' = y$, e ſiccome è $a = 6$, e i fattori di 6 poſſono eſſere tanto 1, 6, come 2, 3, però prendendo i due primi 1, 6, onde ſia $P = 1$, $Q = 6$, farà $q'' = 2mn$, $r'' = m^2 + 6n^2$, $t'' = m^2 - 6n^2$. Reſtano a determinarſi i valori di $q'$, $r'$, $t'$, e $q$, $r$, $t$. Per avere i valori di $q'$, $r'$, $t'$ prendo l'equazione (Φ), che ordino così $t''^2 = r''^2 - 6q''^2$, e la moltiplico nell'equazione (Π), regolandomi in queſta moltiplicazione giuſta il num. 449, nel qual modo operando mi viene $19t''^2 = \overline{5r'' + 6q''}^2 - 6 \times \overline{5q'' + r''}^2$, poſcia paragono queſta equazione coll'equazione (Λ), e ritrovo $t'' = q'$, $5r'' + 6q'' = r'$, $5q'' + r'' = t'$. Finalmente per avere i valori di $q$, $r$, $t$, prendo l'equazione (Λ), e dopo averla ordinata così $6t'^2 = r'^2 - 19q'^2$ la moltiplico nella maniera poc'anzi praticata coll'equazione (Φ), onde mi naſce l'equazione $157 \times 6^2 t'^2 = \overline{31r' + 19q'}^2 - 19 \times \overline{31q' + r'}^2$, che paragonata coll'equazione (Δ) dà $q = 6t'$, $r = 31r' + 19q'$, $t = 31q' + r'$. Ed eccoci giunti ai valori da darſi a $q$, $r$, $t$, che riſolvono la propoſta equazione. Soggiungerò qui ordinatamente i ritrovati valori delle quantità $q''$, $r''$, $t''$; $q'$, $r'$, $t'$; $q$, $r$, $t$.

$$\begin{array}{lll} q''=2mn & q'=t'' & q=6t' \\ r''=m^2+6n^2 & r'=5r''+6q'' & r=31r'+19q' \\ t''=m^2-6n^2 & t'=5q''+r'' & t=31q'+r' \end{array}$$

o sia assegnandoci i suoi valori espressi da $m$, $n$, sarà

$$\begin{array}{lll} q''=2mn & q'=m^2-6n^2 & q=60mn+6m^2+36n^2. \\ r''=m^2+6n^2 & r'=5m^2+30n^2+12mn & r=155m^2+930n^2+372mn+19m^2-114n^2. \\ t''=m^2-6n^2 & t'=10mn+m^2+6n^2 & t=31m^2-186n^2+5m^2+30n^2+12mn. \end{array}$$

Ora egli è arbitrario il prendere per $m$, $n$ quei numeri, che più piacciono; se pertanto si supporrà $m=2$, $n=3$, sarà $q=708$, $r=10272$, $t=-1188$, dalla cui sostituzione l' equazione (A) diventa $78698448=105513984-26815536$; onde rispetto all'equazione $157=z^2-19u^2$ trovasi essere $z=\frac{856}{59}$, $u=\frac{99}{59}$.

Se l' equazione proposta da risolversi fosse stata $628=z^2-19u^2$, in cui 628 ha un fattore quadrato, essendo $628=4\times 157$, in tal caso si sarebbe fatto $z=\frac{2r}{q}$, $u=\frac{2t}{q}$, con che ne viene l' equazione $628q^2=4r^2-76t^2$, cioè $157q^2=r^2-19t^2$, e siccome col risolversi questa equazione si è trovato $z=\frac{856}{59}$, $u=\frac{99}{59}$, così per l' equazione $628=z^2-19u^2$ deve essere $z=2\times\frac{856}{59}$, $u=2\times\frac{99}{59}$.

451. Quantunque la condizione, che accompagna la risoluzione di queste equazioni $A=z^2\pm Bu^2$, risguardi soltanto i numeri razionali, comunque siano interi, o fratti, onde possa bastare la soluzione datane in numeri fratti, pure soggiugnerò brevemente come si possa risolvere in numeri razionali interi l' equazione $A=z^2+Bu^2$, allorchè lo permette la natura de' numeri A, B. Supposto che A, B siano numeri primi tra loro, acciò l' equazione sia risolubile bisogna in primo luogo, che, come si è provato di sopra, abbia luogo questa equazione $AA'=m^2+B$, la quale ricavasi dal moltiplicare la data equazione per $z'^2+Bu'^2$ così $A\times\overline{z'^2+Bu'^2}=\overline{z^2+Bu^2}\times\overline{z'^2+Bu'^2}$, che (giusta il num. 449.) è $A\times\overline{z'^2+Bu'^2}=\overline{zz'+Buu'}^2+B\times\overline{zu'-z'u}^2$ (le quantità $z'$, $u'$ sono tali, che rendono $z'u-z'u=\pm 1$), e perchè $+B\times\overline{zu'-zu}^2=B$, se si farà $\overline{zz'+Buu'}^2=m^2$, sarà $A\times\overline{z'^2+Bu'^2}=m^2-B$: Ed essendo $z'^2+Bu'^2$ il fattore di A, ben si vede, che è $z'^2+Bu'^2=A'$. Dalla espressione poi $\overline{zz'+Buu'}^2=m^2$ resta determinato anche il valore di $m$, che è $m=zz'+Buu'$. Dalla formola $AA'=m^2+B$ si passi nello stesso modo alla seconda $A'A''=m'^2+B$, e così in poi, ritrovando susseguentemente i valori di $A'$, $A''$, $A'''$ ec., come di $m'$, $m''$, $m'''$ ec., onde si avrà

Equazioni condizionali

$AA' = m^2 + B$
$A'A'' = m'^2 + B$
$A''A''' = m''^2 + B$
$A'''A'''' = m'''^2 + B$ ec.

Equazioni dedotte

I. $A' = z'^2 + Bu'^2$
II. $A'' = z''^2 + Bu''^2$
III. $A''' = z'''^2 + Bu'''^2$
IV. $A'''' = z''''^2 + Bu''''^2$

(P)

$m = zz' + Bu\,u'$ $(\theta)$
$m' = z'z'' + Bu'\,u''$ $(\lambda)$
$m'' = z''z''' + Bu''u'''$ $(\mu)$
$m''' = z'''z'''' + Bu'''u''''$ $(\pi)$

Le equazioni condizionali devonsi tanto continuare, finchè si giunga ad una delle equazioni (P), che sia generalmente $A^n = z^n + Bu^n$ (la lettera $n$ dinota l'apice), che sia facilmente risolubile, come fra poco dirò, con numeri razionali interi, mentre da $z^n$, $u^n$ rimontando per $z^{n-1}$, $u^{n-1}$; $z^{n-2}$, $u^{n-2}$ ec. fino a $z$, $u$, si giungerà così ai valori di $z$, $u$, che danno all'equazione proposta la soluzione bramata; stante che le quantità $z^n$, $u^n$ sono determinate dalla condizione, che $z^{n-1}u^n - z^n u^{n-1} = \pm 1$, e così delle altre come segue

$z'$, $u'$ determinate da $zu' - z'u = \pm 1$ $(\beta)$
$z''$, $u''$ da $z'u'' - z''u' = \pm 1$ $(\gamma)$
$z'''$, $u'''$ da $z''u''' - z'''u'' = \pm 1$ $(\delta)$
$z''''$, $u''''$ da $z'''u'''' - z''''u''' = \pm 1$ ec. $(\epsilon)$

Supponiamo ora, che l'ultima delle equazioni (P) sia tale, che si possa agevolmente risolvere determinando i valori razionali interi di $z''''$, $u''''$, e però veniamo al modo di rimontare da $z''''$, $u''''$ per $z'''$, $u'''$ ec. fino a $z$, $u$. Ciò si otterrà facilmente con ritrovare le equazioni, che diano i valori di $z$, $z'$, $z''$ ec. e di $u$, $u'$, $u''$ ec. Per avere i valori di $z$, $u$ si faccia uso delle due equazioni $\beta$, $\theta$. Si prenda dall'una, e dall'altra il valore di $u$, così $u = \frac{zu' \mp 1}{z'}$, $u = -\frac{zz' + m}{Bu'}$, e si paragonino tra loro questi due valori, onde si abbia $\frac{zu' \mp 1}{z'} = -\frac{zz' + m}{Bu'}$, cioè $zz'^2 + Bzu'^2 = z'm \pm Bu'$, e però $z = \frac{mz' \pm Bu'}{z'^2 + Bu'^2}$; ma $z'^2 + Bu'^2 = A'$, dunque $z = \frac{mz' \pm Bu'}{A'}$: Nella stessa maniera si troverà $u = \frac{mu' \pm z'}{A'}$. Istessamente operando si avrà mediante le due equazioni $\gamma$, $\lambda$ $z' = \frac{m'z'' \pm Bu''}{A''}$, $u' = \frac{m'u'' \pm z''}{A''}$, e così in poi come segue

(R)

I. $z = \frac{mz' \pm Bu'}{A'}$
II. $z' = \frac{m'z'' \pm Bu''}{A''}$
III. $z'' = \frac{m''z''' \pm Bu'''}{A'''}$ ec.

I. $u = \frac{mu' \pm z'}{A'}$
II. $u' = \frac{m'u'' \pm z''}{A''}$
III. $u'' = \frac{m''u''' \pm z'''}{A'''}$ ec.

In queste equazioni i segni ambigui si possono prendere a piacere, onde avere per $z$, $z'$, $z''$ ec., $u$, $u'$, $u''$ ec. de' numeri interi.

452. Acciò l'equazione proposta sia risolubile con numeri razionali interi, non solo devono aver luogo le equazioni condizionali del num. 451., ma in oltre bisogna, che le

le equazioni dedotte (P) ſiano riſolubili con numeri razionali interi, conſeguentemente ſa di meſtiere, che le quantità $z$, $z'$, $z''$ ec., $u$, $u'$, $u''$ ec., ottenute dalle equazioni (R) ſiano numeri interi. Ciò poi avrà luogo ogniqualvolta l'ultimo fattore $A''$ ſia uguale all'unità, cioè $A''=1$; poichè dovendo eſſere $A'' < B$, l'ultima equazione $A''=(z'')^2+B(u'')^2$ non può ſuſſiſtere, ſe non è $u''=0$, e però $A''=(z'')^2$, di cui deve eſſere $z''=1$, e quindi $A''=1$, altrimenti non poſſono eſſere numeri interi i valori di $z''^{-1}$, $u''^{-1}$: Per lo che ſe $A'' < B$, è differente dall'unità, l'equazione non ſarà riſolubile con numeri interi. Quando adunque ſi ſarà giunti a un fattore $A''=1$, dovrà eſſere $u''=0$, e $z''=1$, le quali quantità eſſendo cognite, ſi arriverà per mezzo delle equazioni (R) a trovare finalmente i valori di $z$, $u$, che riſolvono l'equazione.

Se ſi troveranno più numeri, che ſi poſſano prendere in luogo di $m$, ognuno de' quali ſalvi la formola $AA'=m^2-B$, altrettante ſaranno le diverſe ſoluzioni dell'equazione propoſta, lo che pure s'intenda riſpetto al poterſi prendere la ſteſſa quantità $m$ poſitiva, e negativa, alle quali coſe deve aver riguardo chi cerca tutte le ſoluzioni poſſibili.

Si debba per eſempio riſolvere l'equazione $166=z^2+13u^2$ in modo, che i valori di $z$, $u$ ſiano numeri razionali interi: Comincio dal ritrovare le equazioni corriſpondenti alle formole $AA'=m^2-B$, $A'A''=m'^2-B$ ec. finchè giunga ad $A''=1$. Eſſe ſono le ſeguenti

$$\begin{aligned} 166 \times 17 &= 53^2 + 13 \\ 17 \times 14 &= 15^2 + 13 \\ 14 \times 1 &= 1^2 + 13 \end{aligned}$$

Si ha pertanto $A'=17$, $A''=14$, $A'''=1$; $m=53$, $m'=15$, $m''=1$. Poichè ſi è ottenuto $A'''=1$, ſarà (pel num. 452.) $z'''=1$, $u'''=0$. Mediante queſti valori di $z'''$, $u'''$, e le formole (R) del num. 251. ſi avranno i valori di $z''$, $u''$; $z'$, $u'$, e finalmente di $z$, $u$, come ſegue

$$\begin{aligned} z''' &= 1 & u''' &= 0 \\ z'' &= 1 & u'' &= 1 \\ z' &= 2 & u' &= 1 \\ z &= 7 & u &= 3 \end{aligned}$$

Ed ecco ritrovati i valori di $z$, $u$, che ſoddisfano all'equazione. Di fatto ſe ſi ſoſtituirà 7 in luogo di $z$, e 3 in vece di $u$ nell'equazione, eſſa ſi cambierà in $166=49+117=166$ equazione identica, che giuſtifica la ritrovata riſoluzione.

## Osservazioni su le Equazioni finali.

453. Prima di finire queſto capo ſtimo opportuno oſſervare alcune coſe, che nelle equazioni finali dedotte dalla ſoluzione di qualche Problema poſſono occorrere: Una riſguarda le equazioni identiche, che hanno cioè le ſteſſe quantità da una parte, e dall'altra del ſegno d'egualità, onde ne riſulta $o=o$: Queſte equazioni, che naſcono dopo eſſerſi adempiute tutte le condizioni propoſte, ci fanno ſapere, che tutte le quantità, di cui ſi tratta, inchiudono le condizioni date, vale a dire che la propoſizione non è un problema, ma un Teorema, mentre portandoci queſte equazioni a concluſione vera, eſſendo veriſſimo, che il zero è uguale a zero, cioè

cioè ſparendone l' incognita, fanno conoſcere, che il valore dell' incognita, qualunque egli ſia, è quello, che ſi vuole, il che ſi vedrà apertamente nel ſeguente Eſempio.

## PROBLEMA.

454. Cercaſi qual foſſe il Capitale $x$ di un Mercante, il quale aumentandolo ogni anno di $\frac{1}{m}$, dopo un numero $m$ di anni lo trova eſſere $= \overline{m+1} \times x$.

455. Riſol. Dalla condizione propoſta ne naſce l' equazione $x + \frac{x}{m} \times m = \overline{m+1} \times x$, cioè $mx + x = mx + x$, e però $0 = 0$. Quindi è, che qualunque numero ſi prenda in vece di $x$, egli ſoddisfarà al queſito, conſeguentemente il Capitale cercato poteva eſſere qualunque numero.

456. Che ſe l' equazione riſulterà identica prima che ſiano adempiute tutte le condizioni propoſte, ciò vorrà dire, che o ſi è commeſſo errore nel calcolo, o pure che in luogo di una condizione neceſſaria ſe n' è introdotta una ſuperflua; poichè (giuſta il num. 421.) le condizioni ſuperflue non ripugnanti eſſendo inchiuſe nelle condizioni neceſſarie, o ſia eſſendo identiche alle neceſſarie, debbono indiſpenſabilmente dare eſpreſſioni identiche, e però rendere identica l' equazione.

457. Succede alle volte, che nell' uno, e nell' altro membro dell' equazione finale ſi trovi la ſteſſa incognita affetta dal medeſimo ſegno, di cui perciò non ſi può determinare il valore, come ſarebbe l' equazione $ax - cd + b^2 = ax + de$. Ciò vuol dire, che il Problema è di ſua natura indeterminato.

458. Quando l' equazione finale porta all' aſſurdo, dando il tutto uguale alla parte, o una quantità finita uguale a zero, in ſuppoſizione però che l' incognita non ſia una grandezza infinita, il Problema ſarà impoſſibile.

CA-

# CAPO III.

## TEORIA GENERALE DELLE EQUAZIONI, E DELLA LORO RISOLUZIONE.

### ARTICOLO I.

*Della geneſi, e delle proprietà a qualſivoglia equazione comuni.*

459. TEor. 1. Qualunque equazione riſulta dal prodotto di tanti fattori di primo grado, o reali, o immaginarj, o in parte reali, e in parte immaginarj, il di cui primo termine è l'incognita $x$, e il ſecondo è una quantità cognita, che è radice dell'equazione, quante unità contiene il di lei maſſimo eſponente.

460. Dim. Eſſendo le equazioni uguali a zero, fa di meſtieri, che riſultino per lo meno da due fattori, uno de'quali ſia uguale a zero, poichè (pel num. 108. del Tomo I.) ſolo con moltiplicarſi in zero una quantità ne ritorna zero: Ma (pel num. 318.) la radice dell'equazione, che ſoſtituita in luogo dell'incognita la fa verificare, è uguale alla ſteſſa incognita; dunque il di lei aggregato coll'incognita eſſendo uguale a zero è un fattore dell'equazione; conſeguentemente quante ſono le quantità, che fanno verificar l'equazione, altrettanti dall'incognita, e da queſte quantità riſultano aggregati, che ſono fattori dell'equazione. Ora il numero delle quantità, che fanno verificar l'equazione non può eſſere nè maggiore, nè minore del grado dell'equazione; imperocchè il primo termine di queſti fattori eſſendo l'incognita $x$, e il maſſimo termine dell'equazione dovendo riſultare (come coſta dalla legge della moltiplicazione) dal prodotto di queſti primi termini, altrettanti ſaranno queſti primi termini, quante unità contiene il maſſimo eſponente dell'equazione, conſeguentemente altrettanti ſaranno queſti aggregati, o ſia fattori di primo grado, da'quali riſulterà l'equazione: E però qualunque equazione ec. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

461. Corol. 1. In qualunque equazione pertanto il numero delle radici corriſponde al maſſimo eſponente dell'incognita. Qualſivoglia radice poi unita all'incognita $x$ col ſegno $+$, o $-$, ſecondo che ella è poſitiva, o negativa, ſarà un diviſore eſatto dell'equazione; e il quoziente ſarà un'equazione, che riſulterà dal prodotto degli altri fattori.

462. Corol. 2. Se pertanto le radici di una propoſta equazione ſaranno $m, n, p, q, r$ ec., tale equazione ſarà uguale al prodotto $\overline{x-m}\times\overline{x-n}\times\overline{x-p}\times\overline{x-q}\times\overline{x-r}$ ec. Queſto prodotto poi (ſuppoſto che il numero de'fattori, o ſia delle radici, ſia $=t$) ſarà tale (come coſta dalla legge della moltiplicazione), che per primo termine avrà l'incognita $x$ elevata alla poteſtà $t$, nel ſecondo termine vi ſarà l'incognita $x$ elevata alla poteſtà $t-1$, nel terzo termine vi ſarà l'incognita $x$ elevata alla poteſtà $t-2$, e così di ſeguito; che però ſe i coefficienti del ſecondo, terzo, quarto termine ec. ſi diranno $a$, $b$, $c$, $d$ ec., e il termine cognito ſi dica A, l'equazione ſarà

$x^t$

$x^t+ax^{t-1}+bx^{t-2}+cx^{t-3}+dx^{t-4}\ldots+A=\overline{x-m}\times\overline{x-n}\times\overline{x-p}\times\overline{x-q}\times\overline{x-r}$ ec., che è la formola generale per qualſivoglia equazione.

463. Corol. 3. Eſſendo $x^t+ax^{t-1}+bx^{t-2}+cx^{t-3}\ldots\ldots$ $+A=\overline{x-m}\times\overline{x-n}\times\overline{x-p}$ ec., ſe il prodotto di queſti fattori ſarà poſitivo, anche l'aggregato dei termini dell'equazione ſarà poſitivo, e ſe quello ſarà negativo, anche queſto ſarà parimente negativo. Quello poi ſarà poſitivo, ſe o tutti queſti fattori ſaranno poſitivi, eſſendovene dei negativi, eſſi ſaranno in numero pari; e all'oppoſto ſarà negativo, qualora vi ſia un numero impari di fattori negativi.

464. Corol. 4. Quindi ſe nell'equazione ſi ſoſtituirà in luogo di $x$ una quantità poſitiva, che ſia maggiore di qualſivoglia radice, tutti i fattori ſaranno poſitivi, comunque i valori dell'incognita ſiano poſitivi, o negativi, e però l'aggregato dei termini dell'equazione ſarà poſitivo; o pure, ſe eſſendo impari il grado dell'equazione, ſi ſoſtituirà una quantità negativa maggiore di ciaſcuna radice, l'aggregato dei termini dell'equazione ſarà negativo; e ſe il grado dell'equazione ſara pari, l'aggregato de' termini ſarà poſitivo.

465. Corol. 5. Conſiderando pertanto l'equazione ſotto a queſta forma $\overline{x\pm m}\times\overline{x\pm n}\times\overline{x\pm p}\times\overline{x\pm q}$ ec., in cui le radici $m$, $n$, $p$, $q$ ec. ſono diſpoſte ſecondo l'ordine della grandezza, ben ſi vede, che ſiccome pel num. 464. col ſoſtituirſi in luogo di $x$ una quantità poſitiva maggiore di $m$, l'aggregato dei termini dell'equazione riſulta poſitivo, e pel num 318. col ſoſtituirſi $m$, l'aggregato de' termini diventa zero, così col ſoſtituirſi una quantità poſitiva minore di $m$, ma maggiore di $n$, l'aggregato de' termini diverrà negativo: Parimente poichè col ſoſtituirſi in luogo di $x$ una quantità poſitiva minore di $m$, ma maggiore di $n$, l'aggregato dei termini dell'equazione riſulta negativo, e col ſoſtituirſi $n$ diventa zero, così ſe ſi ſoſtituirà una quantità poſitiva minore di $n$, ma maggiore di $p$, l'aggregato de' termini dell'equazione riſulterà poſitivo: E colla ſteſſa legge varieranno alternativamente gli aggregati de' termini dell'equazione da poſitivi a negativi, e da negativi a poſitivi, col ſoſtituirſi per ordine ſucceſſivamente quantità minori della precedente, ma maggiori della ſuſſeguente proſſima radice. Di fatto ſia l'equazione $x^t+ax^{t-1}+bx^{t-2}$ $cx^{t-3}\ldots+T=\overline{x-m}\times\overline{x-n}\times\overline{x+p}\times\overline{x+q}$, della quale ho preſo le due prime radici $m$, $n$ poſitive, e le due ultime $p$, $q$ negative, affinchè ſi veda, che la dottrina eſpoſta ha ſempre luogo, comunque le radici ſiano poſitive, o negative. Suppongo che le radici $m$, $n$, $-p$, $-q$ ſiano diſpoſte ſecondo l'ordine della grandezza, così che $m$ ſia maggiore di $n$, $n>-p$, $-p>-q$. Ritenendo pertanto ſolamente il prodotto de' fattori $\overline{x-m}\times\overline{x-n}\times\overline{x+p}\times\overline{x+q}$, ben ſi vede, che ſe in luogo di $x$ ſi ſoſtituirà una quantità A maggiore di ciaſcuna radice, ſi avrà $\overline{A-m}\times\overline{A-n}\times\overline{A+p}\times\overline{A+q}$ prodotto poſitivo, poichè egli riſulta da fattori tutti poſitivi. Se in luogo di $x$ ſi ſoſtituirà una quantità B minore di $m$, ma maggiore di $n$, e conſeguentemente di ciaſcuna delle rimanenti radici, ſarà $B-m$ quantità negativa, e tutti gli altri fattori $B-n$, $B+p$, $B+q$ ſaranno poſitive, onde il prodotto $\overline{B-m}\times\overline{B-n}\times\overline{B+p}\times\overline{B+q}$ ſarà negativo, poichè tra' ſuoi fattori ve n'è uno negativo. Iſteſſamente ſoſtituendoſi in luogo di $x$ una quantità C minore di $n$, e perciò anche di $m$, ma maggiore di $p$, e quindi ancora di $q$, ſaranno $C-m$, $C-n$ due

due quantità negative, e $C+p$, $C+q$ ſaranno poſitive, per lo che il prodotto $\overline{C-m}\times\overline{C-n}\times\overline{C+p}\times\overline{C+q}$ ſarà poſitivo, poichè tra' ſuoi fattori ve ne ſono bensì de' negativi, ma in numero pari. Finalmente ſe in luogo di $x$ ſi ſoſtituira una quantità D minore di $p$, e però eziandio di $n$, $m$, ma maggiore di $q$, non ſolo $D-m$, $D-n$ ſaranno negativi, ma ancora $D+p$ (pel num. 52.) perchè eſſendo D nell' eſſere di negativo una quantità minore di $p$, ſarà D un numero, che avrà maggiore eſpreſſione di $p$, e però $-D+p$ ſarà quantità negativa, e per la ſteſſa ragione ſarà $D+q$ quantità poſitiva: Quindi il prodotto $\overline{D-m}\times\overline{D-n}\times\overline{D+p}\times\overline{D+q}$, che riſulta da fattori negativi in numero diſpari ſarà negativo. Nello ſteſſo modo poi ſi continui il raziocinio, ſe il numero delle radici ſarà maggiore. Soſtituendoſi adunque in una equazione in luogo dell' incognita quantità ſucceſſivamente minori per ordine di ciaſcuna delle ſue radici, l' aggregato de' termini dell' equazione paſſerà alternativamente dal poſitivo al negativo, e dal negativo al poſitivo.

466. Quando le radici dell'equazione ſono quantità razionali intere non ſi dà negli aggregati de' termini, che naſcono dalle ſuppoſizioni di diverſi valori di $x$, il paſſaggio dal $+$ al $-$ ſenza il paſſaggio pel zero, ma ſe le radici ſaranno o frazioni, o quantità radicali, ſi darà il paſſaggio dal $+$ al $-$ ſenza il paſſaggio pel zero, avvegnachè le quantità, che ſi ſoſtituiſcono ſiano quantità razionali intere, che però devono per neceſſità eſſere o maggiori, o minori della radice o fratta, o irrazionale. Aſſolutamente però anche in queſti caſi il paſſaggio dal poſitivo al negativo ſi fa pel zero, poichè ſe in luogo dell' incognita ſi ſoſtituirà quella radice o fratta, o irrazionale, l'aggregato de' termini anderà a zero.

467. Non ſempre per altro il paſſaggio dal poſitivo al negativo ſi fa pel zero, ma ſi può fare anche per l' infinito. Sia per Eſempio $x=\frac{b}{z-a}$. Sarà $x$ poſitiva, ſe ſi ſupporrà $z>a$, ſarà $x$ negativa, ſe ſi ſupporrà $z<a$, e finalmente ſarà $x$ infinita ſe ſi ſupporrà $z=a$, nel qual caſo ſarà $x=\frac{b}{0}=\infty$, e però in queſto caſo ſi paſſa dal poſitivo al negativo per l'infinito.

468. Non ogni volta però, che una quantità paſſa per l'infinito, o per il zero, divenra neceſſariamente di poſitiva negativa, potendo da poſitiva paſſare per l' infinito, o pel zero, e poi dopo riſultare anche poſitiva, e ciò ſuccederà nel caſo di un numero pari di radici uguali. Tale ſarebbe $y=x^2-6x+9$, in cui ſoſtituendoſi 4 in luogo di $x$, ſi ha $y=1$, ſoſtituendoſi 3, ſi ha $y=0$, e ſoſtituendoſi 2, ſi ha $y=1$.

469. Il negativo pertanto comincia ove finiſce il poſitivo, lo che per altro deveſi intendere in caſo, che il poſitivo non diventi immaginario: Per Eſempio eſſendo $y=\sqrt{x^2-a^2}$, ſarà $y$ poſitiva, quando ſi abbia $x>a$; ſarà $y=0$ qualorà ſia $x=a$, ma eſſendo $x<a$, la $y$ ſarà immaginaria.

470. Corol. 6. Quando adunque dal ſoſtituirſi nell'equazione in luogo dell' incognita due differenti quantità ſi avranno due aggregati dei termini dell' equazione in diverſo ſtato, cioè uno poſitivo, e l' altro negativo, o *vice verſa*, ciò ſarà ſegno, che tra quelle due quantità ne cade un' altra, che perciò deve eſſere reale, la quale è radice dell' equazione. Quindi qualſivoglia equazione di grado pari, il di cui ultimo termine ſia negativo, avrà per lo meno due radici reali; poichè (pel num. 464)

con

con ſoſtituirſi in luogo di $x$ la ſomma di tutti i coefficienti dell' equazione ( tra i coefficienti vi è compreſo anche l'ultimo termine ), l' aggregato de' termini riſulta poſitivo, comunque la quantità ſoſtituita ſia poſitiva, o negativa, e con ſoſtituirſi zero in luogo di $x$ l' aggregato de' termini ſi riduce al ſolo ultimo termine negativo, dunque l' equazione deve avere una radice reale fra il zero, e la ſoſtituita quantità poſitiva, e un' altra parimente reale tra il zero, e la ſoſtituita quantità negativa, cioè deve avere due radici reali. Tale equazione poi ſi ſuppone libera dai radicali.

471. Corol. 7. Per lo che ſe vi ſarà un' equazione di grado pari, che abbia tutte le radici immaginarie, per qualunque quantità, che in eſſa ſi ſoſtituiſca in vece dell'incognita, l' aggregato de' termini non potrà mai paſſare dal poſitivo al negativo, o dal negativo al poſitivo, altrimenti l' equazione avrebbe delle radici reali contro l'ipoteſi.

472. Corol. 8. E perchè (giuſta il num. 464.) in qualſivoglia equazione di grado impari la ſoſtituzione di una quantità preſa prima poſitiva, e poi negativa, la quale ſia maggiore di qualunque radice, fa paſſare l' aggregato de' termini da poſitivo a negativo, perciò le equazioni di grado impari hanno per lo meno una radice reale; e però il numero delle loro radici reali è ſempre impari.

473. Corol. 9. Se dal ſoſtituirſi ſucceſſivamente diverſe quantità nell' equazione in luogo dell'incognita, gli aggregati de' termini paſſeranno alternativamente dal poſitivo al negativo, e dal negativo al poſitivo, queſte tali quantità ſaranno limiti delle radici dell' equazione, e *vice verſa* queſte di quelle.

474. Corol. 10. Finalmente ſe col ſoſtituirſi nell' equazione in luogo dell' incognita tante diverſe quantità, quante ne indica il grado dell' equazione, ne riſulteranno altrettanti aggregati coi ſegni alternanti, l'equazione avrà tutte le ſue radici reali: E generalmente quante ſaranno le alternazioni de' ſegni in queſti aggregati, altrettante ſaranno le radici reali, e le rimanenti per uguagliare il grado dell' equazione ſaranno immaginarie a riſerva del caſo, in cui vi ſiano radici eguali.

475. Quantunque qualſivoglia radice preſa ſeparatamente ſia uguale all'incognita, e però preſa colla medeſima formi un fattore di primo grado uguale a zero, non però ſi può dire, che tutti i fattori da' quali riſulta l'equazione, ſiano nel tempo iſteſſo uguali a zero, poichè mentre ſi ſuppone l' incognita uguale a una radice qualunque, dal che ne riſulta un fattore uguale a zero, non ſi può nel tempo iſteſſo ſupporre uguale alle altre radici, mentre non può la medeſima incognita rappreſentare nel tempo iſteſſo quantità diverſe, lo che per altro può fare, e fa ſeparatamente: Oltre di che ſiccome in qualſivoglia equazione il primo termine è ſempre una poteſtà dell' incognita, come ſi è veduto nell' equazione generale al num 462., il di cui primo termine è $x^t$, ſe l' incognita eſprimeſſe nel tempo ſteſſo quantità diverſe, il primo termine dell' equazione ſarebbe un prodotto, e non già una poteſtà, quale deve ſempre riſultare dalla replicata moltiplicazione di una medeſima quantità in ſe ſteſſa (pel num. 723. del Tomo I.) Per lo che avendoſi $x^t + ax^{t-1} + bx^{t-2} + cx^{t-3} \ldots + A = \overline{x-m} \times \overline{x-n} \times \overline{x-p} \times \overline{x-q}$ ec., ſe ſi ſupporrà $x=m$, fatta la ſoſtituzione ſi avrà $m^t + am^{t-1} + bm^{t-2} + cm^{t-3} \ldots + A =$

$\overline{m-m} \times \overline{m-n} \times \overline{m-p} \times \overline{m-q}$ ec., cioè il primo fattore ſarà zero, ma gli altri ſaranno $m-n$, $m-p$, $m-q$ ec., lo che per altro per ſe ſteſſo è evidente, poichè il ſoſtituire nell'equazione in vece dell' incognita una ſua radice, è lo ſteſſo, che ſoſtituirla in vece della ſteſſa incognita in tutti i ſuoi fattori.

476. Giacchè abbiamo veduto, che qualſivoglia equazione naſce dal prodotto di altrettanti fattori di primo grado, il di cui ſecondo termine è una radice dell' equazione, quanti ne moſtra il grado dell'equazione, preſe intanto alcune quantità, come $m$, $n$, $p$, $q$, che riſguarderemo come radici, paſſiamo all' attuale loro formazione, a fine di potere oſſervare alcune proprietà, che a tutte le equazioni generalmente convengono. Poichè le radici dell'equazione, che ſi cerca, ſono $m, n, p, q$ i fattori, da' quali ella riſulterà, ſaranno $x-m$, $x-n$, $x-p$, $x-q$, de' quali uno, qualunque egli ſia, deve eſſere uguale a zero, affinchè l' equazione poſſa parimente eſſere uguale a zero. Sia pertanto $x-m=0$; che però prendo i due fattori $x-m=0$, ed $x-n$, quali moltiplico inſieme, e mi viene un'equazione di ſecondo grado, quale moltiplico nel terzo fattore $x-p$, e mi viene una equazione di terzo grado, dalla di cui moltiplicazione nell' ultimo fattore $x-q$ ho un'equazione di quarto grado, del che ecco il calcolo

Primo fattore $x-m=0$
Secondo fattore $x-n$

Equaz. di ſecondo grado
$$\left\{\begin{array}{l} x^2-mx+mn=0 \\ \quad -nx \end{array}\right.$$

Terzo fattore $x-p$

Equaz. di terzo grado
$$\left\{\begin{array}{l} x^3-mx^2+mnx-mnp=0 \\ \quad -nx^2+mpx \\ \quad -px^2+npx \end{array}\right.$$

Quarto fattore $x-q$

Equaz. di quarto grado
$$\left\{\begin{array}{l} x^4-mx^3+mnx^2-mnpx+mnpq=0 \\ \quad -nx^3+mpx^2-mnqx \\ \quad -px^3+npx^2-mpqx \\ \quad -qx^3+mqx^2-npqx \\ \quad\quad +nqx^2 \\ \quad\quad +pqx^2 \end{array}\right.$$

477. Dal ſolo oſſervar poi queſte formole generali ſi ſcorge apertamente: In primo luogo, che il coefficiente del ſecondo termine in qualſivoglia equazione è ſempre la ſomma delle radici preſe con ſegno contrario, come nel preſente caſo eſſendo le radici $m$, $n$, $p$, $q$, il coefficiente del ſecondo termine dell' equazione è $-m-n-p-q$.

478. Corol. 1. E perchè coll' aggiungerſi ad una quantità data un' altra quantità uguale affetta da ſegno contrario, o pure col ſottrarre da una quantità un' altra uguale, l'aggregato riſulta zero (pel num. 34), ſe ſi accreſceranno o diminuiranno ſecondo il biſogno le radici dell' equazione di una quantità, che ne renda l'aggregato uguale a zero, ſi farà ſparire dall' equazione il ſecondo termine. Quale poi debba eſſere queſta quantità, di cui devonſi accreſcere, o diminuire le radici dell'equazione, a fine di toglierne il ſecondo termine, lo determineremo in appreſſo.

479. In ſecondo luogo il coefficiente del terzo termine è la ſomma degli ambi delle radici preſe col proprio ſegno: In terzo luogo il coefficiente del quarto termine è la ſomma dei terni delle radici preſe con ſegno contrario: In quarto luo-

go

go il coefficiente del quinto termine è la ſomma delle quaderne delle radici preſe col proprio ſegno, e così di ſeguito: L'ultimo termine poi, quello cioè che contiene ſole quantità cognite, è il prodotto delle radici preſe col proprio ſegno: Che però ſe ſarà negativo l'ultimo termine di una equazione di grado impari avente tutte le radici reali (lo ſteſſo ſi dimoſtrerà più abbaſſo anche in caſo, che ne abbia delle immaginarie), ella dovrà aver per lo meno una radice reale poſitiva.

480. Corol. 1. Che però ſe una quantità ſarà radice dell'equazione, ella ſarà pure un diviſore eſatto dell'ultimo termine, ma non già *vice verſa*.

481. Corol. 2. Dalle oſſervazioni fatte ſegue ancora, che ſiccome (giuſta il num. 478.) qualora la ſomma delle radici poſitive è uguale alla ſomma delle negative, mancherà all'equazione il ſecondo termine, così mancherà il terzo termine, ſe la ſomma degli ambi poſitivi delle radici ſarà uguale alla ſomma degli ambi negativi: Parimente mancherà il quarto termine ſe la ſomma dei terni poſitivi delle radici ſarà uguale alla ſomma dei terni negativi ec., e generalmente mancherà all'equazione qualche termine, ogni qual volta il ſuo coefficiente riſulti uguale a zero. Il primo, e l'ultimo termine poi dell'equazione mai non poſſono mancare, a riſerva del caſo, in cui l'equazione aveſſe una, o più radici uguali a zero, poichè l'ultimo termine eſſendo il prodotto delle radici, e il prodotto di una quantità in zero eſſendo zero, l'ultimo termine dovrebbe neceſſariamente mancare; anzi quante ſaranno le radici uguali a zero altrettanti ſuſſeguenti termini all'ultimo mancheranno, come fra poco dirò.

482. I termini mancanti ſi ſogliono indicare con altrettante ſtellette così $x^5 * - bx^3 + cx^2 * - b = 0$. Dalla geneſi dell'equazioni raccoglieſi ancora, che ogni equazione ha tanti termini (i quali per ordine diſtinguonſi dall'eſponente dell'incognita), quanti ne indica il di lei maſſimo eſponente accreſciuto di una unità.

483. Le radici immaginarie diconſi pure quando coſtano di ſole quantità immaginarie come $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-ab-c^2}$: Diconſi miſte quando riſultano dall'aggregato di quantità reali, e immaginarie, come $a + \sqrt{-b^2}$.

484. Teor. 2. Nelle equazioni immuni dagli immaginarj le radici immaginarie ſono ſempre in numero pari, cioè o due, o quattro, o ſei ec.

485. Dim. Allora ſoltanto (pel num. 171.) naſce un prodotto reale dalla moltiplicazione di quantità immaginarie, quando elle ſono in numero pari: Ma per ipoteſi l'equazione è immune dagli immaginarj, dunque le di lei radici immaginarie devono eſſere in numero pari.

486. Corol. Siccome poi il coefficiente del ſecondo termine riſulta dalla ſomma delle radici, affinchè ivi non appariſcano, una deve eſſere poſitiva, e l'altra negativa, ed uguali, onde mediante la contrarietà de' ſegni ſi diſtruggano: Che ſe le radici ſaranno miſte, la quantità reale nell'una, e nell'altra radice ſarà affetta dallo ſteſſo ſegno, e la quantità immaginaria da ſegno poſitivo in una, e negativo nell'altra.

487. Ho detto, che quante radici uguali a zero avrà l'equazione, altrettanti ſaranno i termini mancanti, cominciando dall'ultimo; che però nell'equazione $x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 8x^4 = 0$, mancando i quattro ultimi termini, ella avrà quattro radici uguali a zero: Di fatto, come ho detto, riſultando l'ultimo termine dal prodotto delle radici, non può egli andare a zero, ſe una radice non è uguale a zero: Così il coefficiente del penultimo termine, riſultando dalla ſomma di tutte le combinazioni delle radici ſecondo l'eſponente $m - 1$ (ſuppoſto il numero delle radici

ugua-

uguale ad $m$), non può egli andare a zero, se due radici non sono uguali a zero; istessamente devono essere tre le radici uguali a zero, affinchè diventi zero il coefficiente dell'antepenultimo termine, poichè egli risulta dalla somma di tutte le combinazioni delle radici secondo l'esponente $m-2$ ec.

488. Rispetto alla massima potestà, alla quale ascende l'incognita, distinguonsi in diversi gradi le equazioni, quali vengono denominate dal massimo esponente dell'incognita. Ciò però s'intenda quando l'equazione è immune dai radicali, poichè se l'equazione avrà quantità radicali per coefficienti, il di lei grado sarà molto maggiore di quello mostra il massimo esponente dell'incognita: Così l'equazione $x=\sqrt{ab}$ è del secondo grado, poichè liberandola dal radicale, diventa $x^2=ab$.

489. I termini dell'equazione diconsi omogenei, quando ciascun di loro ottiene la stessa dimensione, nel qual caso si dice, che nell'equazione si è osservata la legge degli omogenei, come nell'equazione $x^6+a^2x^4+ab^2x^3-c^3dx^2+d^4x+c^2d^4=0$. Quando i termini di una qualche formola non sono omogenei, due sono i metodi più usitati per ridurli alla omogeneità: Il primo per mezzo dell'unità, moltiplicando cioè il termine, che ha minori dimensioni, o dividendo quello, che ne ha maggiori, per l'unità, e sue convenienti potestà, quale unità sia fatta uguale a qualche lettera, che non entra nella proposta formola: Così per rendere omogenei i termini dell'equazione $x^4+ax^3-cx+d=0$, si faccia $1=m$, indi o si prevalga della moltiplicazione così $x^4+amx^3-cm^3x+m^4d=0$, o della divisione così $\frac{x^4}{m^4}+\frac{ax^3}{m^4}-\frac{cx}{m}+d=0$. Il secondo per mezzo delle sostituzioni: Come avendosi $ax+y^4-by^2=0$, supponendosi $y^2=z$, e $y^4=z^2$; mediante la sostituzione si avrà $ax+z^2-bz=0$: Parimente supponendosi $y=\frac{1}{z}$ nell'equazione $bx-a^3y+c^4y^2=0$ si avrà $bx-\frac{a^3}{z}+\frac{c^4}{z^2}=0$.

490. Le equazioni distinguonsi in razionali, e irrazionali: Le razionali sono quelle, i di cui coefficienti, e l'ultimo termine sono quantità razionali: Le irrazionali sono quelle, che liberare non si possono dalle quantità radicali.

491. Teor. 3. Una equazione qualunque immune da frazioni, e il di cui massimo termine sia libero da coefficiente, non può avere per radice una frazione razionale.

492. Dim. Sia l'equazione $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, che supponga si aver per radice la frazione $\frac{b}{a}$ ridotta a minimi termini. Si sostituisca questa radice in luogo di $x$, e ne verrà $\frac{b^4}{a^4}+\frac{pb^3}{a^3}+\frac{qb^2}{a^2}+\frac{rb}{a}+s=0$, vale a dire $b^4+pab^3+qa^2b^2+ra^3b+a^4s=0$, in cui (pel num. 461.) la quantità $b$ deve essere un divisore esatto dell'ultimo termine $a^4s$: Ora perchè $b$, $a$ non hanno alcun divisore comune, a motivo che la frazione $\frac{b}{a}$ si è supposta ridotta a minimi termini, neppur

lo

lo avranno $b$, $a^4$; quindi dovendo essere $b$ un divisore esatto di $a^4s$, non potendo $b$ essere divisore di $a^4$, lo sarà di $s$: Sia adunque $\frac{s}{b} = l$, sarà $s = bl$, e però l'equazione sarà $b^4 + pab^3 + qa^2b^2 + ra^3b + a^4bl = 0$, cioè $b^3 + pab^2 + qa^2b + ra^3 + a^4l = 0$. In questa equazione parimente deve essere la quantità $b$ un divisore esatto dell'ultimo termine $ra^3 + a^4l$, ma non potendolo essere di $a^3$, lo sarà di $r + al$, si faccia adunque $\frac{r + al}{b} = m$, e sarà $r + al = bm$, il qual valore sostituito nell'ultima equazione darà $b^3 + pab^2 + qa^2b + a^3bm = 0$, cioè $b^2 + pab + qa^2 + a^3m = 0$. Per la stessa ragione sarà $b$ un divisore esatto dell'ultimo termine $qa^2 + a^3m$, ma non potendo esserlo di $a^2$, lo sarà di $q + am$, si faccia adunque $\frac{q + am}{b} = n$, e si avrà $q + am = bn$, il qual valore sostituito nell'ultimo termine dell'ultima equazione, se ne avrà $b^2 + pab + a^2bn = 0$, cioè $b + pa + a^2n = 0$, quindi $\frac{b}{a} = -p - an$: Ma $p$, $a$, $n$ sono numeri interi (per ipotesi), dunque $\frac{b}{a}$ non è una frazione, come si era supposto. E però un'equazione immune da frazioni, e il di cui massimo termine sia libero da coefficiente, non può avere per radice una frazion razionale. Lo che si doveva dimostrare. Lo stesso discorso si applichi a qualunque altra equazione.

493. Quantunque però una frazione immune da frazioni, e da radicali, non possa avere per radice una frazione razionale, può per altro avere per radici delle frazioni irrazionali, come costa dall'equazione $x^2 + x - 5 = 0$, le di cui radici sono $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$.

494. Prima di terminare questo articolo vediamo come si possa da una equazione qualunque togliere il secondo termine. Abbiamo veduto al num. 481. che acciò da una equazione sparisca il secondo termine, deve essere uguale a zero il suo coefficiente, lo che succede quando la somma delle radici positive è uguale alla somma delle radici negative; onde (pel num. 478.) a fine di togliere da una equazione il secondo termine devonsi accrescere, o diminuire le radici dell'equazione di una tale quantità, che renda la somma delle radici positive uguale alla somma delle negative: Ora per accrescere, o diminuire di una qualche quantità, per Esempio $m$, le radici di una equazione, non altro devesi fare, che (supposta $x$ l'incognita dell'equazione) $x \pm m = y$, e però $x = y \mp m$, cioè devesi porre l'incognita dell'equazione accresciuta, o diminuita della quantità data uguale ad una nuova incognita, e però devesi supporre l'incognita dell'equazione uguale ad una nuova incognita diminuita, o accresciuta della quantità data, indi in luogo dell'incognita, e delle sue potestà devesi sostituire nella proposta equazione questo nuovo aggregato. Ma veniamo al caso.

495. Prob. Da una data equazione qualunque debbasi levare il secondo termine.

496. Risol. L'equazione proposta sia $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots A = 0$. Si faccia $x + n = y$, e però $x = y - n$; indi in luogo di $x^m$ si sostituisca $\overline{y - n}^m$,

che

che (pel num. 256.) è $y^m - mny^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{2} n^2 y^{m-2}$ ec. in luogo di $px^{m-1}$ si sostituisca $p \times \overline{y-n}^{m-1}$, che (per lo stesso num. 256.) è $py^{m-1}$ $- \overline{m-1} \times pny^{m-2} + \frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2} \times pn^2 y^{m-3}$ ec.; in luogo di $qx^{m-2}$ si sostituisca $q \times \overline{y-n}^{m-2}$, che (per l'istesso num.) è $qy^{m-2} - \overline{m-2} \times qny^{m-1} + \frac{\overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2}$ $qn^2 y^{m-4}$ ec., e lo stesso si faccia rispetto agli altri termini, con che si avrà

$$x^m = y^m - mny^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{2} n^2 y^{m-2} - \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{6} \times n^3 y^{m-3} \text{ ec.}$$

$$+ px^{m-1} = + py^{m-1} - \overline{m-1} \times pny^{m-2} + \frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2} \times pn^2 y^{m-3} \text{ ec.}$$

$$+ qx^{m-2} = + qy^{m-2} - \overline{m-2} \times qny^{m-1} \text{ ec.}$$

$$\text{Somma } y^m - \overline{mn+p} \times y^{m-1} + m \times \frac{\overline{m-1} \times n^2 - \overline{m-1} \times pn + q}{2} \times y^{m-2} \text{ ec.}$$

Ma perchè in questa nuova equazione deve mancare il secondo termine, cioè il di lui coefficiente deve essere uguale a zero, però si faccia $-mn+p=0$, dalla quale si ha $p=mn$, conseguentemente $\frac{p}{m}=n$, quando il coefficiente del secondo termine dell'equazione data è positivo; e $\frac{-p}{m}=n$ quando il coefficiente del secondo termine della proposta equazione è negativo. Dunque essendo $p$ il coefficiente del secondo termine nell'equazione data, ed $m$ l'esponente della massima potestà, la quantità $n$, di cui devonsi accrescere, o diminuire le radici dell'equazione, non altro sarà, che il coefficiente del di lei secondo termine diviso per l'esponente della massima potestà dell'incognita, della quale quantità devonsi accrescere le radici dell'equazione, se il coefficiente del secondo termine è positivo, e pel contrario devonsi diminuire se egli è negativo; cioè a dire nel primo caso l'incognita dell'equazione devesi fare uguale ad una nuova incognita diminuita di tale quantità, e nel secondo accresciuta.

497. Per venire al caso particolare debbasi levare il secondo termine dall'equazione $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$. Poichè il coefficiente del secondo termine è negativo, si farà $x = y + \frac{2}{3}$, e in vece di $x$, e delle sue potenze sostituendo questo valore, si avrà

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}$$
$$-2x^2 = \quad -2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9}$$
$$-4x = \quad -4y - \frac{8}{3}$$
$$+3 = \quad +3$$

Somma $y^3 * \quad -\frac{16}{3}y - \frac{7}{27} = 0$

che è l'equazione cercata, in cui manca il secondo termine. Questa equazione poi ha per radici le radici della precedente equazione diminuite di 2, per lo che supposto, che le radici della proposta equazione fossero $a$, $b$, $c$, le radici di questa saranno $a-2$, $b-2$, $c-2$.

498. Collo stesso metodo si toglie dalle equazioni il terzo termine, e siccome acciò manchi il terzo termine la somma degli ambi positivi deve essere uguale (pel num. 481.) alla somma degli ambi negativi, però a fine di togliere da una equazione il terzo termine, bisognerà accrescere, o diminuire le radici dell' equazione di una tale quantità, che renda la somma degli ambi positivi uguale alla somma degli ambi negativi. Quale poi debba essere questa quantità, la determineremo nel modo seguente. Nell' equazione generale trovata al num. 496. si faccia uguale a zero il coefficiente del terzo termine $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} \times n^2 - \overline{m-1} \times pn + q \times y^{m-2}$, così $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} \times n^2 - \overline{m-1} \times pn + q = 0$, colla quale equazione si ritrovi il valore dell'assunta indeterminata $n$, di cui devonsi accrescere, o diminuire le radici dell'equazione. Per determinare adunque il valore di $n$, comincio a preparare l'equazione in questo modo $m \times \overline{m-1} \times n^2 - 2\overline{m-2} \times pn = -2q$, o sia $n^2 - \frac{2pn}{m} = -\frac{2q}{m \times \overline{m-1}}$, la quale equazione di secondo grado risolvendosi giusta il num. 395, darà $n = \frac{p}{m} \pm \sqrt{\frac{-2q}{m \times \overline{m-1}} + \frac{p^2}{m^2}}$ o sia $n = \frac{p}{m} \pm \sqrt{\frac{-2mq + p^2 \times \overline{m-1}}{m^2 \times \overline{m-1}}}$, che è la formola generale, la quale dà la ricercata quantità, di cui devonsi accrescere, o diminuire le radici di una equazione per toglierne il terzo termine, mentre per servirsene non altro devesi fare, che sostituire in luogo di $m$ l'esponente del massimo termine dell'equazione data, in luogo di $p$, il coefficiente del secondo termine, e il coefficiente del terzo termine in luogo di $q$. Collo stesso metodo si determinerà la quantità, di cui devonsi accrescere, o diminuire le radici dell' equazione per togliere qual altro termine più piaccia. Ma per togliere il quarto termine devesi risolve-

re una equazione del terzo grado; una del quarto per togliere il quinto termine ec.

## ARTICOLO II.

*Modo di distinguere le diverse spezie di radici nelle Equazioni.*

499. Quattro, come abbiamo veduto, sono le spezie di radici, cioè positive, negative, reali, e immaginarie. Per parlare in primo luogo delle radici positive, e negative, io dico, che sarà facile il distinguerle dal solo osservare i segni dell'equazione, supposto che ella abbia tutte le radici reali, e la regola è la seguente.

500. Una equazione, di cui tutte le radici siano reali, avrà tante radici positive, quanti in essa saranno i cambiamenti di segno di + in —, e di — in +; e tante radici negative, quante in essa saranno le continuazioni di segno, o +, o —: Per lo che l'equazione $x^7+ax^6-bx^5+cx^4-dx^3-ex^2-fx+m=0$ avrà quattro radici positive, e tre negative, perchè vi sono quattro variazioni di segni, cioè $+ax^6-bx^5$, $-bx^5+cx^4$, $+cx^4-dx^3$, $-fx+m$, e tre continuazioni, cioè $+x^7+ax^6$, $-dx^3-ex^2$, $-ex^2-fx$. La verità di questa regola abbastanza si raccoglie dalla genesi delle equazioni data al num. 476., e dai num 477. e 479., poichè primieramente quando tutte le radici sono positive, i segni dell'equazione sono tutti alternanti: Di poi il coefficiente del secondo termine essendo la somma delle radici prese con segno contrario, siccome quando le radici sono tutte positive, egli è negativo, così non può essere egli positivo (dal che ne nasce una continuazione di segno col primo termine) qualora non vi sia qualche radice negativa: Parimente il coefficiente del terzo termine essendo la somma degli ambi delle radici prese col proprio segno, egli perciò deve avere un segno differente dal segno del secondo termine; o in altre essendo affetto dal segno positivo, egli deve risultare, o da radici tutte positive, o se ve ne sono delle negative, esse devono essere in numero pari: Quindi se il primo, il secondo, e il terzo termine saranno affetti dal segno positivo, l'equazione avrà necessariamente due radici negative, delle quali una viene indicata dal segno positivo del secondo termine, e l'altra dal segno pure positivo del terzo termine per la ragione addotta, che essendo positivo il coefficiente del terzo termine, se vi sono radici negative, devono essere necessariamente in numero pari, perchè il solo prodotto di — in — dà +. Per la stessa ragione essendo il coefficiente del quarto termine la somma de' terni delle radici prese col segno contrario, non può essere egli positivo, quando non vi sia un numero impari di radici negative: Che però se il secondo, e terzo termine saranno positivi, lo che, come si è detto, importa due radici negative, e il terzo sia eziandio positivo, con che vi saranno tre continuazioni di segno, l'equazione avrà necessariamente tre radici negative. Nella stessa maniera continuando il discorso si dimostrerà, che se nell'equazione tutti i segni saranno positivi, ella avrà tutte le radici negative; Lo che si poteva ancora dimostrare così: Tutti i termini dell'equazione essendo affetti dal segno +, per qualunque quantità positiva si sostituisca in luogo di $x$, non potrà mai l'aggregato dei termini dell'equazione andare a zero, ma sempre sarà positivo, dunque (pel num. 471.) niuna quantità positiva potrà essere radice dell'equazione. Qualora poi essendo negativo il secondo termine dell'equazione, lo sia ancora il terzo termine, onde vi siano due continuazioni di segno, l'equazione avrà necessariamen-

mente una radice negativa, perchè il coefficiente del terzo termine essendo la somma degli ambi delle radici col proprio segno, non può egli essere negativo, se non v'è per lo meno una radice negativa: Parimente il coefficiente del quarto termine essendo la somma dei terni delle radici prese col segno contrario, non può egli essere negativo, se non in caso, che o tutte le radici siano positive, o essendovene delle negative, queste siano in numero pari: Ora essendo negativo il secondo, e il terzo termine, si è veduto, che l'equazione avrà una radice negativa; dunque essendo negativo ancora il quarto termine, con che vi saranno due continuazioni di segno, l'equazione avrà necessariamente due radici negative. Di pari passo continuando il raziocinio resta evidentemente provato, che in una equazione, di cui tutte le radici siano reali, quanti vi saranno cambiamenti di segno, altrettante saranno le radici positive, e tante saranno le radici negative, quante saranno le successioni di segno,

501. Corol. Quindi s'intende, che volendosi cambiare le radici di una equazione da positive in negative, e da negative in positive, basterà cambiare tutti i segni ai termini, che sono in posto pari, cioè al secondo, al quarto, al sesto ec.; senza punto toccare i segni de' termini posti in luogo impari, poichè essendo il coefficiente del secondo termine la somma di tutte le radici col segno mutato, non si potrà a lui cambiare il segno senza cambiarlo anche alle radici, e gli altri termini in posto pari risultando dalla somma di prodotti di un numero impari di radici, cioè il quarto da' terni, il sesto da cinquine ec., qualora siano affetti dal segno positivo, saranno formati o dal prodotto di radici tutte negative, o da numero pari di radici positive, e numero dispari di radici negative; se hanno il segno negativo, saranno formati o dal prodotto di radici tutte positive, o da numero pari di radici negative, e numero dispari di radici positive; per lo che cambiando il segno a questi termini posti in luogo pari, le radici positive diverranno negative, e *viceversa*. Rispetto poi ai termini posti in luogo dispari, risultando essi dalla somma di prodotti di un numeri pari di radici, se avranno il segno positivo, saranno formati o da un numero pari di radici negative, o da un numero pari di radici positive, o pure da un numero pari di radici positive, e pari di negative; che se avranno il segno negativo, saranno formati dalla somma di prodotti di un numero dispari di radici positive in un numero dispari di radici negative: Che però tanto nell' uno, come nell' altro caso cambiandosi reciprocamente il segno alle radici, sussisterà lo stesso il segno di questi termini.

502. Mancando nell' equazione qualche termine intermedio, se i termini esistenti di quà, e di là dal termine mancante, saranno affetti da differente segno, da questo cambiamento verranno indicate due radici, una positiva, e l'altra negativa se poi i termini esistenti di quà, e di là saranno affetti dallo stesso segno, ciò sarà indizio di due radici immaginarie. Basterà dimostrare la verità di questa propposizione in un caso solo, che è il primo, quando cioè manca il secondo termine, e gli altri due adjacenti sono affetti dallo stesso segno, mentre quanto agli altri casi, o sia quanto alla mancanza degli altri termini si potrà dagli stessi lumi dedurre la dimostrazione della propposizione. E primieramente quanto alle equazioni di secondo grado non può mancare il secondo termine se non in caso, che le due radici siano eguali, e affette da diverso segno (pel num. 478.) lo che dà necessariamente l'ultimo termine negativo: Dunque se l'ultimo termine sarà positivo, e però dello stesso segno del primo, l'equazione avrà due radici immaginarie, come a chiunque è manifesto. Quanto alle equazioni di terzo grado allora solamente mancherà il se-

condo termine, quando delle tre radici dell'equazione una positiva sarà uguale a due negative, o una negativa a due positive, dalla di cui somma il secondo termine va a zero: Ora la somma, che nasce dagli ambi di queste radici, la quale deve servire per coefficiente al terzo termine, deve necessariamente essere negativa; poichè essendo le radici $m$, $n$, $-p$, o pure $-m$, $-n$, $p$, il coefficiente del terzo termine sarà $mn$, $-mp$, $-np$, ma essendo $m+n=p$, deve essere $np$ maggiore di $mn$, dunque $mn-mp-np$ deve essere quantità negativa. Se pertanto il terzo termine sarà positivo, e però dello stesso segno del primo termine, questa equazione avrà due radici immaginarie. Passiamo collo stesso discorso alle equazioni del quarto grado, nelle quali acciò manchi il secondo termine, o tre radici devono essere positive, ed una negativa, come $m$, $n$, $p$, $-q$, o tre negative, ed una positiva, come $-m$, $-n$, $-p$, $q$, o due positive, e due negative, come $-m$, $-n$, $p$, $q$, ovvero $m$, $n$, $-p$, $-q$. Nel primo, e nel secondo caso il coefficiente del terzo termine sarà $mn$, $mp$, $np$, $-mq$, $-nq$, $-pq$, ma essendo $m+n+p=q$, deve essere $mq>mn$, $pq>mp$, $nq>np$, dunque $mq+nq+pq>mn+mp+np$, e conseguentemente il terzo termine non può non essere negativo. Quanto al terzo caso, in cui $m+n=p+q$, il coefficiente del terzo termine sarà $mn-mp-np-mq-nq+pq$, o sia $mn+pq-\overline{m-n}\times\overline{p+q}$, e però $\overline{m+n}\times\overline{p+q}=mp+mq+np+nq$. Si faccia $m+n=p+q=r$, onde sarà $mp+mq+np+nq=r^2$; e siccome $r^2$ è uguale tanto ad $m^2+2mn+n^2=\overline{m+n}^2$, quanto a $p^2+2pq+q^2=\overline{p+q}^2$, quindi è, che si può determinare sì il valore di $mn$, come il valore di $pq$, onde conoscere se $mn+pq-\overline{m-n}\times\overline{p+q}$ debba essere quantità positiva, o negativa. Ora dalle precedenti equazioni si ha $mn=\frac{r^2-m^2-n^2}{2}$, e $pq=\frac{r^2-p^2-q^2}{2}$, dunque $mn+pq=r^2-\frac{m^2-n^2-p^2-q^2}{2}$, conseguentemente $r^2>mn+pq$. Sarà pertanto $mp+mq+np+nq>mn+pq$, e però il coefficiente del terzo termine non può non essere negativo. Qualora adunque sarà positivo, e però dello stesso segno del primo termine, l'equazione avrà due radici immaginarie. Lo stesso raziocinio si applichi all'altre equazioni superiori, e così resterà generalmente dimostrato, che ogniqualvolta in una equazione manchi il secondo termine, e il terzo sia positivo, ella avrà per lo meno due radici immaginarie. Cogli stessi principj si passi alla dimostrazione degli altri casi.

503. Poichè la regola data al num. 500. ha luogo solamente quando l'equazione ha tutte le radici reali, non già quando ammette radici immaginarie, come sarebbe questa $x^3+bx^2+ax+a^2b=0$, che quantunque stante la successione del segno $+$ sembri avere tutte le radici negative, pur non è vero a motivo, che ella ha radici immaginarie, che però le sue sue radici sono $-b$, $\pm\sqrt{-a^2}$; quindi per poter distinguere il numero delle radici positive, e negative di una proposta equazione, bisogna prima scuoprire se ella ha, o non ha tutte le radici reali.

504. Quantunque si possa immediatamente cercare se una data equazione ha tutte le radici reali, pure io mi rivolgerò piuttosto a scuoprire la maniera di conoscere se ella ha radici immaginarie, e quante presso a poco ne ha, mentre ciò egualmente basterà per determinare se l'equazione ha, o non ha tutte le radici reali, e in oltre quante presso a poco ne ha. Prima di venire al metodo di scuo-

pri-

prire se una equazione ha radici immaginarie, mi è necessario premettere il seguente

505. Lemma. Se di una equazione, le di cui radici siano tutte reali, si moltiplicheranno ordinatamente i termini per i termini di una progressione aritmetica, o principiante dal zero, come 0. 1. 2. 3. 4. ec., o risultante dagli esponenti dell' incognita; come $n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ec. le radici dell' equazione, che ne verrà, saranno parimente reali.

506. Dim. Per dimostrare questo Lemma assumo una equazione generale comunque, per esempio la seguente del terzo grado $x^3 \overline{\pm a \pm b \pm c} \times x^2 + \overline{ab + ac + bc} \times x \pm abc = 0$, di cui tutte le radici saranno negative, se del segno $\pm$, valerà il segno superiore $+$, e pel contrario saranno tutte positive, se valerà il segno $-$, giusta il num. 477. Le radici poi $a$, $b$, $c$ s' intendano disposte secondo l' ordine della grandezza numerica, così che essendo positive queste radici, sarà $a$ maggiore di $b$, e $b$ maggiore di $c$, ma essendo negative, sarà $a$ minore di $b$, e $b$ minore di $c$. Si moltiplichino pertanto i termini dell' equazione proposta per i termini della progressione aritmetica 0. 1. 2. 3., come segue.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (B) | $x^3 \pm \overline{a \pm b \pm c} \times x^2 +$ | $\overline{ab + ac + bc} \times x +$ | $abc = 0$ | |
| Progres. arit. | 0. | 1. | 2. | 3. |
| Prodotto (A) | $\overline{\pm a \pm b \pm c} \times x^3 +$ | $\overline{2ab + 2ac + 2bc} \times x \pm 3abc = 0$ | | |

Ora in questa equazione si sostituiscano ad una ad una le radici $a$, $b$, $c$ dell' equazione (B), quali radici si dovranno sostituir positive, se l' equazione sarà $\overline{-a-b-c} \times x^3 + \overline{2ab+2ac+2bc} \times x - 3abc = 0$, ma se l' equazione sarà $\overline{+a+b+c} \times x^3 + \overline{2ab+2ac+2bc} \times x + 3abc$ 0, $=$ si dovranno sostituir negative, poichè dovendosi sostituire le proprie radici, nel primo caso le radici dell' equazione sono positive, e nel secondo sono negative, come pur ora ho detto al num. 506. Sostituendosi pertanto $a$ ne verrà l' equazione (C), sostituendosi $b$, ne verrà l' equazione (D), sostituendosi $c$ ne verrà l' equazione (E).

(C) $-a^3 + a^2b + a^2c - abc = -a^3 + ab + ac - bc = 0$
(D) $-b^3 + ab^2 + b^2c - abc = -b^3 + ab + bc - ac = 0$
(E) $-c^3 + ac^2 + bc^2 - abc = -c^3 + ac + bc - ab = 0$

Sostituendosi $-a$ si avrà l' equazione (F), sostituendosi $-b$, si avrà l' equazione (G), sostituendosi $-c$ si avrà l' equazione (H)

(F) $+a^3 - a^2b - a^2c + abc = a^3 - ab - ac + bc = 0$
(G) $+b^3 - ab^2 - b^2c + abc = b^3 - ab - bc + ac = 0$
(H) $+c^3 - ac^2 - bc^2 + abc = c^3 - ac - bc + ab = 0$

Ma il valore dell' equazione (C) è negativo, perchè $a^3 + abc > a^2b + a^2c$, o sia, fatta la divisione per $a$, $a^2 + bc > ab + ac$, mentre la quantità $-a^2 - bc + ab + ac$ risulta da

da $-\overline{a+b}\times\overline{a-c}$; i due termini poi $a^2$, $bc$ risultano dal moltiplicarsi fra loro i termini estremi dei due fattori, e gli altri due termini $ab$, $ac$ risultano dal moltiplicarsi scambievolmente in croce i termini stessi: Ma essendo $a>b$, $b>c$, il prodotto de' termini estremi fra loro è maggiore del prodotto, che nasce dal moltiplicarsi in croce gli stessi termini, adunque $-a^2-bc>ab+ac$: E per la stessa ragione il valore dell'equazione (D) è positivo, e dell'equazione (E) è negativo. E *viceversa*, stante che cambiano i segni, il valore dell'equazione (F) è positivo, dell'equazione (G) è negativo, dell'equazione (H) è positivo. Sostituendosi pertanto nell'equazione A le radici dell'equazione (B), gli aggregati de'termini passano alternativamente da positivi a negativi, e da negativi a positivi. Dunque (pel num. 474.) le radici dell'equazione (A) sono reali, e però, siccome il raziocinio usato in questa equazione del terzo grado, è applicabile a qualunque altra equazione, se con una progressione aritmetica principiante dal zero si moltiplicheranno ordinatamente i termini di una equazione le di cui radici siano tutte reali, anche l'equazione, che ne verrà avrà tutte le radici reali. Lo che in primo luogo si doveva dimostrare.

507. Si moltiplichi adesso l'equazione (B) per la progressione aritmetica 3. 2. 1. 0., che ci viene esibita dagli esponenti dell'incognita, e si avrà, come segue

$$\begin{array}{lll} \text{(B)} & x^3 \pm \overline{a \pm b \pm c}\times x^2 + \overline{ab+ac+bc}\times x \pm abc = 0 \\ \text{Progres. ar.} & 3. \quad 2. & 1. \quad 0. \end{array}$$

$$\text{Prodotto (M)}\quad 3x^2 \pm \overline{2a \pm 2b \pm 2c}\times x + ab + ac + bc = 0$$

In questa equazione (M) si sostituiscano le radici $a, b, c$ dell'equazione (B) prima positive, e poi negative, e dalle prime si avranno le tre equazioni (N) (P) (Q), dalle seconde si avranno le equazioni (R) (S) (T), come segue

$$\begin{array}{ll} \text{(N)} & +a^2 - ab - ac + bc = 0 \\ \text{(P)} & +b^2 - ab - bc + ac = 0 \\ \text{(Q)} & +c^2 - ac - bc + ab = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(R)} & -a^2 + ab + ac - bc = 0 \\ \text{(S)} & -b^2 + ab + bc - ac = 0 \\ \text{(T)} & -c^2 + ac + bc - ab = 0 \end{array}$$

Questi aggregati poi essendo gli stessi di quelli, che sono risultati dalla moltiplicazione dell'equazione per la progressione 0. 1. 2. 3. ec., se non che gli aggregati, che quì sono risultati dalle sostituzioni delle radici positive, là sono risultati dalle sostituzioni delle stesse radici negative, e quelli, che là risultano dalle sostituzioni delle radici positive, quì risultano dalle sostituzioni delle radici negative. O si moltiplichi adunque una equazione, le di cui radici siano reali, per una progressione aritmetica principiante da zero, o per la progressione formata dagli esponenti dell'incognita, le radici dell'equazione, che ne risulterà, saranno parimente reali.

508. Ben si vede, che la stessa dimostrazione è applicabile alla proposizione, qualunque sia la progressione aritmetica, che si voglia adoprare.

509.

509. Dopo eſſerſi moltiplicata una propoſta equazione per gli eſponenti dell' incognita, ſi moltiplichino di nuovo i termini dell'equazione, che ne riſulterà, negli eſponenti della ſua incognita, e lo ſteſſo ſi continui a fare colle ſucceſſive equazioni, che ſi andranno ritrovando, e ſe l'equazione propoſta avrà tutte le ſue radici reali, anche le equazioni provenute, avranno parimente le loro radici reali: ma non già *viceverſa* eſſendo reali le radici delle ritrovate, o della ritrovata equazione, dovranno eſſer tali anche quelle della propoſta, perchè le radici della ſeconda equazione diventano limiti delle radici della prima, le quali ſono medie fra la maſſima, e la minima, ſolo in ipoteſi, che le radici della prima ſiano limiti delle radici della ſeconda. Che però ſe mediante la replicata moltiplicazione per una progreſſione aritmetica, ſi giungerà ad una equazione di ſecondo grado, le di cui radici ſiano immaginarie, neceſſariamente l'equazione data avrà per lo meno due radici immaginarie.

510. Il modo di dimoſtrare uſato quando le radici dell'equazione ſono tutte o poſitive, o negative, ha luogo ugualmente quando le radici ſono parte poſitive, e parte negative.

511. Si oſſervi poi, che ſiccome nelle equazioni ordinate il maſſimo termine deve eſſere poſitivo perciò nell'equazioni (C, D, E; R, S, T) poſitivo dovraſſi rendere il primo termine, lo che ſi otterrà (giuſta il num. 312.) con cambiare tutti i ſegni, nel qual caſo queſte equazioni ſaranno le ſteſſe, che le equazioni (F, G, H): Quindi poichè col ſoſtituirſi la radice $\pm a$ nell'equazione A l'aggregato de' termini riſulta poſitivo, col ſoſtituire $\pm b$ riſulta negativo, e di nuovo paſſa ad eſſere poſitivo col ſoſtituirſi $\pm c$, egli è evidente, che le radici dell'equazione (B) ſono limiti delle radici dell'equazione (A), e *viceverſa*: Che però le ritrovate equazioni mediante la replicata moltiplicazione per una progreſſione aritmetica, ſi poſſono chiamare le equazioni dei limiti.

512. Ciò poſto veniamo alla regola dataci dal Sig. Newton di determinare preſſo a poco il numero delle radici immaginarie di una data equazione. La regola è queſta. Sopra i termini della data equazione del grado $m$, cominciando dal ſecondo, ſi ſcrivano le frazioni $\frac{2m}{m-1}$, $\frac{3\times\overline{m-1}}{2\times\overline{m-2}}$, $\frac{4\times\overline{m-2}}{3\times\overline{m-3}}$, $\frac{5\times\overline{m-3}}{4\times\overline{m-4}}$ ec. ognuna delle quali deveſi moltiplicare nel prodotto de' coefficienti dei termini adjacenti di quà, e di là del termine, cui ella ſta ſopra, e ſe ciò, che ne verrà ſarà minore del quadrato del coefficiente di queſto tal termine di mezzo, ſotto vi ſi ſcriva il ſegno +, ſe è maggiore ſotto ſi ſcriva il ſegno —; ſotto al primo, e all' ultimo termine poi ſi ſcriva +, e quanti ſaranno i cambiamenti di ſegno, altrettante per lo meno ſaranno le radici immaginarie, che avrà l'equazione propoſta. Per dichiarare la dottrina eſpoſta coll'Eſempio, prendo l'equazione $x^6+4x^5+19x^4-42x^3+66x^2-50x+22=0$. Poichè nel preſente caſo $m=6$, le frazioni da ſcriverſi ſopra i termini dell'equazione, cominciando dal ſecondo, ſaranno $\frac{12}{5}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{12}{5}$, quali ſi noteranno, come ſegue

$$\overset{12}{\underset{5}{}} \quad \overset{15}{\underset{8}{}} \quad \overset{16}{\underset{9}{}} \quad \overset{15}{\underset{8}{}} \quad \overset{12}{\underset{5}{}}$$
$$x^6 + 4x^5 + 19x^4 - 42x^3 + 66x^2 - 50x + 22 = 0$$

Per maggiore chiarezza denomino i coefficienti de' termini dell'equazione colle lettere A, B, C ec., onde ſarà $A=4$, $B=19$, $C=-42$, $D=66$, $E=-50$, $F=22$: Denomino in oltre le corriſpondenti frazioni colle lettere $\Delta$, $\Theta$, $\Lambda$, $\Pi$, $\Sigma$, così che ſia $\Delta = \frac{12}{5}$, $\Theta = \frac{15}{8}$, $\Lambda = \frac{16}{9}$, $\Pi = \frac{15}{8}$, $\Sigma = \frac{12}{5}$. Ciò fatto procedo all' operazione, come ſegue

| Quad. de' coefficienti | Prodotti di ciaſcuna fraz. nel prodotto de' coefficienti adiacenti. | |
|---|---|---|
| $A^2 = 16$ | $\Delta \times B$ | $= \frac{12}{5} \times 19 = 45\frac{3}{5}$ |
| $B^2 = 361$ | $\Theta \times A \times C$ | $= \frac{15}{8} \times 4 \times 42 = 315$ |
| $C^2 = 1764$ | $\Lambda \times B \times D$ | $= \frac{16}{9} \times 19 \times 66 = 2229\frac{1}{3}$ |
| $D^2 = 4356$ | $\Pi \times C \times E$ | $= \frac{15}{8} \times 42 \times 50 = 3937\frac{1}{2}$ |
| $E^2 = 2500$ | $\Sigma \times D \times F$ | $= \frac{12}{5} \times 66 \times 22 = 3484\frac{4}{5}$ |

Si ha adunque riſpetto al ſecondo termine $16 < 45\frac{3}{5}$

riſpetto al terzo $361 > 315$

al quarto $1764 < 2229\frac{1}{3}$

al quinto $4356 > 3937\frac{1}{2}$

al ſeſto $2500 < 3484\frac{4}{5}$

che però ſe giuſta la regola data ſi ſcriveranno i convenienti ſegni ſotto a ciaſcun termine ſi avrà

$$x^6 + 4x^5 + 19x^4 - 42x^3 + 66x^2 - 50x + 22 = 0$$
$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

Onde avendoſi ſei cambiamenti di ſegni ſi raccoglie, che la propoſta equazione ha tutte ſei le radici immaginarie.

513.

513. Ora per dimoſtrare la verità del metodo, e far vedere, che le radici immaginarie vengono appunto indicate allora quando il quadrato del coefficiente di qualche termine è minore del prodotto de' coefficienti dei termini adjacenti moltiplicato nella frazione ſovrappoſta al termine di mezzo, baſterà prendere una equazione generale, e moltiplicarla nella progreſſione aritmetica, che riſulta dagli eſponenti dell'incognita, poſcia moltiplicare l'equazione, che ne naſce, per gli eſponenti parimente della ſua incognita, e così di ſeguito, finchè ſi giunga ad una equazione di ſecondo grado, mentre ſe le radici dell'equazione propoſta ſono reali, anche queſta equazione di ſecondo grado avrà (pel num. 505.) le ſue due radici reali, e ſe queſta ha le due radici immaginarie, anche la propoſta avrà neceſſariamente per lo meno due radici immaginarie, e la relazione de' coefficienti di queſta equazione di ſecondo grado ci fornirà la condizione indicante nell'equazione propoſta le due radici immaginarie. Sia pertanto l'equazione $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ ec. $= o$, i di cui termini ſi moltiplichino per gli eſponenti dell' incognita, e ſi dividano per la ſteſſa incognita così $mx^{m-1} + \overline{m-1} \times ax^{m-2} + \overline{m-2} \times bx^{m-3} + \overline{m-3} \times cx^{m-4}$ ec. $= o$. I termini di queſta equazione ſi moltiplichino parimente per gli eſponenti dell'incognita, e ſi avrà $m \times \overline{m-1} \times x^{m-2} + \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times ax^{m-3} + \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times bx^{m-4} + \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times cx^{m-5}$ ec. $= o$. Di nuovo ſi moltiplichino i termini di queſta equazione per gli eſponenti dell' incognita, e ſi avrà

$m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times x^{m-3} + \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times ax^{m-4} +$

$\overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times bx^{m-5} + \overline{m-3} \times \overline{m-5} \times \overline{m-4} \times cx^{m-6}$ ec. $= o$. Iſteſſamente ſi moltiplichino i termini di queſta equazione per gli eſponenti dell'incognita, e così in ſeguito, finchè ſi giunga ad una equazione di ſecondo grado. Tale poi ſarebbe l'ultima equazione trovata $m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times x^{m-3} +$

$\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times ax^{m-4} + \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times bx^{m-5} +$

$\overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times cx^{m-6}$ ec. $= o$, qualora foſſe $m = 5$: Di fatto ſoſtituendoſi queſto valore di $m$ nell'eſponente dell'incognita, ſarà $m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times x^2 +$

$\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times ax + \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times b = o$, e fatta la diviſione pel coefficiente di $x^2$, ſi avrà $x^2 + \frac{\overline{m-3} \times ax}{m} + \frac{\overline{m-3} \times \overline{m-4}}{m \times \overline{m-1}} \times b = o$, vale a dire

$x^2 + \frac{2ax}{m} + \frac{2b}{m \times \overline{m-1}} = o$, di cui (pel num. 410.) le radici non poſſono eſſere reali, ſe non è $\frac{a^2}{m^2} > \frac{2b}{m \times \overline{m-1}}$, e però $a^2 > \frac{2mb}{m-1}$, che ſe ſarà $a^2 < \frac{2mb}{m-1}$, ella avrà le radici immaginarie: Per lo che ſe ancora nell'equazione data ſarà $a^2 < \frac{2mb}{m-1}$, vale a dire ſe il quadrato del coefficiente del ſecondo termine ſarà minore

del prodotto del coefficiente del terzo termine nella frazione $\frac{2m}{m-1}$, l'equazione avrà due radici immaginarie. Ed ecco ritrovato il primo indizio di due radici immaginarie nell' equazione data.

514. Paſſiamo al ſecondo indizio, e primieramente ſi moltiplichi l' equazione data $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+dx^{m-4}$ ec. $=0$ per la progreſſione aritmetica 0. 1. 2. 3. 4 ec., con che ſi avrà $ax^{m-1}+2bx^{m-2}+3cx^{m-3}+4dx^{m-4}$ ec. $=0$ la quale avrà tutte le radici reali, in ſuppoſizione, che tali le abbia l'equazione data (pel num. 505.). Si moltiplichino adeſſo i termini di queſta equazione per gli eſponenti dell'incognita, e ſi dividano per la ſteſſa incognita, dal che ne verrà $\overline{m-1}\times ax^{m-2}+\overline{m-2}\times 2bx^{m-3}+\overline{m-3}\times 3cx^{m-4}+\overline{m-4}\times 4dx^{m-5}$ ec. $=0$: Di nuovo per gli eſponenti dell' incognita, ſi moltiplichino i termini di queſta ritrovata equazione, e ſi avrà $\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times ax^{m-3}+\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times 2bx^{m-4}+$ $\overline{m-2}\times\overline{m-4}\times 3cx^{m-5}+\overline{m-4}\times\overline{m-5}\times 4dx^{m-6}$ ec. $=0$, e così queſta ſi torni a moltiplicare ec. finchè ſi giunga ad una equazione di ſecondo grado, quale ſarà l'ultima equazione trovata, ſuppoſto che ſia $m=5$. Di fatto ſoſtituendoſi negli eſponenti queſto valore di $m$, ſi avrà $\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times ax^3+\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times 2bx+$ $\overline{m-3}\times\overline{m-4}\times 3c$, cioè (con liberare il primo termine dal coefficiente)

$x^2+\frac{\overline{m-3}\times 2bx}{a\times\overline{m-1}}+\frac{\overline{m-3}\times\overline{m-4}\times 3c}{a\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}=0$; o ſia $x^2+\frac{2\times 2bx}{a\times\overline{m-1}}+\frac{2\times 3c}{a\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}$ $=0$, le cui radici ſaranno immaginarie, qualora ſia $\frac{4b^2}{a^2\times\overline{m-1}^2}<\frac{2\times 3c}{a\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}$, e però $b^2<\frac{\overline{3\times\overline{m-1}}\times ac}{2\times\overline{m-2}}$; lo che pure accadendo nell' equazione propoſta, indicherà due radici immaginarie. Ed ecco ritrovato il ſecondo indizio di due radici immaginarie nella data equazione.

515. Per venire al terzo indizio ſi moltipliplichi per la ſerie aritmatica 0. 1. 2 3. 4. ec. l'equazione $ax^{m-1}+2bx^{m-2}+3cx^{m-3}+4dx^{m-4}$ ec. $=0$, con che ſi avrà l'equazione $2bx^{m-2}+6cx^{m-3}+12dx^{m-4}$ ec. $=0$, la quale ſi moltipliichi per la progreſſione aritmetica, che formano gli eſponenti dell'incognita, onde ſi avrà $\overline{m-2}\times 2bx^{m-3}+\overline{m-3}\times 6cx^{m-4}+\overline{m-4}\times 12dx^{m-5}$ ec. $=0$, la quale (ſuppoſto $m=5$) è di ſecondo grado, cioè $\overline{m-2}\times 2bx^2+\overline{m-3}\times 6cx+$ $\overline{m-4}\times 12d=0$, o ſia $x^2+\frac{\overline{m-3}\times 6cx}{\overline{m-2}\times 2b}+\frac{\overline{m-4}\times 12d}{2b\times\overline{m-2}}=0$, vale a dire $x^2+$ $\frac{\overline{m-3}\times 3cx}{b\times\overline{m-2}}+\frac{\overline{m-4}\times 6d}{b\times\overline{m-2}}=0$, la quale equazione avrà le radici immaginarie, ſe

ſa-

farà $\left(\frac{\overline{m-3}\times 3c}{2b\times\overline{m-2}}\right)^2 < \frac{\overline{m-4}\times 6d}{b\times\overline{m-2}}$, cioè $\frac{\overline{m-3}\times\overline{m-2}\times 9c^2}{4b^2\times\overline{m-2}^2} < \frac{\overline{m-4}\times 6d}{b\times\overline{m-2}}$, e pe-

rò $c^2 < \frac{4b\times\overline{m-2}\times\overline{m-4}\times 6d}{9\times\overline{m-3}\times\overline{m-3}}$, conſeguentemente $c^2 < \frac{24\times\overline{m-2}\times bd}{18\times\overline{m-3}}$, e per ulti-

mo $c^2 < \frac{4\times\overline{m-2}\times bd}{3\times\overline{m-3}}$, Che è il terzo indizio cercato, il quale avendo luogo nell' equazione propoſta indicherà due radici immaginarie.

516. Nella ſteſſa maniera continuando l'operazione ſi troveranno gli altri indizj di radici immaginarie propoſti al num. 512., vale a dire ſi troveranno le relazioni, che avranno i coefficienti in caſo di radici immaginarie.

517. Siccome poi queſti indizj poſſono eſſere tanti, quanti ſono i coefficienti dell'equazione, de' quali il numero (ſuppoſto $m$ il maſſimo eſponente dell' equazione) è $m-1$, e ogni indizio, poichè ricavato da una equazione di ſecondo grado, moſtra due radici immaginarie, qualora tutti queſti indizj ſi verifichino in una equazione, verrebbe il metodo a moſtrare più radici, di quello porti il grado dell'equazione, mentre il numero delle radici riſulterebbe $2m-2$, quando deve eſſere $= m$. Quantunque però ogni indizio, poichè ricavato da una equazione di ſecondo grado, naſca da due radici immaginarie, ſiccome può ſuccedere, che due indizj ſi riferiſcano alle ſteſſe radici, quindi è, che il numero degli indizj non moſtra ſempre un corriſpondente doppio numero di radici immaginarie. Che però ſe due indizj ſaranno conſecutivi, cioè ſe uno verrà dopo l'altro, eſſi non indicheranno, che due radici immaginarie, ma ſe ſaranno ſeparati, così, che di tre indizj manchi quel di mezzo, ognuno dei due indicherà due radici immaginarie.

518. Si oſſervi, che il primo indizio ſarà tanto $a^2 < \frac{2mb}{m-1}$, come $\frac{\overline{m-1}\times a^2}{2m} < b$; così il ſecondo ſarà tanto $b^2 < \frac{3\times\overline{m-2}\times ac}{2\times\overline{m-2}}$, come $\frac{2\times\overline{m-2}\times b^2}{3\times\overline{m-1}} < ac$ ec.

## ARTICOLO III.

### *Delle trasformazioni delle equazioni.*

519. DEf. Trasformare una equazione non è altro, che mutarla in un'altra; le di cui radici abbiano una data relazione alle radici dell' equazione propoſta.

520. Queſto artifizio ſerve a ſcuoprire le radici dell' equazione data mediante le radici già cognite della trasformata. Queſte trasformazioni ſi riducono ad accreſcere o diminuire di una quantità a piacere le radici dell' equazione propoſta; o pure a moltiplicarle, o dividerle per una quantità data. Io intanto ne eſporrò per ordine i metodi.

521. Prob. 1. Data l'equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, ſi debba ella trasformare in un'altra, le di cui radici ſiano le radici della propoſta accreſciute della quantità $n$.

522. Riſol. Poichè le radici della trasformata devono eſſere $x+n$, ſi prenda una nuova incognita $y$, e ſi faccia $x+n=y$, e però $x=y-n$. Nell' equazione propoſta ſi ſoſtituiſca in luogo di $x$, e delle ſue potenze la quantità $y-n$, e le di lei corriſpondenti potenze, il di cui aggregato darà la trasformata, che ſi cerca, come ſegue

$$\begin{array}{rcl}
x^4 = & y^4-4ny^3+6n^2y^2-4n^3y+n^4 \\
+ax^3 = & +ay^3-3any^2+3an^2y-an^3 \\
+bx^2 = & +by^2-2bny+bn^2 \\
+cx = & +cy-cn \\
+d = & +d
\end{array}$$

Equaz. trasform. $y^4-\overline{4n+a}\times y^3+\overline{6n^2-3an+b}\times y^2-\overline{4n^3+3an^2-2bn+c}\times y+n^4-an^3+bn^2-cn+d=0$

523. Chiaramente s'intende in primo luogo, che mediante queſta trasformazione ſi accreſceranno le radici poſitive dell'equazione propoſta, e ſi diminuiranno le negative: Per lo che ſe la quantità, con cui ſi accreſcono le radici dell'equazione, ſarà maggiore di ciaſcuna radice negativa, tutte le radici della trasformata ſaranno poſitive, e la minima radice poſitiva della trasformata riſulterà dalla maſſima negativa della propoſta.

524 In ſecondo luogo ſe la quantità, di cui ſi accreſcono le radici dell'equazione propoſta, ſarà uguale ad una delle di lei radici negative, queſta radice nella trasformata diverrà uguale a zero, per lo che l'ultimo termine della trasformata ſara uguale a zero (pel num. 481.), e però ſi potrà eſſa abbaſſare di un grado, dividendola per $y$.

525. In terzo luogo per mezzo di queſta trasformazione ſi potrà compiere una equazione, nella quale manchi qualche termine, niente altro a ciò fare richiedendoſi, che aumentare di una quantità data le ſue radici.

526. Prob. 2. Data l'equazione $x^3+ax^2+bx+c=0$, ſi debba eſſa trasformare in un'altra, le di cui radici ſiano le radici della propoſta diminuite della quantità $n$.

527. Riſol. Dovendo eſſere $x-n$ le radici della trasformata (la lettera $x$ rappreſenta le radici della propoſta), ſi prenda una nuova incognita $y$, e ſi faccia $x-n=y$, e però $x=y+n$, indi nell' equazione propoſta ſi ſoſtituiſca in luogo di $x$, e delle ſue potenze la quantità $y+n$, e le di lei corriſpondenti potenze, il di cui aggregato darà la ricercata equazion trasformata, come ſegue

$n^3$

$$\begin{array}{rcl} x^3 = & y^3+3ny^2+3n^2y+n^3 \\ +ax^2 = & +ay^2+2any+an^2 \\ +bx = & +by+bn \\ +c = & +c \end{array}$$

Equaz. trasformata $y^3+\overline{3n+a}\times y^2+\overline{3n^2+2an+b}\times y+n^3+an^2+bn+c=0$

528. Egualmente s'intende, che mediante questa trasformazione si diminuiscono della quantità $n$ le radici positive dell'equazione proposta, e si aumentano nel loro genere le negative: Per lo che se la quantità $n$ sarà uguale a qualcuna delle radici positive, una radice diverrà uguale a zero nella trasformata, in cui perciò mancherà l'ultimo termine (pel num. 481.); ond'è, che ella si potrà abbassare di un grado dividendola per $y$. Che se la quantità $n$ sarà maggiore di qualunque radice positiva, le radici positive dell'equazion proposta passeranno a negative nella trasformata.

529. Si opererà ugualmente qualora si voglia, che le radici della trasformata siano i residui, che nascono sottraendo da una data quantità, per Esempio $n$, le radici dell'equazione proposta, niente altro richiedendosi, che fare $n-x=y$, e però $x=n-y$, indi fare le sostituzioni, come sopra.

530. Parimente essendo data una equazione, il di cui ultimo termine abbia molti divisori, si potrà essa trasformare in un'altra, il di cui ultimo termine ne ammetta un numero minore, lo che si otterrà con diminuire le radici dell'equazione proposta di una tale quantità, la quale sostituita nell'equazione data dia per aggregato de'termini una quantità, la quale abbia meno divisori, che il detto ultimo termine, lo che è ben evidente, mentre l'ultimo termine della trasformata non è altro, che l'aggregato de' termini della equazion data, in cui siasi sostituita in luogo dell'incognita $x$ la quantità, di cui si diminuiscono le sue radici. Sia per Esempio l'equazione $x^3-3x^2-10x+24=0$ da trasformarsi in un'altra, il di cui ultimo termine abbia meno divisori, che il 24. Poichè con sostituirsi 1 in luogo di $x$, l'aggregato de' termini di questa equazione diventa 12, il quale ha meno divisori, che il 24, però si faccia $x-1=y$, quindi $x=y+1$, poscia si facciano le sostituzioni al solito, e si avrà la trasformata cercata.

531. Colle due dette trasformazioni si potrà togliere qual termine più piaccia da un'equazione; siccome pure si potrà rendere uguale ad una quantità qualunque $p$ il coefficiente di qualsisia termine, bastando aumentare, o diminuire (secondo che quel tale coefficiente è positivo, o negativo) di una quantità indeterminata $n$ le radici dell'equazione proposta, indi dall'equazione trasformata ptendere il coefficiente di quel tal termine, di cui si tratta, e farlo uguale alla data quantità $p$, poscia con questa equazione determinando il valore dell'assunta indeterminata $n$, aumentare, o diminuire le radici dell'equazione data di questo valore, e così trovarne la trasformata, nella quale il termine di cui si tratta avrà per coefficiente la quantità $p$.

532. Ai numeri 522. 527. per ritrovare le due equazioni trasformate abbiamo elevato la quantità $y\pm n$ alle corrispondenti potestà di $x$, indi fatte le debite sostituzioni nei termini dell'equazione, abbiamo preso l'aggregato, che n'è risultato per la ricercata equazione trasformata. Non è però necessario far prima ad una ad una le dette potenze di $y+n$, lo che riesce molto nojoso, massimamente quando l'e-

qua-

quazione propoſta è molto alta, ma ſi può con alcune opportune oſſervazioni abbreviare, e facilitare di molto il calcolo. A tal fine l' equazione trasformata del num. 527. ſi diſponga così

$$\begin{array}{rrrr} c & + bn & + an^2 & + n^3 \\ & + by & + 2any & + 3n^2y \\ & & + ay^2 & + 3ny^2 \\ & & & + y^3 \end{array}$$

poſcia ſi oſſervi, che la prima linea orizzontale, che è l'ultimo termine della trasformata, non è altro, che l'equazione propoſta, in cui ſia ſoſtituita la quantità $n$ in luogo di $x$: La ſeconda linea orizzontale riſulta dalla prima con moltiplicarne ciaſcun termine per $y$, e per l'eſponente di $n$, indi dividere ciaſcun termine per $n$: La terza linea orizzontale riſulta dalla ſeconda con moltiplicare ciaſcun di lei termine per $y$, e per una metà dell' eſponente di $n$, poſcia dividere ciaſcun termine per $n$: La quarta linea orizzontale naſce dalla terza con moltiplicare ciaſcun di lei termine per $y$, e per un terzo dell'eſponente di $n$, indi dividere ciaſcun termine per $n$. Se le linee orizzontali foſſero ſtate di più, ſarebbe ſtato d'uopo per avere la quinta linea orizzontale moltiplicare ciaſcun termine della quarta per $y$, e per un quarto dell'eſponente d' $n$, poſcia dividere ciaſcun termine per $n$ ec., e in queſto modo ſi ha la ricercata equazion trasformata. Prendo per Eſempio l'equazione $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + b = 0$, la quale deveſi trasformare in un'altra, le di cui radici ſiano $x - n$, onde aſſunta l'incognita $y$, ſarà $x = y + n$. Per trovare la trasformata, comincio a ſcrivere l'equazione data ſoſtituendo $n$ in luogo di $x$ poſcia ſotto a ciaſcun termine di queſta linea orizzontale, come pure di tutte le altre ſcrivo le convenienti quantità, poco fa determinate, con cui deveſi moltiplicare ciaſcun termine per avere la ſuſſeguente linea, come ſegue.

$+b$

$$+b+cn+dn^2+cn^3+bn^4+an^5+n^6$$
$$0\quad 1y\quad 2y\quad 3y\quad 4y\quad 5y\quad 6y$$

$$+cy+2dny+3cn^2y+4bn^3y+5an^4y+6n^5y$$
$$0\quad \tfrac{1}{2}y\quad \tfrac{2}{2}y\quad \tfrac{3}{2}y\quad \tfrac{4}{2}y\quad \tfrac{5}{2}y$$

$$dy^2+3cny^2+6bn^2y^2+10an^3y^2+15n^4y^2$$
$$0\quad \tfrac{1}{3}y\quad \tfrac{2}{3}y\quad \tfrac{3}{3}y\quad \tfrac{4}{3}y$$

$$+cy^3+4bny^3+10an^2y^3+20n^3y^3$$
$$0\quad \tfrac{1}{4}y\quad \tfrac{2}{4}y\quad \tfrac{3}{4}y$$

$$+by^4+5any^4+15n^2y^4$$
$$0\quad \tfrac{1}{5}y\quad \tfrac{2}{5}y$$

$$+ay^5+6ny^5$$
$$0\quad \tfrac{1}{6}y$$

$$y^6$$

e però la ricercata equazion trasformata è $y^6 + \overline{a+6n}\times y^5 + \overline{b+5an+15n^2}\times y^4 + \overline{c+4bn+10an^2+20n^3}\times y^3 + \overline{d+3cn+6bn^2+10an^3+15n^4}\times y^2 + \overline{e+2dn+3cn^2+4bn^3+5an^4+6n^5}\times y+b+cn+dn^2+cn^3+bn^4+an^5+n^6=0$.

533. Se foſſe ſtata $x=y-n$, in tal caſo nella trasformata ſarebbero negativi tutti que' termini, in cui $n$ ha eſponente impari, come per ſe ſteſſo è evidente.

534. Prob. 3. Data l'equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, ſi debba eſſa trasformare in un' altra le di cui radici ſiano le radici della propoſta moltiplicate per $m$.

535. Riſol. Poichè le radici della trasformata devono eſſere $mx$, ſi prenda una nuova incognita $y$, e ſi faccia $mx=y$, e però $x=\frac{y}{m}$, indi nell'equazione data ſi ſoſtituiſca in luogo dell'incognita $x$, e delle ſue potenze, queſto ſuo valore $\frac{y}{m}$, e le di lui corriſpondenti potenze, mediante che l'equazione trasformata ſarà $\frac{y^4}{m^4}+\frac{ay^3}{m^3}+\frac{by^2}{m^2}+\frac{cy}{m}+d=0$, o ſia (moltiplicando ciaſcun termine per $m^4$) $y^4+amy^3+bm^2y^2+cm^3y+dm^4=0$,

536. Si vede pertanto, che per avere l'equazione trasformata, le di cui radici ſiano le radici della propoſta moltiplicate nella quantità $m$, baſterà ſoſtituire nell' equazione data la nuova incognita $y$ in luogo dell'incognita $x$, indi moltiplicare per or-

ordine i di lei termini per i termini di una progreſſione geometrica principiante dall' unità, e il di cui ſecondo termine ſia la quantità $m$: Così riſpetto all'equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, dopo eſſerſi ſoſtituita la $y$ in vece di $x$, ſi moltiplichino i di lei termini per la progreſſione geometrica $1, m, m^2, m^3, m^4$, come ſegue

$$\begin{array}{cccccc} y^4 & ay^3 & by^2 & cy & d & =0 \\ 1 & m & m^2 & m^3 & m^4 & \end{array}$$

Equazione trasformata. $y^4+amy^3+bm^2y^2+cm^3y+dm^4=0$

537. Che ſe nell'equazione data la maſſima poteſtà dell'incognita avrà qualche quantità, come $m$, per coefficiente, mediante la ſoſtituzione di $\frac{y}{m}$ in luogo di $x$, ſi avrà l'equazione trasformata, in cui la maſſima poteſtà dell'incognita non avrà, che l'unità per coefficiente, o pure baſterà ſoſtituire nell' equazione propoſta la nuova incognita $y$ in luogo di $x$, indi moltiplicare i di lei termini, cominciando dal ſecondo, per una progreſſione geometrica, il di cui primo termine ſia l' unità, e il ſecondo ſia la quantità $m$.

538. Qualora l'equazione data aveſſe frazioni, ſi otterrà l'equazione trasformata immune dalle frazioni con ſoſtituire nell' equazione propoſta in luogo di $x$ una nuova incognita $y$ diviſa pel prodotto de' denominatori delle frazioni dell'equazione data, o pure diviſa per un numero, che eſattamente miſuri ciaſcun denominatore: Che ſe queſti denominatori non avranno un comun diviſore, ma abbiano una ſimile parte aliquota, in tal caſo baſterà dividere la $y$ per il prodotto di queſte parti aliquote, indi fare le debite ſoſtituzioni. Il metodo ha luogo, o le frazioni ſiano razionali, o irrazionali.

539. Se ſi vorrà, che la maſſima radice dell'equazione propoſta ſia la minima della trasformata, e così pure le altre ſi reciprochino, biſognerà ſupporre $x=\frac{1}{y}$. Se poi le radici dell'equazione trasformata dovranno eſſere uguali ad una quantità data $m$ diviſa per le radici dell' equazioue propoſta, biſognerà ſupporre $x=\frac{m}{y}$. Finalmente ſe ſi vorrà, che le radici dell' equazione trasformata ſtiano alle radici della propoſta in una data ragione di $m:n$, cioè ſia $y:x::m:n$, biſognerà ſupporre $x=\frac{yn}{m}$.

540. Mediante queſta trasformazione ſi può ancora liberare dai radicali una data equazione, ma ſiccome queſto metodo non vale, che in certi caſi, però ſarà meglio ricorrere al metodo eſpoſto al num. 408, che è generale.

541. Prob. 4. Data l'equazione $x^8+ax^3+bx^2+cx+d=0$, ſi debba eſſa trasformare in un'altra, le di cui radici ſiano le radici dell'equazione propoſta diviſe per la quantità $m$.

542. Riſol. Le radici dell' equazione trasformata dovendo eſſere $\frac{x}{m}$, ſi prenda

la

la nuova incognita $y$, e si faccia $\frac{x}{m} = y$, e però $x = my$, indi nell'equazione proposta si sostituisca in luogo di $x$ questo suo valore, mediante la quale sostituzione si avrà la ricercata equazion trasformata, che è $m^4y^4 + am^3y^3 + bm^2y^2 + cmy + d = 0$, o sia (per liberare dal coefficiente $m^4$ la massima potestà dell'incognita)

$$y^4 + \frac{ay^3}{m} + \frac{by^2}{m^2} + \frac{cy}{m^3} + \frac{d}{m^4} = 0.$$

543. Quindi per trasformare una data equazione in un'altra, le di cui radici siano le radici della proposta divise per una qualunque quantità $m$, basterà sostituire nell'equazione data una nuova incognita $y$ in luogo di $x$, indi dividere per ordine i di lei termini per i termini di una progressione geometrica principiante dall'unità, e il di cui secondo termine sia la quantità $m$.

544. Si potrà pertanto, data un'equazione, trovarne un'altra, i di cui coefficienti siano minori dei coefficienti della proposta, con trasformarla cioè in modo, che le radici della trasformata siano le di lei radici divise per una qualunque quantità.

545. Parimente si può trasformare una data equazione in maniera, che le radici della trasformata siano i quozienti, che nascono dal dividersi una quantità qualunque per le radici dell'equazione proposta.

546. Quì poi si osservi, che se le proposte equazioni da trasformarsi avranno radici immaginarie, lo stesso numero di radici immaginarie avranno pure le trasformate, lo che è per se stesso evidente.

## ARTICOLO IV.

*Delle equazioni, che contengono radici uguali, e del modo di ritrovarle.*

547. LE equazioni, che contengono radici uguali risultano da due fattori: Il primo è della forma $\overline{x \pm A}^n$, in cui A disegna ciascuna delle radici uguali, ed $n$ esprime il loro numero, e però $\overline{x \pm A}^n$ è il prodotto de' fattori semplici $x \pm A$: Il secondo poi è il prodotto delle radici ineguali, la di cui forma è $x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} + rx^{m-n-3}$ ec.... $+ Q = 0$.

548. Lemma. Se si moltiplicheranno i termini di un binomio $x + A$ elevato a una qualunque potenza $n$ per i termini della progressione aritmetica 0, 1, 2, 3, 4, 5 ec., il prodotto sarà lo stesso binomio $x + A$ elevato alla potenza $n-1$, e moltiplicato per $nA$.

549. Per assicurarsi della verità di questo Lemma, basta osservare ciò, che nasce dal moltiplicarsi i termini della potestà $n$ del binomio $x + A$ nei termini della progressione 0, 1, 2, 3 ec. Eccone il Calcolo

$$\overline{x+A}^n = x^n + nx^{n-1}A + \frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 2}x^{n-2}A^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 3}x^{n-3}A^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3\times 4}x^{n-4}A^4 \text{ ec.}$$

| Progref. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prodotto | | $nx^{n-1}A$ | $+n\times\overline{n-1}\times x^{n-2}A^2$ | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2}x^{n-3}A^3$ | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3}x^{n-4}A^4$ ec. |

Ora queſta equazione è uguale alla ſeguente

$$nA\times x^{n-1} + \overline{n-1}\times x^{n-2}A + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2}\times x^{n-3}A^2 + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3}\times x^{n-4}A^3 \text{ ec.}$$

la quale è uguale ad $nA\times\overline{x+A}^{n-1}$. Lo che dovevaſi dimoſtrare.

550. Poichè la progreſſione $0, m, 2m, 3m, 4m$ ec. è uguale ad $m\times\overline{0, 1, 2, 3}$ ec., chiaramente ſi vede, che ſe ſi foſſero moltiplicati i termini della poteſtà $n$ del propoſto binomio per i termini della progreſſione $0, m, 2m, 3m, 4m$ ec., il prodotto ſarebbe ſtato $mnA\times\overline{x+A}^{n-1}$.

551. Che ſe ſi foſſero moltiplicati per la progreſſione $p, p+m, p+2m, p+3m$ ec., il prodotto ſarebbe ſtato $px+pA+mnA\times\overline{x+A}^{n-1}$, poichè moltiplicare $\overline{x+A}^n$ per la progreſſione $p, p+m, p+2m$ ec., egli è lo ſteſſo, che moltiplicarlo; prima per $p$, lo che dà $p\times\overline{x+A}^n$, o ſia $p\times\overline{x+A}\times\overline{x+A}^{n-1}$, poſcia moltiplicarlo per la progreſſione $0, m, 2m$ ec., lo che (pel num. 550.) dà $mnA\times\overline{x+A}^{n-1}$ quindi il prodotto di $\overline{x+A}^n$ nella progreſſione $p, p+m, p+2m$ ec. è

$$\overline{pn+pA+mnA}\times\overline{x+A}^{n-1}.$$

552. Teor. Se coi termini di una progreſſione aritmetica ſi moltiplicheranno ordinatamente i termini di una equazione, che abbia radici uguali, il prodotto ſarà un' equazione, che a riſerva d'una avrà tutte le medeſime radici uguali.

553. Dim. L'equazione, che ha radici uguali ſia la ſeguente (giuſta il num. 547.)

$$\overline{x\pm A}^n\times\overline{x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} + rx^{m-n-3}} \text{ ec.} = 0,$$

o ſia ſviluppando la potenza $\overline{x+A}^n$, l'equazione ſarà

$x^m +$

$$x^m + nx^{m-1}A + \frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 2}\times x^{m-2}A^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 3}\times x^{m-3}A^3 \text{ ec.} = x^{m-n}\times\overline{x+A}^n$$

$$+ px^{m-1} + npx^{m-2}A + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times x^{m-3}A^2 \text{ ec.} = px^{m-n-1}\times\overline{x+A}^n$$

$$+ qx^{m-2} + nqx^{m-3}A \text{ ec.} = qx^{m-n-2}\times\overline{x+A}^n$$

$$+ rx^{m-3} \text{ ec.} = rx^{m-n-3}\times\overline{x+A}^n$$

di cui moltiplicandoſi per ordine i termini per i termini della progreſſione aritmetica $n$, $n+m$, $n+2m$, $n+3m$ ec., ciaſcuna linea verrà moltiplicata per una progreſſione aritmetica, la prima per l'intiera progreſſione $n$, $n+m$, $n+2m$ ec., la ſeconda per $n+m$, $n+2m$, $n+3m$ ec., la terza per $n+2m$, $n+3m$, $n+4m$ ec.: Ora in ciaſcuna linea v'è la potenza $\overline{x+A}^n$, dunque (pel num. 548.) il prodotto di ciaſcuna linea per una progreſſione aritmetica ſarà la potenza $\overline{x+A}^{n-1}$ ne' fattori $x^{m-n}$, $px^{m-n-1}$, $qx^{m-n-2}$ ec., i quali nulla alterano, conſeguentemente tutta l'equazione moltiplicata per la progreſſione aritmetica ſarà

$$\overline{x+A}^{n-1}\times x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} + rx^{m-n-3} \text{ ec.} = 0.$$ Lo che ſi doveva dimoſtrare.

554. Prob. Data una equazione, che abbia radici uguali, ſi debba ritrovare il loro valore.

555. Riſol. La data equazione ſi moltiplichi per una progreſſione aritmetica, quale per Eſempio è quella, che viene formata dagli eſponenti dell'incognita, indi di queſta, e dell'equazione data ſi trovi il maſſimo comun diviſore, (pel num. 216.) dal quale ſi eſtragga la radice indicata dal maſſimo di lui eſponente, e ciò, che ne verrà, darà il valore delle radici uguali cercate.

556. Dim. Pel num. 547. l'equazione propoſta ha per fattore $\overline{x+A}^n$, e pel num. 548. l'equazione provenuta dalla moltiplicazione nella progreſſione aritmetica ha per fattore $\overline{x+A}^{n-1}$, dunque queſto fattore $\overline{x+A}^{n-1}$ è comune a tutte due le equazioni, e però egli è il loro maſſimo comun diviſore: Ma $\overline{x+A}^{n-1}$ è una poteſtà perfetta, la di cui radice $n-1^{ſima}$ è $x+A$; quindi ſarà A il ricercato valore delle radici uguali. Lo che ſi doveva dimoſtrare.

557. Debbanſi per Eſempio ritrovare le radici uguali, che ha queſta equazione $x^5+5x^4-20x^3-150x^2-135x^2+513x+810=0$. La moltiplico per la progreſſione aritmetica 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, che mi viene ſomminiſtrata dagli eſponenti dell'incognita, con che ho $6x^5+25x^4-80x^3-450x^2-270x+513=0$, come ſegue

$$x^6+5x^5-20x^4-150x^3-135x^2+513x+810=0$$
$$6\quad 5\quad 4\quad 3\quad 2\quad 1\quad 0$$

$$6x^5+25x^4-80x^3-450x^2-270x+513\quad =0$$

Ora di queſta equazione, e dell'equazione data cerco il maſſimo comun diviſore, che trovo eſſere $x^3+9x^2+27x+27=0$, dal quale eſtraendo la radice cuba mi viene $x+3=0$, e però $x=-3$, dunque $-3$ è il valore delle radici uguali, che ha l'equazione propoſta: E perchè (pel num. 548.) l'equazione provenuta dalla moltiplicazione nella progreſſione aritmetica contiene le ſteſſe radici uguali una meno, che l'equazione data, però oltre le radici uguali, che contiene il maſſimo comun diviſore, ne reſta ancor una, onde il numero delle cercate radici uguali è $3+1=4$. Adunque l'equazione propoſta ha quattro radici uguali, ognuna delle quali è $=-3$.

## ARTICOLO V.

*Modo di ritrovare le formole generali per la eliminazione di una, di due ec. incognite per mezzo di due, di tre ec. equazioni di qualſivoglia grado a due, a tre ec. incognite.*

558. COlle lettere A, B, C, D.... V ſi diſegni qualunque funzione di una delle due incognite, per Eſempio $y$ (per funzione di una incognita ſi intende un compleſſo di termini, riſultanti da quantità cognita, e da quella Incognita) nella prima equazione, e colle lettere A', B', C', D'... V' ſi diſegni qualunque funzione della ſteſſa incognita nella ſeconda equazione: Per lo che la prima equazione ſarà $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}....+V=0$, e la ſeconda $A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}...+V'=0$; che però ſe la prima delle propoſte equazioni foſſe $4x^3y^3-abxy^3+cdey^3-cxy+3bxy^2-2x^2y^3=0$, ſarà $n=5$, $A=-cy$, $B=-2y^3$, $C=4y^2$, $D=3by^2$, $E=-aby^2$, $V=cdey^3$.

559. Mediante le aſſunte due equazioni ecumeniche ſi eliminerà l'incognita $x$ con trovare in primo luogo tante equazioni del grado $n-1$, quante ne moſtra l'eſponente $n$, poſcia conſiderando in queſte equazioni come altrettante incognite le diverſe potenze di $x$, eliminare col metodo eſpoſto all'Articolo I. del Capo II. tutte queſte potenze di $x$, con che ſi avrà finalmente una equazione, nella quale ſi troveranno le ſole funzioni di $y$, e così reſterà eliminata l'incognita $x$. Il motivo poi, per cui devonſi ritrovare primieramente tante equazioni, quante ne diſegna l'eſponente $n$ ſi è, perchè il numero delle potenze di $x$ da eliminarſi è $n-1$, e per eliminare un numero $n-1$ di quantità, vi vuole un numero $n$ di equazioni.

560. Il modo poi di ritrovare per mezzo delle due propoſte equazioni un numero $n$ di equazioni del grado $n-1$ ſi è di moltiplicare primieramente la prima equazione per A', e dal prodotto ſottrarne la ſeconda moltiplicata in A, con che ſi avrà la prima equazione del grado $n-1$. In ſecondo luogo ſi dovrà moltiplicare la prima equazione per $A'x+B'$, e dal prodotto ſottrarne la ſeconda moltiplicata in $Ax+B$, onde averne la ſeconda equazione del grado $n-1$. In terzo luogo biſognerà moltiplicare la prima equazione per $A'x^2+B'x+C'$, e dal prodotto ſottrarne la ſeconda moltiplicata in $Ax^2+Bx+C$, mentre il reſiduo darà la terza equazione del grado $n-1$.

$n-1$. Che se collo stess' ordine si continueranno le moltiplicazioni per un polinomio di un grado successivamente più alto, si avranno tutte le altre equazioni di grado $n-1$, il di cui numero sarà uguale all'esponente $n$.

561. Le dette moltiplicazioni sono ordinate e a rendere identici i termini $Ax^n$, $A'x^n$, onde mediante la sottrazione possano sparire; e a dare diversa espressione alle varie equazioni del grado $n-1$, che si trovano.

562. Applichiamo al caso particolare la dottrina esposta, e veniamo all'invenzione delle formole generali per la eliminazione dell'incognita $x$ mediante due equazioni di secondo grado. Le equazioni siano le seguenti.

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad Ax^2+Bx+C=0\\ &\text{II} \quad A'x^2+B'x+C'=0 \end{aligned}$$

Poichè queste equazioni sono di secondo grado, e però nel caso presente si ha $n=2$, si dovranno trovare due equazioni di grado $n-1=1$, cioè di primo grado. A tale oggetto si moltiplichi la prima equazione per $A'$, e dal prodotto si sottragga la seconda moltiplicata in $A$, come segue

$$\begin{array}{rl} \text{Prima equazione molt. in } A' & A'Ax^2+A'Bx+A'C=0\\ \text{Seconda moltipl. in } A & A'Ax^2+AB'x+AC'=0\\ \hline \text{Residuo} & \overline{A'B-AB'}\times x+A'C-AC'=0 \end{array}$$

che è la prima equazione di grado $2-1=1$. Di nuovo si moltiplichi la prima equazione per $A'x+B'$, e dal prodotto si sottragga la seconda moltiplicata in $Ax+B$, come segue

$$\begin{array}{rl} \text{Prima equaz. molt. in } A'x+B' & A'Ax^3+\overline{AB+AB'}\times x^2+\overline{AC+BB'}\times x+B'C=0\\ \text{Seconda moltipl. in } Ax+B & A'Ax^3+\overline{A'B+AB'}\times x^2+\overline{AC'+BB'}\times x+BC'=0\\ \hline \text{Residuo} & \overline{A'C-AC'}\times x+B'C-BC'=0 \end{array}$$

che è la seconda equazione di grado $2-1=1$.

563. Ora per eliminare l'incognita $x$ mediante le due ritrovate equazioni di primo grado, moltiplico la prima per la indeterminata $m$, e dal prodotto sottraggo la seconda così

$$\begin{array}{rl} \text{Prima equaz. moltipl. per } m & \overline{A'Bm-AB'm}\times x+m\times\overline{A'C-AC'}=0\\ \text{Seconda equazione} & \overline{A'C-AC'}\times x+B'C-BC'=0\\ \hline \text{Residuo (I')} & \overline{A'Bm-AB'm-A'C+AC'}\times x+m\times\overline{A'C-AC'}-BC+BC'=0 \end{array}$$

In questa equazione faccio uguale a zero il coefficiente di $x$, con che ho $A'Bm-AB'm-A'C+AC'=0$, da cui si ricava il valore dell'indeterminata $m$, che è

$m=$

$m = \frac{A'C - AC'}{A'B - AB'}$. Se queſto ritrovato valore dell'indeterminata $m$ ſi ſoſtituirà nell'ultimo termine dell'equazione (Γ), ſi avrà $\frac{A'C - AC'}{A'B - AB'} \times \overline{A'C - AC'} - B'C + BC' = 0$,

cioè a dire $\overline{A'C - AC'}^2 - \overline{B'C + BC'} \times \overline{A'B - AB'} = 0$ che è la formola generale per la eliminazione della incognita $x$ mediante due equazioni del ſecondo grado.

564. Che ſe ſi aveſſe voluto eliminare la incognita $y$, le equazioni generali da aſſumerſi ſarebbero ſtate $Ay^2 + By + C = 0$; $A'y^2 + B'y + C' = 0$, dalle quali ugualmente ne ſarebbe venuta la formola generale trovata: Ma quì ſi oſſervi, che queſte due formole ſono uguali ſoltanto in apparenza, in quanto che ſi è ſuppoſto, che le ſteſſe lettere A, B, C; A', B', C' rappreſentino tanto le funzioni dell'incognita $y$, come dell'incognita $x$.

565. Quanto alle equazioni di terzo grado ſiano eſſe le due generali ſeguenti.

I $\quad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$
II $\quad A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$

dalle quali devonſi ricavare tante equazioni di grado $3-1=2$, quante ne eſprime l'eſponente 3: Che però per avere la prima moltiplico l'equazione I per A', e dal prodotto ſottraggo l'equazione II moltiplicata in A come ſegue

Equaz. I moltipl. in A' $\quad A'Ax^3 + A'Bx^2 + A'Cx + A'D = 0$
Equaz. II moltipl. in A $\quad A'Ax^3 + AB'x^2 + AC'x + AD' = 0$

Reſiduo (Δ) $\quad \overline{A'B - AB'} \times x^2 + \overline{A'C - AC'} \times x + A'D - AD' = 0$

che è la prima equazione di grado $3-1=2$. Per avere la ſeconda moltiplico l'equazione I per $A'x+B'$, e dal prodotto ſottraggo l'equazione II moltiplicata in $Ax+B$, come ſegue

Equaz. I moltipl. in $A'x+B'$
$A'Ax^4 + \overline{AB + AB'} \times x^3 + \overline{A'C + BB'} \times x^2 + \overline{A'D + BC'} \times x + B'D = 0$
Equaz. II moltipl. in $Ax+B$
$A'Ax^4 + \overline{A'B + AB'} \times x^3 + \overline{AC + BB'} \times x^2 + \overline{AD' + BC'} \times x + BD' = 0$

Reſiduo (Θ) $\quad \overline{A'C - AC'} \times x^2 + \overline{A'D + B'C - AD' - BC'} \times x + B'D - BD' = 0$

che è la ſeconda equazione di grado $3-1=2$. Finalmente per avere la terza equazione di grado $3-1=2$, moltiplico l'equazione I per $A'x^2+B'x+C'$, e dal prodotto ſottraggo l'equazione II moltiplicata in $Ax^2+Bx+C$, come ſegue

Equaz.

Equaz. I moltipl. in $A'x^2+B'x+C'$

$$A'Ax^5+\overline{A'B+AB'}\times x^4+\overline{A'C+BB'+AC'}\times x^3+\overline{A'D+BC+BC'}\times x^2$$
$$+\overline{BD+CC'}\times x+CD'=0$$

Equaz. II moltipl. in $Ax^2+Bx+C$

$$A'Ax^5+\overline{A'B+AB'}\times x^4+\overline{A'C+BB'+AC'}\times x^3+\overline{AD'+BC'+BC'}\times x^2$$
$$+\overline{BD'+CC'}\times x+CD'=0$$

Reſiduo (A) $\overline{A'D-AD'}\times x^2\overline{B'D-BD'}\times x+C'D-CD'=0$

che è la terza, e ultima equazione di grado $3-1=2$. Ora per mezzo di queſte tre equazioni $\Delta$, $\Theta$, A ſi elimineranno le potenze $x^2$, $x$, che devonſi conſiderare come due differenti incognite. Per ottenere ciò moltiplico la prima di queſte tre equazioni colla indeterminata $p$, e la ſeconda colla indeterminata $q$, indi dalla loro ſomma ſottraggo la terza, come ſegue

Equaz. ($\Delta$) moltipl. in $p$ $p\times\overline{AB-AB'}\times x^2+p\times\overline{AC-AC'}\times x+A'Dp-AD'p=0$

Equaz. ($\Theta$) moltipl. in $q$ $q\times\overline{A'C-AC'}\times x^2+q\times\overline{AD+BC-AD'-BC'}\times x+B'Dq-BD'q=0$

Somma $p\times\overline{AB-AB'}+q\times\overline{A'C-AC'}\times x^2+p\times\overline{AC-AC'}+q\times\overline{AD+BC-AD'-BC'}\times x$
$+A'Dp-AD'p+B'Dq-BD'q=0$

Equaz. (A) $\overline{A'D-AD'}\times x^2+\overline{B'D-BD'}\times x+CD-CD'=0$

Reſiduo ($\Xi$) $p\times\overline{A'B-AB'}+q\times\overline{A'C-AC'}+AD'-A'D\times x^2$
$+p\times\overline{A'C-AC'}+q\times\overline{AD+BC-AD'-BC'}-B'D+B'D'\times x$
$+A'Dp-AD'p+B'Dq-BD'q+CD'-CD=0$

Ora per eliminare le due potenze $x^2$, $x$ devonſi fare uguali a zero i loro coefficienti, così $p\times\overline{A'B-AB'}+q\times\overline{A'C-AC'}-A'D+AD'=0$, $p\times\overline{A'C-AC'}+q\times\overline{A'D+BC-AD'-BC'}-B'D+BD'=0$. Per avere mediante queſte due equazioni i valori delle due indeterminate $p$, $q$, moltiplico la prima colla indeterminata $r$, e dal prodotto ſottraggo la ſeconda come ſegue

Equaz. moltipl. in $r$ $r\times p\times\overline{AB-AB'}+r\times q\times\overline{A'C-AC'}+r\times\overline{AD'-A'D}=0$

ſeconda Equaz. $p\times\overline{A'C-AC'}+q\times\overline{AD-AD'+BC-BC'}+BD'-B'D=0$

Reſiduo ($\Pi$) $r\times\overline{AB-AB'}+AC'-A'C\times p+r\times\overline{A'C-AC'}+AD'-A'D+BC'-B'C\times q$
$+r\times\overline{AD'-A'D}+B'D-BD'=0$

in cui faccio primieramente uguale a zero il coefficiente di $p$, così $r \times \overline{A'B-AB'} + AC - A'C = 0$, onde si ha il valore di $r$, che è

$r = \frac{A'C-AC}{AB-AB'}$, il qual valore sostituito negli ultimi due termini dell' equazione (Π)

dà $\overline{\frac{A'C-AC}{AB-AB'} \times A'C-AC} + AD' - A'D + BC - B'C \times q + \frac{A'C-AC}{AB-AB'} \times \overline{AD-AD'} +$

$BD' - BD' = 0$, mediante la quale equazione si ha il valore di $q$, che è $q =$

$\frac{A'C-AC \times AD-AD' + AB-AB' \times BD-BD}{A'C-AC^2 + AB-AB' \times AD-A'D+BC-B'C}$. Parimente per determinare il valore

di $p$ faccio uguale a zero il coefficiente di $q$, così $r \times \overline{A'C-AC} + AD' - A'D +$

$BC' - B'C = 0$, onde si ha il valore di $r$, che è $r = \frac{A'D-AD'+BC-BC'}{A'C-AC}$, il qual

valore sostituito nel primo, e nell' ultimo termine dell' equazione (Π) dà

$\overline{\frac{A'D-AD'+BC-BC'}{A'C-AC} \times A'B-AB' + AC - A'C} \times p + \frac{A'D-AD'+BC-BC'}{A'C-AC} \times$

$AD' - A'D + B'D - BD' = 0$, con che si ha il valore di $p$, che è $p =$

$\frac{A'D-AD'+BC-BC' \times AD-AD' + AC-AC' \times BD'-BD}{AD-AD'+BC-BC' \times AB-AB' + AC-AC' \times AC-A'C}$. Si sostituiscano ora que-

sti ritrovati valori di $p$, $q$ nell' ultimo membro dell' equazione (Σ), e si avrà

$$\overline{AD-AD'} \times \frac{\overline{-AD+AD-BC+BC \times AD-AD' + AC-AC' \times -BD'+B'D}}{-AD+AD-BC+BC \times AB-AB' + AC-AC' \times -AC'+A'C} +$$

$$\overline{BD-BD'} \times \frac{\overline{AC-AC' \times AD-AD' + AB-AB' \times BD'-BD}}{AC-AC^2 + AB-AB' \times AD-A'D+BC-B'C} + CD' - CD = 0$$

e però togliendo i denominatori si avrà

$$\overline{AD-A'D+BC-B'C} \times \overline{AD-AD'^2} + \overline{AD-AD'} \times \overline{AC-AC'} \times \overline{BD-BD'}$$

$$+ \overline{BD-BD'} \times \overline{AC-AC'} \times \overline{AD-AD'} + \overline{BD-BD'} \times \overline{AB-AB'} \times \overline{BD-BD'} +$$

$$\overline{CD'-CD} \times \overline{AC-AC'} + \overline{CD'-CD} \times \overline{AB-AB'} \times \overline{AD'-A'D+BC'-BC} = 0,$$

che è la formola generale, con cui date due equazioni di terzo grado a due incognite, se ne elimina una.

566. Date pertanto due equazioni dello stesso grado, qualunque egli sia, collo esposto metodo operando si giungerà all' equazione ecumenica inserviente alla eliminazione di una delle loro incognite.

567. Che se le equazioni contenenti due incognite, delle quali una devesi eliminare, non saranno dello stesso grado, come se una fosse $Vx^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}$

+

$+Cx^{m-3}\ldots\ldots+Q=0$, e l'altra $V'x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\ldots+Q'=0$, in cui $m>n$, si trovino primieramente tante equazioni di grado $m-1$, quante ne indica il numero $n$ esponente massimo dell'equazione inferiore, lo che si otterrà con moltiplicare la prima equazione per $V'$, e la seconda per $Vx^{m-n}$, indi dalla prima sottrar la seconda, il di cui residuo sarà la prima equazione di grado $m-1$: Poscia devesi moltiplicare la prima per $V'x+A'$, e dal prodotto sottrarne la seconda moltiplicata in $Vx^{m-n+1}+Ax^{m-n}$, ed il residuo sarà la seconda equazione di grado $m-1$: Istessamente continuando le moltiplicazioni per un polinomio sempre più alto, e facendo la sottrazione della seconda equazione dalla prima, si avranno le altre cercate equazioni di grado $m-1$, il di cui numero deve essere uguale al numero $n$. Mediante poi l'equazione di grado $n$, e la replicata di lei moltiplicazione per $x$, si trovino i valori delle successive potestà di $x$ cominciando da $x^n$ fino ad $x^m$; delle quali potestà si prendano per ordine i valori, e si sostituiscano in ciascuna delle ritrovate equazioni di grado $m-1$, con che si avrà un numero $n$ di equazioni di grado $n-1$. Finalmente per mezzo di queste equazioni di grado $n-1$, in cui devonsi considerare le diverse potestà di $x$ come altrettante differenti incognite di primo grado, si giungerà col metodo esposto all' Articolo I. del Capo II. alla formola generale, in cui non si ritroverà, che una sola incognita.

568. Ma veniamone all'attuale invenzione, e coll'Esempio rendiamo più palpabile l'esposta dottrina. E primieramente si avverta, che in due equazioni, una del primo grado, e l'altra del grado $m$, non cade il metodo; poichè basta prendere il valore di $x$ dalla proposta equazione di primo grado, indi formarne le corrispondenti potenze a quelle, che sono nell'altra equazione, e poscia farne le sostituzioni, che così si avrà l'equazione senza $x$. Date siano pertanto due equazioni; una del secondo, e l'altra del terzo grado espresse generalmente così $Ax^2+Bx^1+Cx+D=0$, $A'x^2+B'x+C'=0$. Si moltiplichi la prima in $A'$, e dal prodotto si sottragga la seconda moltiplicata in $Ax^{3-2}=Ax$, come segue

| | |
|---|---|
| Prima equaz. moltipl. in $A'$ | $A'Ax^2+A'Bx^1+A'Cx+A'D=0$ |
| Seconda moltipl in $Ax$ | $A'Ax^2+AB'x^1+AC'x\quad=0$ |
| Residuo $(\Sigma)$ | $\overline{AB-AB'}\times x^1+\overline{AC-AC'}\times x+A'D=0$ |

che è la prima equazione di grado $3-1=2$. Di nuovo si moltiplichi la prima equazione per $Ax+B'$, e dal prodotto si sottragga la seconda moltiplicata in $Ax^{3-2+1}+Bx^{3-2}$, cioè per $Ax^2+Bx$, come segue

| | |
|---|---|
| Pr.eq.molt. in $A'x+B'$ | $A'Ax^2+\overline{AB+AB'}\times x^1+\overline{AC+BB'}\times x^2+\overline{AD+B'C}\times x+B'D=0$ |
| Sec. molt. in $Ax^2+Bx$ | $A'Ax^2+\overline{AB+AB'}\times x^1+\overline{AC+BB'}\times x^2+BC'x=0$ |
| Residuo $(\Phi)$ | $\overline{AC-AC'}\times x^1+\overline{AD+B'C-BC'}\times x+B'D=0$ |

che è l'altra equazione di grado $3-1=2$. Essendosi pertanto ritrovate due equazioni di grado $3-1$ corrispondentemente all'esponente 2 dell'equazione minore, si prenda dalla stessa seconda equazione il valore di $x^2$, che è $x^2=-\frac{B'x-C'}{A'}$, il quale

ſi ſoſtituiſca nell' una, e nell' altra delle due ritrovate equazioni di grado 3—1, dalla quale ſoſtituzione ſi avranno due equazioni, in cui l' incognita $x$ non monterà, che al primo grado, come ſegue

I $\quad -\frac{\overline{Bx-C}}{A'} \times \overline{AB-AB'} + \overline{AC-AC} \times x + A'D = 0$

II $\quad -\frac{\overline{Bx-C}}{A'} \times \overline{AC-AC'} + \overline{AD+BC-BC} \times x + BD = 0$

dalla prima ſi ha $\overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+ABB'} \times x + A'A'D + AB'C - A'BC = 0$

dalla ſeconda ſi ha $\overline{A'A'D-A'BC'+AB'C'} \times x + A'B'D - A'CC' + ACC' = 0$

Ora per eliminare la $x$ ſi moltiplichi la prima di queſte due equazioni per la indeterminata $p$, e dal prodotto ſi ſottragga la ſeconda, come ſegue

Pr. eq. molt. in $p$ $\quad \overline{p} \times \overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+ABB'} \times x + \overline{p} \times \overline{A'A'D+AB'C-A'BC'} = 0$

Seconda equaz. $\quad \overline{A'A'D-A'BC'+AB'C'} \times x + A'B'D - A'CC' + ACC' = 0$

Reſiduo $(\Psi)$ $\quad \overline{p \times A'A'C-AA'C-A'BB'+ABB'} - A'A'D + A'BC' - AB'C' \times x$

$+ p \times \overline{A'A'D+ABC-A'BC'} - A'B'D + A'CC' - ACC' = 0$

in cui facendo uguale a zero il coefficiente di $x$, ſi avrà

$p \times \overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+AB'B'} - A'A'D + A'BC' - AB'C' = 0$, da cui ſi ricava il valore di $p$, che è $p = \frac{A'A'D-A'BC'+AB'C'}{\overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+AB'B'}}$, il qual valore ſoſtituito nell' ultimo membro dell' equazione $(\Psi)$ darà

$$\frac{\overline{A'A'D-A'BC'+AB'C'}}{\overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+ABB'}} \times \overline{A'A'D+AB'C-A'BC'} - A'B'D + A'CC' - ACC' = 0$$

e però $\overline{A'A'D-A'BC'+AB'C'} \times \overline{A'A'D+AB'C-A'BC'} + \overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+ABB'} \times \overline{A'CC'-A'BD-ACC'} = 0$, cioè $\overline{A'A'D-A'BC'+AB'C'}^2$

$+ \overline{A'A'C-AA'C-A'BB'+ABB'} \times \overline{A'CC'-A'BD-ACC'} = 0$

che è la formola generale cercata per la eliminazione di una incognita mediante due equazioni, una del ſecondo, e l' altra del terzo grado.

569. Quantunque il già detto moſtri abbaſtanza il metodo da tenerſi per ritrovare le altre formole generali per la eliminazione di una incognita mediante due qua-

quali ſi ſiano equazioni, pure non eſtimo ſuperfluo il proporre un altro Eſempio per due equazioni d'inegual grado. Si debba pertanto ritrovare la formola generale per la eliminazione di una incognita per mezzo di due equazioni, una del terzo, e l'altra del quinto grado. Siano le equazioni generali $Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Fx+F=0$, $A'x^3+B'x^2+C'x+D'=0$. Si moltiplichi la prima per $A'$, e dal prodotto ſi ſottragga la ſeconda moltiplicata in $Ax^{5-3}=Ax^2$, come ſegue

Prima equaz. moltipl. in $A'$ $A'Ax^5+A'Bx^4+A'Cx^3+A'Dx^2+A'Ex+A'F=0$
Seconda moltipl. in $Ax^2$ $A'Ax^5+AB'x^4+AC'x^3+AD'x^2 \quad =0$

Reſiduo (Ω) $\overline{A'B-AB'}\,x^4+\overline{A'C-AC'}\,x^3+\overline{A'D-AD'}\,x^2+A'Ex+A'F=0$

che è la prima equazione di grado $5-1=4$. Di nuovo ſi moltiplichi la prima equazione per $A'x+B'$ e dal prodotto ſi ſottragga la ſeconda moltiplicata in $Ax^{5-3+1}+Bx^{5-3}$, cioè $Ax^3+Bx^2$, come ſegue

Prima eq. moltipl. in $A'x+B'$ $A'Ax^6+\overline{A'B+AB'}\,x^5+\overline{AC'+BB'}\,x^4+\overline{A'D+CB'}\,x^3$
$+\overline{A'E+DB'}\,x^2+A'Fx+B'Ex+BF=0$

Second. moltipl. in $Ax^3+Bx^2$ $A'Ax^6+\overline{A'B+AB'}\,x^5+\overline{AC'+BB'}\,x^4+\overline{AD'+BC'}\,x^3$
$+BD'x^2=0$

Reſiduo (β) $\overline{A'C-AC'}\,x^4+\overline{AD+CB-AD'-BC'}\,x^3$
$+\overline{A'E+B'D-BD'}\,x^2+A'Fx+B'Ex+BF=0$

che è la ſeconda equazione di grado $5-1=4$. Finalmente ſi moltiplichi la prima equazione per $A'x^2+Bx+C'$, e dal prodotto ſi ſottragga la ſeconda moltiplicata in $Ax^{5-3+2}+Bx^{5-3+1}+Cx^{5-3}$, cioè $Ax^4+Bx^3+Cx^2$, come ſegue

Prima equaz. moltipl. in $A'x^2+B'x+C'$
$A'Ax^7+\overline{AB+AB'}\,x^6+\overline{AC+BB+AC'}\,x^5+\overline{AD'+BC+BC'}\,x^4+\overline{AE+B'D+CC'}\,x^3$
$+\overline{AF+BE+CD}\,x^2+\overline{BF+CE}\,x+CF=0$
Seconda moltipl. in $Ax^4+Bx^3+Cx^2$
$A'Ax^7+\overline{AB+AB'}\,x^6+\overline{AC+BB+AC'}\,x^5+\overline{AD'+BC+BC'}\,x^4+\overline{BD+CC'}\,x^3$
$+CD'x^2=0$

Reſiduo (δ) $\overline{AD-AD'}\,x^4+\overline{A'E+B'D-BD'}\,x^3+\overline{A'F+BE+CD-CD'}\,x^2$
$+\overline{BF+CE}\,x+CF=0$

che è la terza equazione di grado $5-1=4$.

Si prenda adeſſo il valore di $x^3$ dalla ſeconda propoſta equazione, che è $x^3=-\frac{B'x^2-C'x-D'}{A'}$, poſcia ſi moltiplichi per $x$, così $x^4=-\frac{B'x^3-C'x^2-D'x}{A'}$,

in cui ſoſtituendo il poc' anzi ritrovato valore di $x^3$, ſi avrà

$$x^4 = -\frac{B'\times\frac{-B'x^2-C'x-D'}{A'}-C'x^2-D'x}{A'}, \text{ cioè}$$

$$x^4 = \frac{B'B'x^2+B'C'x+B'D'-A'C'x^2-A'D'x}{A'A'}, \text{ vale a dire}$$

$$\frac{\overline{BB'-AC'}\times x^2+\overline{BC'-AD'}\times x+BD'}{A'A'} = x^4.$$

Che ſe ſi ſoſtituiranno queſti ritrovati valori di $x^3$, $x^4$ in ciaſcuna delle ritrovate equazioni di grado 5—1, la prima ſarà

$$\overline{AB-AB'}\times\frac{\overline{BB'-AC'}\times x^2+\overline{BC'-AD'}\times x+BD'}{A'A'}+\overline{AC-AC'}\times\frac{-B'x^2-C'x-D'}{A'}$$

$$+\overline{AD-AD'}\times x^2+A'Ex+A'F=0, \text{ cioè}$$

$$\overline{AB-AB'}\times\overline{BB'-AC'}-B'\times A'\times\overline{AC-AC'}+AA'\times\overline{AD-AD'}\times x^2$$

$$+\overline{AB-AB'}\times\overline{BC'-AD'}-C'\times A'\times\overline{AC-AC'}+A'A'A'E\times x$$

$$+\overline{AB-AB'}\times B'D'-A'D'\times\overline{AC-AC'}+A'A'A'F=0$$

La ſeconda ſarà $\overline{AC-AC'}\times\frac{\overline{BB'-AC'}\times x^2+\overline{BC'-AD'}\times x+BD'}{A'A'}$

$$+\overline{AD+CB'-AD'-BC'}\times-\frac{B'x^2-C'x-D'}{A'}+\overline{AE+BD-BD'}\times x^2+\overline{AF+BE'}\times x$$

$$+BF=0, \text{ cioè}$$

$$\overline{AC-AC'}\times\overline{BB'-AC'}-AB'\times\overline{AD+CB'-AD'-BC'}+AA'\times\overline{AE+BD-BD'}\times x^2$$

$$+\overline{AC-AC'}\times\overline{BC'-AD'}-AC'\times\overline{AD+CB'-AD'-BC'}+AA'\times\overline{AF+BE'}\times x$$

$$+BD'\times\overline{AC-AC'}-A'D'\times\overline{AD+CB'-AD'-BC'}+A'A'BF=0$$

La terza ſarà $\overline{AD-AD'}\times\frac{\overline{BB'-AC'}\times x^2+\overline{BC'-AD'}\times x+BD'}{A'A'}+\overline{AE+BD-BD'}\times$

$$\frac{-B'x^2-C'x-D'}{A'}+\overline{AF+BE+CD-CD'}\times x^2+\overline{BF+CE'}\times x+CF=0, \text{ cioè}$$

$$\overline{AD-AD'}\times\overline{BB'-AC'}-AB'\times\overline{AE+BD-BD'}+AA'\times\overline{AF+BE+CD-CD'}\times x^2$$

$$+\overline{AD-AD'}\times\overline{BC'-AD'}-AC'\times\overline{AE+BD-BD'}+AA'\times\overline{BF+CE'}\times x$$

$$+BD'\times\overline{AD-AD'}-A'D'\times\overline{AE+BD-BD'}+A'A'CF=0$$

Fat-

Fatto ciò passiamo all' eliminazione di $x$, $x^2$, e per abbreviare il calcolo supponiamo uguale a P il coefficiente di $x^2$, il coefficiente di $x$ uguale a Q, e il membro cognito uguale a R nella prima equazione, onde per la seconda saranno P', Q', R', per la terza P'', Q'', R'', mentre poi fatto il calcolo si rimetteranno in luogo di queste lettere i loro valori. La prima equazione pertanto sarà $Px^2+Qx+R=0$; la seconda $P'x^2+Q'x+R'=0$, la terza $P''x^2+Q''x+R''=0$. Ora per venire alla eliminazione, si moltiplichi la prima di queste equazioni per $m$, e la seconda per $n$, e dalla somma di questi due prodotti si sottragga la terza equazione, come segue

Prima equaz. moltipl. per $m$ $\quad mPx^2+mQx+mR=0$
Seconda moltipl. per $n$ $\quad nP'x^2+nQ'x+nR'=0$

Somma $\quad \overline{mP+nP'} \times x^2+\overline{mQ+nQ'} \times x+mR+nR'=0$
Terza equaz. $\quad P''x^2+Q''x+R''=0$

Residuo $(\gamma)$ $\quad \overline{mP+nP'-P''} \times x^2+\overline{mQ+nQ'-Q''} \times x+mR+nR'-R''=0$

nella quale equazione si facciano uguali a zero i coefficienti di $x$, $x^2$, con che si avrà $mP+nP'-P''=0$, $mQ+nQ'-Q''=0$, colle quali due equazioni devonsi determinare i valori delle due assunte indeterminate $m$, $n$. A tale oggetto moltiplico la prima per la indeterminata $r$, e dal prodotto sottraggo la seconda come segue

Prima equaz. moltipl. per $r$ $\quad mrP+nrP'+rP''=0$
Seconda equaz. $\quad mQ+nQ'-Q''=0$

Residuo $(\lambda)$ $\quad rP-Q \times m+\overline{rP'-Q'} \times n-rP''+Q''=0$

in cui facendo uguale a zero il coefficiente di $m$ si avrà $r=\frac{Q}{P}$, il qual valore sostituito negli altri due termini dell'equazione $(\lambda)$ dà $\overline{\frac{P'Q}{P}-Q'} \times n-\frac{P''Q}{P}+Q''=0$, e però $n=\frac{P''Q-PQ''}{P'Q-PQ'}$. Indi fatto uguale a zero il coefficiente di $n$ si avrà $r=\frac{Q'}{P'}$, il qual valore sostituito nel primo, e nell'ultimo termine dell'equazione $(\lambda)$ dà $\overline{\frac{PQ'}{P'}-Q} \times m-\frac{P''Q'}{P'}+Q''=0$, e però $m=\frac{P'Q''-P''Q'}{P'Q-PQ'}$. Si sostituiscano ora questi ritrovati valori di $m$, $n$ nell' ultimo membro dell'equazione $(\gamma)$ e si avrà $R \times \overline{\frac{PQ''-P''Q}{PQ'-PQ'}}+R' \times \frac{P'Q-PQ'}{P'Q-PQ'}-R''=0$, e però

$\overline{PQ'-P'Q} \times R''+\overline{P'Q-PQ''} \times R'+\overline{P''Q-P'Q} \times R=0$. Che se si rimetteranno in luogo di ciascuna lettera P, Q, R ec., i suoi valori, si avrà finalmente l' equazione senza l' incognita $x$: Io ometto di fare queste sostituzioni per se ovvie a ciascuno a fine di non empiere la pagina di lettere. Tralascio pure di applicare le ritrovate for-

formole al caſo particolare, poichè ciò ſeco non porta difficoltà alcuna, tanto più, che un conſimile Eſempio ſi può vedere al num. 584.

570. Lo ſteſſo metodo ha luogo per eliminare due, o più incognite per mezzo di tre, o più equazioni a tre, o più incognite, mentre ſe il numero delle incognite da eliminarſi ſarà $=p$, il numero delle equazioni a ciò neceſſarie dovrà eſſere $=p+1$. Queſta eliminazione poi ſi potrà ottenere tanto paragonando le equazioni a due a due, come paragonandole tutte inſieme, ma diverſo ſarà il grado, a cui aſcenderà l'equazione nata dalla eliminazione, ſecondo che il paragone ſi farà, o nel primo, o nel ſecondo modo: Se ſi farà il paragone delle equazioni a due a due, a molto maggior grado aſcenderà l'equazione riſultante, che col paragonarle tutte inſieme; per lo che biſognerà attenerſi a queſta ſeconda maniera. Quando ſi elimina mediante il paragone di due equazioni, l'eſponente di $x$ nel primo termine del fattore maſſimo ſi è veduto fin'ora eſſere $n-1$ (ſuppoſto $n$ l'eſponente maſſimo delle equazioni), cioè è di queſta forma $Ax^{n-1}+Bx^{n-2}$ ec., non così però egli è quando le equazioni ſi paragonano tutte inſieme, ma queſto maſſimo eſponente per ciaſcun fattore deveſi prima determinare col calcolo. Cominciamo da tre equazioni, ciaſcuna a tre incognite, due delle quali debbonſi eliminare. Le equazioni ſiano le ſeguenti

$$\begin{aligned} &Ax^{n} + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots V = 0 \\ &A'x^{n'} + B'x^{n'-1} + C'x^{n'-2} + \ldots V' = 0 \\ &A''x^{n''} + B''x^{n''-1} + C''x^{n''-2} + \ldots V'' = 0 \end{aligned}$$

Giuſta il metodo finora praticato deveſi dedurre da queſte tre equazioni un numero $n$ di equazioni, ognuna del grado $n-1$, moltiplicando la prima per $A''$, e dal prodotto ſottraendo la ſeconda moltiplicata per $A$, poſcia moltiplicando la prima per $A'x+B'$, e dal prodotto ſottraendo la ſeconda moltiplicata per $Ax+B$, e così in ſeguito finchè il moltiplicatore, che deve moltiplicare la prima ſia $Ax^{m}+Bx^{m-1}$+ec., e il moltiplicatore, che deve moltiplicare la ſeconda ſia $Ax^{m'}+Bx^{m'-1}$+ ec. Queſti due eſponenti $m, m'$ ſono fino ad ora indeterminati, e li determinerò fra poco: due coſe però ſi oſſervino, la prima che le accennate moltiplicazioni eſſendo alternative, il loro numero è uguale, e però tanto riſpetto all'una, come riſpetto all'altra il moltiplicatore deve aſcendere allo ſteſſo grado, onde ſarà $m=m'$, la ſeconda che ſarà $m+1$ (o ſia $m'+1$ perchè $m=m'$) il numero delle equazioni di grado $n-1$ nate dalle dette operazioni. Deveſi in oltre moltiplicare la prima equazione per $A''$, e dal prodotto ſottrarne la terza moltiplicata per $A$, indi moltiplicare la prima per $Ax+B''$, e dal prodotto ſottrarne la terza moltiplicata per $Ax+B$, e così in poi, finchè il moltiplicatore ſia $A''x^{m''}+Bx^{m''-1}$+ ec., e qui parimente l'eſponente $m''$ è ancora indeterminata, e or ora lo determinerò; il numero poi delle equazioni di grado $n-1$, che da queſte operazioni riſulta, trovaſi eſſere $m''+1$: Dunque il numero totale delle equazioni di grado $n-1$, che dalle prime, e da queſte ſeconde operazioni riſulta è $m+1+m''+1$, cioè $m+m''+2$. Ma (pel num. 559.) il numero di queſte equazioni deve eſſere $=n$, dunque ſi ha l'equazione $n=m+m''+2$, dalla quale ſi ricava $m=n-m''-2$; ed ecco, che qualora ſi avrà il valore di $m''$, con farne la ſoſtituzione in queſta equazione $m=n-m''-2$, ſi avrà il valore della indeterminata $m$, e conſeguentemente di $m'$, poichè è $m=m'$

Per avere il valore di $m''$ ſervirà la ſeguente formola (S) $m''=\frac{n+n'+n''+t+t'+t''}{2}-n''-t''-1$, o ſia mediante la riduzione allo ſteſſo denomina-

tore $m'' = \frac{n+n'-n''+c+o'-t''-2}{2}$, la di cui dimoſtrazione non ſi può dare in queſto luogo, e però non poſſo eſporre come tale formola ſi ricavi; ciò per altro nulla contribuiſce all' uſo, che ſe ne deve fare. La lettera $n$ rappreſenta il maſſimo eſponente della prima equazione, la $n'$ della ſeconda, la $n''$ della terza; la lettera $t$ eſprime il numero delle dimenſioni del coefficiente A della prima equazione, $t'$ di A', $t''$ di A''.

Quattro ſono le condizioni, che deve avere l'eſponente $m''$, le quali ſono per ſe ſteſſe evidenti. La prima che queſto eſponente $m''$ ſia poſitivo, la ſeconda che egli ſia un numero intero, la terza che ſia $n+m > n''+m''$, o al più $n+m = n''+m''$, la quarta che ſia $n'-2 > m''$, o al più $n'-2 = m''$, perchè (le equazioni ſi ſuppongono diſpoſte ſecondo la grandezza de' loro eſponenti maſſimi, così che in caſo, che non ſiano tutti uguali, ſia l'eſponente $n$ nella prima equazione maggiore dell' eſponente $n'$ nella ſeconda, e l'eſponente $n'$ nella ſeconda maggiore dell' eſponente $n''$ nella terza) eſſendo $n = n'$, ſe ſi ſoſtituirà $n'$ in luogo di $n$ nell'equazione $m = n - m'' - 2$, ſi avrà $m = n' - m'' - 2$, e però $m'' + m = n' - 2$, e dal primo membro levando la $m$, reſterà $m'' < n' - 2$: Eſſendo poi $m > m'$, potrà eſſere al più $n' + m = n$, e però ſoſtituendo queſto valore di $n$ nell' equazione $m = n' - m'' - 2$, ſi avrà $m = n' + m - m'' - 2$, conſeguentemente $m'' = n' - 2$.

Ora per ſalvare le dette quattro condizioni nel valore di $m''$ introdurrò nella formola (S) la indeterminata $\beta$ così $m'' = \frac{n+n'-n''+t+t'-t''-2-\beta}{2}$. Queſta indeterminata $\beta$ deve eſſere il più piccol numero, mercè cui ſalvare ſi poſſano le eſpoſte condizioni. L'eſempio metterà ſotto gli occhi quanto ho detto. Date ſiano le tre ſeguenti equazioni I. $y^3zx^3 + y^3z^3x^2 + byz^3x + ay^2z^3 = o$, II. $zx^3 + yzx + y^3z = o$, III. $yzx^3 + yz^3x + abyz = o$. Per rendere la ſoluzione generale ſoſtituirò in queſte equazioni in luogo dei coefficienti di $x$ le lettere A, B ec, con che le date equazioni ſaranno

$$(\Delta) \quad \begin{cases} A x^3 + B x^2 + C x + D = o \\ A' x^3 + B' x + C' = o \\ A'' x^2 + B'' x + C'' = o \end{cases}$$

Adunque eſſendo A di tre dimenſioni, A' di una, A'' di due, ſarà $t = 3$, $t' = 1$, $t'' = 2$, e in oltre perchè il maſſimo eſponente della prima equazione è 3, della ſeconda è 2, della terza è 2, ſarà $n = 3$, $n' = 2$, $n'' = 2$. Quindi la formola $m'' = \frac{n+n'-n''+t+t'-t''-2-\beta}{2}$ mediante le debite ſoſtituzioni ſi cambia in $m'' = \frac{3-\beta}{2}$, il qual valore ſoſtituito nell' equazione $m = n - m'' - 2$ dà $m = \frac{\beta-1}{2}$, e però $m' = \frac{\beta-1}{2}$, poichè è $m = m'$, ed $m'' = \frac{3-\beta}{2}$. Ora vediamo qual ſia il numero minore, che ſi poſſa dare a $\beta$, affinchè abbiano luogo le quattro dette condizioni; egli pertanto non può eſſere altro, che 3, onde nei precedenti valori ſoſtituendoſi 3 in luogo di $\beta$ ſi ha $m'' = o$, $m' = 1$, $m = 1$. I valori di queſti eſponenti naſcono dall' ordine, con cui ſi ſono diſpoſte le equazioni in $(\Delta)$; però mutiamo ordine alle equazioni come ſegue, mettendo in terzo luogo quella, che era in primo, e facendo prima la ſeconda

(T)

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} A'x^2 + B'x + C' = 0 \\ A''x^2 + B''x + C'' = 0 \\ A x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \end{cases}$$

Poichè $n$ rappreſenta ſempre il maſſimo eſponente della prima equazione, $n'$ della ſeconda, $n''$ della terza; e $t$ dinota le dimenſioni del coefficiente del primo termine nella prima equazione, $t'$ del primo nella ſeconda, $t''$ del primo nella terza, ſarà $n=2$, $n'=2$, $n''=3$, $t=1$, $t'=2$, $t''=3$, quindi fatte le debite ſoſtituzioni nella formola eſprimente il valor di $m''$, ſi avrà $m''=-\frac{1-\beta}{2}$, e ſiccome per qualunque numero ſi ſoſtituiſca in luogo di $\beta$, ſi ha ſempre un valor negativo, però ripugnando queſto valor di $m''$ alla prima condizione, non potrà valere l' aſſunto ordine delle equazioni. Di nuovo ſi muti l' ordine alle equazioni facendo la terza quella, che era la ſeconda, e ſeconda quella, che era terza, così

$$(\Theta)\quad \begin{cases} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \\ A'x^2 + B'x + C' = 0 \\ A''x^2 + B''x + C'' = 0 \end{cases}$$

Stante tale diſpoſizione trovaſi eſſere $n=3$, $n'=2$, $n''=2$, $t=3$, $t'=2$, $t''=1$, onde il valore di $m''$ diventa $m''=\frac{5-\beta}{2}$, e queſto valore ſoſtituito nell'equazione $m=n-m''-2$ dà $m=-\frac{3+\beta}{2}$, conſeguentemente $m'=-\frac{3+\beta}{2}$. Il minor numero poi, che ſi poſſa aſſegnare a $\beta$ a fine di ſalvare le neceſſarie condizioni è $\beta=5$, dalla quale ſoſtituzione ſi ha $m''=0$, $m=1$, $m'=1$.

Veniamo adeſſo all' attuale eliminazione, e a tale oggetto prendiamo le equazioni ſecondo l' ordine poſto in $(\Delta)$, e per rendere il maſſimo eſponente uguale in tutte tre, moltiplichiamo la ſeconda, e la terza equazione per $x$, con che le equazioni ſaranno

$$(\Lambda)\quad \begin{cases} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \\ A'x^3 + B'x^2 + C'x = 0 \\ A''x^3 + B''x^2 + C''x = 0 \end{cases}$$

Giuſta la quale diſpoſizione ſi è trovato, che il maſſimo eſponente di $x$ nel maggior fattore, che moltiplicar deve la prima, e la ſeconda equazione, ha da eſſere $=m=m'=1$, e il maſſimo eſponente di $x$ nell'altro maggior fattore, che deve moltiplicare la prima, e la terza equazione, ha da eſſere $=m''=0$. Comincio adunque con ſottrarre la ſeconda equazione moltiplicata per A dalla prima moltiplicata per A', con che ho

$$\text{I.}\quad \overline{A'B - AB'}\,x^2 + \overline{A'C - AC'}\,x + A'D = 0$$

dalla prima moltiplicata per $A'x+B'$ ſottraggo la ſeconda moltiplicata per $Ax+B$ lo che mi dà

$$\text{II.}\quad \overline{AC - AC'}\,x^2 + \overline{AD + BC - BC'}\,x + B'D = 0$$

e queſta operazione non deveſi più oltre continuare, perchè eſſendoſi trovato

$m=$

$m=m'=1$, l' ultimo uſato moltiplicatore $Ax+B$, o $A'x+B'$ è il maſſimo, conſeguentemente deveſi paſſare all' altra operazione, che è di moltiplicare la prima equazione per $A''$, e dal prodotto ſottrarne la terza moltiplicata per $x$, onde naſce

III. $\overline{A'B-AB''}\times x^3+\overline{A'C-AC''}\times x+A'D=0$

che è la ſola moltiplicazione da farſi, perchè ſi è trovato $n''=0$ eſponente di $x$ nel fattore maſſimo. Si ſono trovate adunque tre equazioni di grado $3-1$ corriſpondentemente al maſſimo eſponente 3 delle equazioni (A). Mediante queſte tre equazioni I, II, III (giuſta il metodo del num 565.) ſi ritrovi l' equazione, che contenga le ſole incognite $y$, $z$, che ſarà la ſeguente

(Π) $\overline{A'D\times A'C-AC'}\times\overline{A'C-AC''-A''B+AB''}+$

$\overline{B'D\times A'C-AC'}\times\overline{A''B-AB''+AB'-AB}\times\overline{A'C-AC'}+$

$\overline{A''D\times AB-AB'}\times\overline{AD+BC-BC'+AC'-AC}\times\overline{AC-AC''}=0$ la quale mediante la ſoſtituzione dei valori di A, B, C ec. già fiſſati di ſopra ſi cambia nella ſeguente ordinata ſecondo l'incognita $z$.

(Σ) $\overline{a^2y^7-ay^7}\times z^9+\overline{ay^9+a^2cy^5-a^2y^8}\times z^8-\overline{ay^{11}+aby^8-a^2b^2y^6}\times z^7=0$.

Biſogna adeſſo trovare un' altra equazione, nella quale enarino le ſole incognite $y$, $z$, e a tale oggetto riprendo le ſteſſe equazioni ſecondo l'ordine, con cui ſon poſte in (Θ): Dalla prima pertanto moltiplicata in $A''$ ſottraggo la ſeconda moltiplicata in A, e ne viene

I. $\overline{A''B-AB''}\times x^2+\overline{A''C-AC''}\times x+A''D=0$

Dalla prima moltiplicata per $A''x+B''$ ſottraggo la ſeconda moltiplicata per $Ax+B$, con che ritrovo

II. $\overline{A''C-AC''}\times x^2+\overline{A''D+B''C-BC''}\times x+B''D=0$

e queſta moltiplicazione baſta, perchè $m=m'=1$. Quindi paſſo a ſottrarre la terza moltiplicata in A dalla prima moltiplicata in $A'$, con che ho

III. $\overline{AB-AB'}\times x^2+\overline{AC-AC'}\times x+A'D=0$

Ora da queſte tre equazioni, come ho fatto poc'anzi deduco l'equazione in $y$, $z$, che è (Ξ) $\overline{AD\times AC-AC'}\times\overline{AC-AC''-A'B+nB'}+$

$\overline{B'D\times A'C-AC'}\times\overline{AB-AB'+AB'-AB}\times\overline{AC-AC'}+$

$\overline{AD\times A'C-AC''^2+AB'-AB}\times\overline{A'D+BC-BC''}=0$, che colla ſoſtituzione dei valori di A, B, C ec. trovaſi eſſere

(Φ) $\overline{aby^7-a^2by^6}\times z^9+\overline{a^2by^9-aby^8+a^2by^8-aby^7}\times z^8+$

$\overline{a^2by^{10}-a^2by^9-aby^9+aby^8+a^3b^2y^8-3a^2b^2y^7+2ab^2y^6}\times z^7=0$

Colle ritrovate due equazioni ( Σ Φ ) si eliminerà la z col metodo solito; che se si vorrà eliminare la y, bisognerà ordinarle per y così

( T ) $az^7y^{11}+\overline{az^4-az^4}\times y^9+\overline{a^2z^8-a^2bz^8-abz^7}\times y^8-a^2z^9y^7+a^2b^2z^7y^6=0$

( Y ) $a^2bz^7y^{10}+\overline{a^2bz^5-a^2bz^7-abz^7}\times y^9-\overline{a^2bz^9+a^2bz^8-abz^8+a^3b^2z^7-abz^7}\times y^8$
$+\overline{abz^9-abz^5-3a^2b^2z^7}\times y^7+2ab^2z^7y^5=0$

Eliminiamo pertanto la incognita z mediante le due equazioni ( Σ Φ ), nelle quali per abbreviare il calcolo in vece de' coefficienti di $z^7$, $z^8$ ec. pongo le lettere A, B, ec. così

I. $Az^9+Bz^8+Cz^7=0$
II. $A'z^9+B'z^8+C'z^7=0$

ma perchè queste equazioni sono divisibili per $z^7$, perciò saranno

I. $Az^2+Bz+C=0$
II. $A'z^2+B'z+C'=0$

mediante le quali si eliminerà la incognita z giusta il num. 564., e l'equazione, che conterrà la sola y sarà $\overline{A'C-AC'}^2-\overline{BC+BC'}\times\overline{A'B-AB'}=0$, nella quale rimettendo in vece delle lettere i corrispondenti valori, si avrà finalmente $5a^2y^{12}-$

$\overline{4a^2-10a}\times y^{11}+\overline{2a^3b-3a^3+2a^2+8a+5}\times y^{10}$
$\overline{-2a^3b+4a^3-17a^2b+6a^2-4a-4}\times y^9+\overline{a^4b-6a^3b+a^4-a^3b-2a^3+11a^2b-8a^2+26ab-3a+2}\times y^8$
$\overline{+6a^4b-3a^4+24a^3b-3a^3-2a^2b^2+4a^2b+4a^2-14ab+4a-11b}\times y^7$
$+a^3b^2-3a^3b+2a^3b+2a^4-2a^3b^2-21a^3b+6a^3+10a^2b-32a^2b+3a^2+2ab^2+3ab-2a+5b\times y^6$
$+a^3b^2-3a^3b-3a^4b^2+16a^4b^2-8a^4b+2a^3b^2-2a^3b^2-a^3b-4a^3+26a^2b-3a^2-20ab^2+14ab-a\times y^5$
$\overline{+a^6b^2-a^5b^2-3a^5b^2+12a^5b-5a^4b^2-31a^4b^2+8a^3b-2a^3b^2+2a^3b+2a^2-11ab+9b^2}\times y^4$
$\overline{-2a^5b^2-6a^5b^2-a^4b^2+2a^3b^2+a^3b^2-13a^3b+13a^2b^2+30a^2b^2-2a^2b+ab}\times y^3$
$\overline{+a^5b^4+8a^4b^2+13a^4b^2+2a^3b^2-a^2b^3+a^2b^2+4a^2b-6ab^3+12ab^2}\times y^2$
$\overline{-2a^3b^4-10a^3b^3-12a^3b^2-a^2b^2}\times y+a^2b^4+4a^2b^3+4a^2b^2=0$

Egualmente si opererà per giungere all' equazione data per x, o per z.

Se in tutti tre i diversi ordini, o disposizioni, che si possono dare alle tre equazioni ( Δ ), tali saranno i valori di n, n', n'', così che nella formola $m''=\frac{n+n'-n''+t+t'-t''-2-\beta}{2}$ fatte le debite sostituzioni di questi valori di n, n', n'', e dei valori di t, t', t'', si possa dare a β un tal valore, che salvi le quattro necessarie condizioni, in tal caso per avere le due equazioni ( Σ, Φ ) si dovranno prescegliere quei due valori di m'', che nascono dal sostituirsi in luogo di β i mi-

ni-

nimi numeri. Se mediante una ſola diſpoſizione delle equazioni (Δ) riſulterà per $m''$ un valore, che ſoddisfi alle ricercate condizioni, ſi dovrà fare una ſola volta la eliminazione colla comparazione di tutte le equazioni inſieme, e la ſeconda volta ſi dovrà fare colla comparazione a due a due. Se poi in niuna delle tre diverſe diſpoſizioni ſi avrà per $m''$ un valore richieſto dalle quattro condizioni, la eliminazione ſi farà col paragonare le equazioni a due a due.

Brevemente dirò ancora come ſi debba operare ſu quattro equazioni a quattro incognite, delle quali tre ſi debbano eliminare, mentre ciò baſterà per prender norma pel modo di regolarſi ſu cinque, ſei ec. equazioni a cinque, ſei ec. incognite. Siano pertanto le quattro ſeguenti equazioni

$$(\Omega)\quad \begin{array}{l} A\,x^{n} + B\,x^{n-1} + C\,x^{n-2} + D\,x^{n-3} \ldots + V = 0 \\ A'x^{n'} + B'x^{n'-1} + C'x^{n'-2} + D'x^{n'-3} \ldots + V' = 0 \\ A''x^{n''} + B''x^{n''-1} + C''x^{n''-2} + D''x^{n''-3} \ldots + V'' = 0 \\ A'''x^{n'''} + B'''x^{n'''-1} + C'''x^{n'''-2} + D'''x^{n'''-3} \ldots + V''' = 0 \end{array}$$

Le dimenſioni di A, A', A'', A''' ſiano eſpreſſe da $t$, $t'$, $t''$, $t'''$, e ſiano $m$, $m'$, $m''$, $m'''$ gli eſponenti maggiori de' maſſimi polinomj indeterminati, co' quali devonſi (giuſta il metodo ſolito) moltiplicare le equazioni. Ragionando, come ſi è fatto di ſopra, ſi troverà $n+m=n'+m'$, ed $n+m+1=m+t+m'+t+m''+t+m'''+t$, donde ſi ricava $m=n'-m''-m'''-3$. Ed ecco, che qualora ſi abbia il valore di $m''$, $m'''$, reſta determinato il valore di $m$, e conſeguentemente di $m'$. Le formole, che danno i valori di $m''$, e di $m'''$ ſono $m''=\frac{n+n'-2n''+n'''+t+t'-2t''+t'''-3}{3}$, ed $m'''=\frac{n+n'+n''-2n'''+t+t'+t''-2t'''-3}{3}$. Ma poichè queſti valori di $m''$, $m'''$ devono eſſere tali, che ſiano numeri interi, e poſitivi, che $n+m>$, o $=n''+m''$, ed $n+m>$, o $=n'''+m'''$, però a fine di ſalvare queſte condizioni, s' introducano (come ſi è fatto di ſopra) nelle dette due formole le quantità indeterminate, $\beta$, $\delta$, così $m''=\frac{n+n'-2n''+n'''+t+t'-2t''+t'''-3-\beta}{3}$, $m'''=\frac{n+n'+n''-2n'''+t+t'+t''-2t'''-3-\delta}{3}$, poſcia in luogo delle ſteſſe $\beta$, $\delta$ ſi ſoſtituiſcano i numeri minori, che ſoddisfar poſſano alle dette condizioni. Si varj l'ordine delle equazioni $(\Omega)$, e fra i ſei diverſi modi co' quali ſi poſſono diſporre, ſi ſcielgano quei tre, che danno per $m''$, $m'''$ i valori corriſpondenti alle neceſſarie condizioni, e nel tempo ſteſſo i numeri ſoſtituiti in luogo di $\beta$, $\delta$ ſiano i minimi. Ciò ottenuto, dalle quattro equazioni $(\Omega)$ ſe ne deducano tre, che avranno tre ſole incognite: Da queſte tre equazioni, ſe ne ricavino due, come ſi è fatto poc'anzi, che contengano due incognite; e finalmente da queſte due ſi paſſi all'equazione avente una ſola incognita. Le operazioni da farſi ſono ſempre le ſteſſe: Soltanto il maſſimo grado de' fattori viene preſcritto dai valori di $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, che già ſi ſono trovati. Collo ſteſſo metodo ſi regoli ſopra un numero $p$ di equazioni aventi un numero $p$ d'incognite, delle quali $p-1$ ſi debbano eliminare. Già le formole, che dovranno dare $m''$, $m'''$, $m''''$ ec. chiaramente ſi deducono dalle coſe dette.

## ARTICOLO VI.

*Della risoluzione delle equazioni di terzo grado.*

571. LE equazioni del terzo grado si dividono in pure, e affette. Le pure sono quelle, che contengono il cubo dell'incognita, e il termine affatto cognito. Le affette sono quelle, che contengono tutti i termini convenienti al suo grado, o pure mancano soltanto del secondo termine.

572. Le equazioni pure del terzo grado cadono sotto a questa formola generale $x^3 \pm q = 0$, in cui la lettera $q$ rappresenta qualunque quantità positiva, o negativa, a tenore di che si ha

I. $x^3 + q = 0$
II. $x^3 - q = 0$

573. Di questa forma è l'equazione $x^3-1=0$, che contiene le tre radici cubiche dell'unità: Per ritrovarle faccio primieramente $x^3=1$, poscia da un membro, e dall'altro estraggo la radice cuba, con che ho $x = \sqrt[3]{1}$ cioè $x = 1$. Ma quì insorge una difficoltà ed è, che una equazione di terzo grado deve avere (pel num. 461.) tre radici, ed ora risolvendola non se n'è trovata, che una. Quantunque mediante l'estrazione della radice cuba si sia ritrovata la sola radice 1 dell'equazione, non è per questo, che ella non inchiuda ancora le altre due. Di fatto si divida l'equazione data $x^3-1=0$ per la radice trovata $x-1$, come segue, e si avrà di quoziente $x^2+x+1=0$

| Divisore | Dividendo | |
|---|---|---|
| $x-1$ \| | $x^3-1=0$ | |
| | $x^3-x^2$ | |
| Primo residuo | $+x^2-1$ | Quoz: $x^2+x+1=0$ |
| | $x^2-x$ | |
| Secondo residuo | $+x-1$ | |
| | $+x-1$ | |
| Ultimo residuo | 0 0 | |

Si risolva questa equazione di secondo grado $x^2+x+1=0$, che è venuta di quoziente, e le di lei due radici saranno le altre due radici dell'equazione $x^3-1=0$. Le radici poi dell'equazione $x^2+x+1=0$ trovansi essere $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1+\frac{1}{4}}$, cioè $-\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Quindi le tre radici dell'equazione $x^3-1=0$ sono $1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

574.

574. Quì poi ſi oſſervi, che le radici tanto reali, come immaginarie dell'unità hanno queſta proprietà, che ſe di ciaſcuna di loro ſi formerà qualunque poteſtà più piaccia, tale poteſtà ſarà uguale ad una delle ſteſſe radici. Quanto alle poteſtà della radice 1 non v'è biſogno di prova, poichè l'unità è inſieme qualunque potenza, e radice. Quanto alle altre radici, baſterà formarne le loro poteſtà per rimanerne convinti. Di fatto ſi ha $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=1$; $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ec. Parimente $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3=1$; $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^4=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ec.

575. Eſſendoſi ritrovate le tre radici cube dell'unità, paſſiamo alla riſoluzione della formola generale $x^3\pm q=0$ per le equazioni pure, la quale ſarà $x=\mp\sqrt[3]{q}$. Ora per ritrovare le altre due radici, ſi divida l'equazione $x^3\pm q=0$ per la ritrovata radice $x\pm\sqrt[3]{q}$, e ne verrà di quoziente $x^2\mp x\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}=0$, che riſoluta col metodo delle quadratiche affette laſcia per radici $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{q}\pm\sqrt{-\sqrt[3]{q^2}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{q^2}}$, cioè $\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{q}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3\sqrt[3]{q^2}}$, o ſia $\pm\frac{\sqrt[3]{q}\pm\sqrt{-3}\times\sqrt[3]{q}}{2}$, e però $\sqrt[3]{q}\,\frac{\times\pm1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

576. Le tre radici cube adunque della equazione $x^3\pm q=0$ ſono $\mp\sqrt[3]{q}$; $\sqrt[3]{q}\,\frac{\times\pm1+\sqrt{-3}}{2}$; $\sqrt[3]{q}\,\frac{\times\pm1-\sqrt{-3}}{2}$. Conſeguentemente le equazioni cubiche pure hanno una radice reale, e l'altre due immaginarie.

577. Ma conſideriamo un poco queſte tre ritrovate radici generali dell'equazione ecumenica $x^3\pm q=0$, e vedremo, che eſſe riſultano dalla radice cubica di $q$ moltiplicata nelle tre radici cubiche dell'unità: Che però per avere le tre radici di una equazione cubica pura, baſterà prendere la di lei radice cubica, e moltiplicarla nelle tre radici cubiche dell'unità.

578. Per quanto ſpetta le equazioni affette di terzo grado, ne prenderò la formola generale mancante del ſecondo termine, giacchè ſi può egli da qualſivoglia equazione faciliſſimamente levare giuſta il num. 496., che è la ſeguente $x^3*\pm px\pm q=0$, la quale riſpetto ai ſegni ſi riſolverà in queſte quattro, in cui le lettere $p$, $q$ eſprimeranno qualſivoglia quantità.

I $x^{3*} + px + q = 0$
II $x^{3*} + px - q = 0$
III $x^{3*} - px + q = 0$
IV $x^{3*} - px - q = 0$

579. Le equazioni, che si riferiscono alle due prime formole, in cui dopo il secondo termine mancante viene il terzo affetto dal segno +, hanno sempre due radici immaginarie, come si è dimostrato al num. 502. Le equazioni, che si riferiscono alle altre due formole possono avere o tutte le radici reali, o una reale, e due immaginarie.

580. Siccome (pel num. 472.) le equazioni di terzo grado hanno per lo meno una radice reale, e l'altre due, anche essendo immaginarie devono dare un prodotto reale, altrimenti l'equazione di terzo grado non potrebbe essere immune dai radicali, come si suppone; però qualunque equazione di terzo grado risulterà da due fattori reali, uno del primo, e l'altro del secondo grado, poichè il fattore di secondo grado allora avrà radici immaginarie, quando il di lui ultimo termine è positivo (pel num. 396.), però se nell'equazione di terzo grado l'ultimo termine sarà negativo, ella avrà per lo meno una radice reale, e positiva.

581. Prima di venire alla risoluzione di queste equazioni non sarà male a proposito di determinare la forma, che possono avere le loro radici reali irrazionali in supposizione, che tali equazioni siano immuni da radicali: Siccome poi quelle quantità solamente possono essere radici di una equazione, che sostituite nella medesima in luogo dell'incognita la fanno verificare; quindi è, che basta osservare sotto qual forma cadano le quantità irrazionali, che sostituite nella equazione generale $x^{3*}+px+q=0$ possono farla verificare, per venire in chiaro della forma, che possono avere le radici di queste equazioni. Se pertanto in questa equazione $x^{3*}+px+q=0$ si porrà, o $x=\sqrt{a}$; o $x=\sqrt[3]{a}$; o $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$; o $x=\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$; o $x=a+\sqrt[3]{b}$; o $x=a+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ec. non potrà ella mai verificarsi in quanto che non si potranno distruggere vicendevolmente i radicali; conseguentemente sotto a niuna di queste forme potranno cadere le radici della proposta equazione. Ma se si porrà $x=a+\sqrt{b}$, fatta la sostituzione nell'equazione generale, si avrà $a^3+3ab+\overline{3a^2+b+p}\times\sqrt{b}+ap+q=0$, la quale si verificherà, qualora sia $p=-3a^2-b$, e $q=-a^3-3ab-ap$, nel qual caso tutti i termini vanno a zero. Perchè poi col sostituirsi nell'equazione $x^{3*}+px+q=0$ questi valori di $p$, $q$, ne viene l'equazione $x^{3*}-\overline{3a^2-b}\times x+2a^3-2ab=0$, la quale è divisibile per $x+2a$, dalla cui divisione si ha di quoziente $x^2-2ax+a^2-b=0$, perciò una equazione di terzo grado non può avere per radice una quantità della forma $a+\sqrt{b}$, se non ha un'altra radice razionale $=-2a$. Parimente l'equazione $x^{3*}+px+q=0$ si verificherà col porre $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, mentre mediante questa sostituzione l'equazione proposta si cambia in $a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b+p\sqrt[3]{a}+p\sqrt[3]{b}+q=0$. in cui tutti i termini anderanno a zero, qualora sia $q=-a-b$, e

$p \times \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} = -3\sqrt[3]{a^2 b} - 3\sqrt[3]{ab^2}$, cioè $p \times \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \times -3\sqrt[3]{ab}$, conseguentemente $p = \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \times -3\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = -3\sqrt[3]{ab}$. E poichè $p$ è una quantità razionale, dovrà ancora $-3\sqrt[3]{ab}$, cui egli è uguale, essere una quantità razionale, e però la radice potrà avere questa forma $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, ogni qual volta il prodotto $ab$ sia un cubo perfetto, e la somma di $a$, $b$ sia un numero razionale, poichè deve essere $q = -a-b$, e $q$ è razionale.

582. Le radici adunque irrazionali delle equazioni di terzo grado non possono avere, che una di queste due forme $x = a+\sqrt{b}$, $x = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, lo che però devesi intendere, quando l' equazione di terzo grado non ammetta fra' suoi termini quantità irrazionali, mentre se fra i termini dell'equazione vi saranno degli irrazionali, le di lei radici irrazionali potranno avere altre forme. Generalmente poi le radici irrazionali non potranno mai essere di un grado maggiore del grado dell'equazione, poichè la loro sostituzione nell'equazione proposta non potrebbe mai farla in veruna supposizione verificare, ma sempre vi rimarrebbero delle quantità radicali, che non potrebbero sparire.

583. Non solo poi la radice della forma $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ fa verificare l'equazione generale di terzo grado, ma la fa verificare eziandio quand'anco uno di questi radicali sia moltiplicato per $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, e l'altro per $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ così $\sqrt[3]{a} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{b} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; e poichè qualunque quantità, che fa verificare una equazione è radice di tale equazione (pel num. 318.), e una equazione di terzo grado non può avere più di tre radici, però le tre radici dell'equazione saranno, la prima $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, la seconda $\sqrt[3]{a} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{b} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, la terza $\sqrt[3]{a} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{b} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Che poi queste radici facciano verificare l'equazione, basta farne la sostituzione per restarne convinti. Si sostituisca pertanto una di queste ri-

di-

dici, per Esempio là seconda nell'equazione generale $x^3 * + px + q = 0$, e si avrà $a + \sqrt[3]{a} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{b} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 3\sqrt[3]{ab} + b + \overline{p} \times \sqrt[3]{a} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \overline{p} \times \sqrt[3]{b} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + q = 0$, la quale equazione si verificherà, qualora sia $p = -3\sqrt[3]{ab}$, e $q = -a - b$, come sopra al num. 581.

584. Ho osservato al num. 579., che le equazioni, le quali si riferiscono alla prima, e seconda formola generale hanno sempre due radici immaginarie, ma le equazioni, che si riferiscono alla terza, e quarta formola possono avere tutte le radici reali, ma ne possono avere ancora una reale, e due immaginarie. Per determinare i casi, in cui queste equazioni hanno, o tutte le radici reali, o una reale, e due immaginarie, bisogna osservare, che l'equazione di terzo grado risultando (giusta il num. 580.) da due fattori, uno del primo, e l'altro del secondo grado, ella avrà sempre due radici immaginarie, quando tali le abbia il fattore di secondo grado, e all'opposto le avrà tutte reali, quando il fattore di sedondo grado abbia le sue due radici reali. Il fattore pertanto di secondo grado sia di questa forma $x^2 \pm 2ax + a^2 + c = 0$, il fattore di primo grado dovrà essere $x \mp 2a$, acciocchè dal loro prodotto risulti una equazione di terzo grado mancante del secondo termine. Ora acciò siano reali le radici di questa equazione di secondo grado, il termine $c$ (giusta il num. 396.) deve essere affetto dal segno $-$, così $x^2 \pm 2ax + a^2 - c = 0$, ma se sarà affetto dal segno $+$, così $x^2 \pm 2ax + a^2 + c = 0$, le radici saranno immaginarie. Ciò posto si faccia il prodotto di questi due fattori, e si avrà, come segue

| | |
|---|---|
| Fattore di secondo grado | $x^2 \pm 2ax + a^2 + c = 0$ |
| Fattore di primo grado | $x \mp 2a$ |
| | $x^3 \pm 2ax^2 + a^2x + cx$ |
| | $\mp 2ax^2 - 4a^2x \mp 2a^3 \mp 2ac = 0$ |
| Prodotto | $x^3 * + \overline{c - 3a^2} \times x \mp 2a^3 \mp 2ac = 0$ |

di cui si paragonino i coefficienti coi coefficienti dell'equazione generale $x^3 * - px - q = 0$, così $c - 3a^2 = -p$, $2a^3 + 2ac = q$. Mediante queste due equazioni si elimini la quantità $a$, lo che ottengo mediante la formola generale data al num. 568. per due equazioni, una del secondo, e l'altra del terzo grado, nella quale sostituendosi i valori di $A = 2$, $C = 2c$, $D = -q$, $A' = 3$, $C' = -c - p$, onde la formola si riduce ad $\overline{A'AD} \times \overline{A'AD} + \overline{A'AC - AAC'} \times \overline{A'CC' - ACC'} = 0$. Fatte adunque le sostituzioni si ha $\overline{-9q} \times \overline{-9q} + \overline{18c + 6c + 6p} \times \overline{-6c^2 - 6cp - 2c^2 - 4cp - 2p^2} = 0$, cioè $\overline{-9q} \times \overline{-9q} + \overline{24c + 6p} \times \overline{-8c^2 - 10cp - 2p^2}$, e però fatte le debite molti-

tiplicazioni ne viene $81q^2-192c^1-288c^2p-108cp^2-12p^3=0$, che divisa per 3 è $27q^2-64c^3-96c^2p-36cp^2-4p^3=0$, conseguentemente $27q^2-4p^3=64c^3+96c^2p+36cp^2$. Ora in questa equazione, per essere di terzo grado, la quantità $c$ spettante all' assunta equazione di secondo grado avrà un valore reale (pel num. 472.); che però basta esaminare il caso, nel quale questo valore di $c$ è positivo, e il caso, in cui egli è negativo, per determinare nel tempo stesso il caso, in cui l'assunta equazione di secondo grado, e conseguentemente l'equazione del terzo grado ha due radici immaginarie, e il caso, in cui l'una, e l'altra ha tutte le radici reali. Tre casi poi in questa equazione devonsi distinguere. Il primo quando è $27q^2 > 4p^3$, o sia $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, cioè quando il quadrato della metà dell' ultimo termine della proposta equazione è maggiore del cubo della terza parte del coefficiente del terzo termine. Il secondo quando è $27q^2 < 4p^3$, o sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, cioè quando il quadrato della metà dell'ultimo termine è minore del cubo della terza parte del coefficiente del terzo termine. Il terzo quando è $27q^2 = 4p^3$, o sia $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, cioè il quadrato della metà dell'ultimo termine è uguale al cubo della terza parte del coefficiente del terzo termine. Quanto al primo caso, in cui è $27q^2 > 4p^3$, sarà $27q^2-4p^3$ quantità positiva, e però quantità positiva sarà pure $64c^3+96c^2p+36cp^2$, quindi il valore di $c$ è positivo; ma quando il valore di $c$ è positivo, l'equazione di secondo grado ha due radici immaginarie; dunque quando nella data equazione di terzo grado sarà $27q^2 > 4p^3$, ella avrà due radici immaginarie. Quanto al secondo caso, in cui è $27q^2 < 4p^3$, sarà $27q^2-4p^3$ quantità negativa, e quindi quantità negativa sarà pure $64c^3+96c^2p+36cp^2$, conseguentemente sarà negativo il valore di $c$, perlochè l'assunta equazione di secondo grado avrà le sue radici reali, e tali ancora saranno le radici dell' equazione di terzo grado, in cui perciò si avrà $27q^2 < 4p^3$. Quanto al terzo caso essendo $27q^2=4p^3$, sarà $64c^3+96c^2p+36cp^2=0$, in cui un valore di $c$ è uguale a zero (pel num. 487.): Se pertanto questo valore di $c=0$ si sostituirà nell' equazione $c-3a^2=-p$, cioè $a=\pm\sqrt{\frac{c+p}{3}}$, nata dal paragone dei coefficienti dei terzi termini, si avrà $a=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}$, il qual valore sostituito in ciascuno dei due fattori, renderà il primo $x^2 \pm 2x\sqrt{\frac{p}{3}}+\frac{p}{3}=0$, e il secondo $x \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}$. Ma le radici del primo fattore sono $x=\mp\sqrt{\frac{p}{3}}$, e la radice del secondo è $x=\pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}$. Dunque nel caso che sia $27q^2=4p^3$, l'equazione di terzo grado non solo avrà le sue tre radici reali, ma di queste tre radici due saran-

no uguali, e la terza uguaglierà la loro somma, e sarà affetta da segno contrario, cioè le radici saranno $x=+1\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x=+1\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x=-2\,1\sqrt{\frac{p}{3}}$, o pure $=-1\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x=-1\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x=+2\,1\sqrt{\frac{p}{3}}$.

585. Veniamo adesso alle formole ecumeniche, che danno le radici delle equazioni di terzo grado, e alle quali perciò si giunge mediante la loro risoluzione. Data l'equazione $x^3+px+q=0$, immune dal secondo termine, e tali le considereremo in avvenire, si supponga che una delle sue radici sia $x=m+n$, quale si inalzi al cubo, e si avrà $x^3=m^3+\overline{3mn}\times\overline{m+n}+n^3$, e in vece di $m+n$ si scriva $x$, cui è uguale, onde si avrà $x^3=m^3+3mnx+n^3$, e però $x^3-3mnx-m^3-n^3=0$, di cui una radice è $x=m+n$. Si paragonino i coefficienti di questa equazione coi coefficienti della proposta equazion generale, e si avrà $p=-3mn$, e $q=-m^3-n^3$: Dalla prima si prenda il valore di $n$, che è $+n=-\frac{p}{3m}$, e però $n^3=-\frac{p^3}{27m^3}$, che sostituito nella seconda equazione dà $q=-m^3+\frac{p^3}{27m^3}$, cioè $27m^3q=-27m^6+p^3$, e però $m^6+m^3q=+\frac{p^3}{27}$, la quale se si risolva giusta il num. 411, darà $m^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, e però $m=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, ed ecco ritrovato il valore di una parte della radice. Per avere il valore dell'altra parte della radice, cioè di $n$, si prenda l'equazione $q=-m^3-n^3$, o sia $n^3=-q-m^3$, e in luogo di $m^3$ si sostituisca il suo ritrovato valore $-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, con che si avrà $n^3=-q+\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, cioè $n^3=-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, e però $n=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, che è l'altra parte della radice, e che non differisce dalla prima, se non nel segno prefisso alla quantità radicale. Le tre radici pertanto dell'equazione saranno

I.

I. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$;

II. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

III. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Dopo essersi ritrovata l'equazione $x^3-3mnx-m^3-n^3=0$ si sono paragonati i coefficienti dei di lei termini coi rispettivi coefficienti dell'equazione $x^3+px+q=0$, e ben con ragione, imperocchè queste due equazioni avendo per ipotesi le stesse radici, o sia essendo identiche, ben si vede, che i loro corrispondenti coefficienti devono essere uguali, mentre (pel num. 477.) il coefficiente del secondo termine risultando dalla somma delle radici, il coefficiente del terzo dalla somma degli ambi ec., avendo tanto una, come l'altra le stesse radici, i coefficienti di una devono necessariamente essere uguali ai coefficienti dell'altra, avvegnachè risultanti dalle stesse quantità. Non sarà necessario ogni volta, che si vorrà risolvere un'equazione cubica, di rinovare le operazioni pur ora praticate. Per evitare questo imbarazzo basta osservare in primo luogo, che le due parti della ritrovata radice non differiscono in altro, che nel segno prefisso al vincolo quadrato, che in una è +, nell'altra è —: In secondo luogo che la quantità $\frac{1}{2}q$, che immediatamente cade sotto il vincolo cubo, non è altro, che la metà dell'ultimo termine dell'equazione presa col segno contrario, cioè positiva se l'ultimo termine è negativo, e negativa se egli è positivo: Sotto al vincolo quadrato poi ritrovasi il cubo della terza parte del coefficiente del terzo termine dell'equazione, che nel presente caso, in cui si considerano le equazioni prive del secondo termine, diventa il secondo, quale cubo deve essere affetto dallo stesso segno del detto coefficiente, più il quadrato della metà dell'ultimo termine.

586. Quantunque considerando la formola $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, che chiamasi Cardanica dal suo inventore Girolamo Cardano, sembri ella avere un sol valore, pure stante la combinazione dei segni ne

può avere nove diversi. Di fatto facendosi $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=A$, si avrà $m^3=A$, ed $m^3-A=0$, o sia $m^3-1\times A=0$, per lo che $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ avrà, come abbiamo veduto tre diversi valori, de' quali il primo è $1\times A$, il secondo è $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times A$, il terzo è $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times A$. E parimente dicendosi $-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=B$, la formola $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ avrà tre diversi valori de'quali il primo è $1\times B$, il secondo è $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times B$, il terzo è $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times B$. Combinandosi poi ciascuno di questi tre valori con ciascuno degli altri tre, ne risultano nove diversi valori. Ma di questi nove valori tre soli appartengono alla presente questione, e danno le tre radici dell'equazione, che sono, come poc'anzi si è detto, $m+n$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times m+n\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times m+n\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, avvegna che stante l'equazione $p=3mn$, il prodotto delle due parti $m$, $n$ della radice debba essere $=\frac{1}{3}p$; cioè a dire sempre lo stesso, per lo che presi i due valori $m$, $n$, che hanno la forma reale, degli altri quelli solamente si devono insieme congiungere, che moltiplicati fra loro danno un valore $=\frac{1}{3}p$: Ma siccome delle tre radici 1; $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ allora soltanto, si ha lo stesso prodotto uguale ad 1, quando si moltiplica o 1 per 1, o $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ per $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, o $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ per $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, perciò dei diversi modi, co'quali i detti due valori possono combinarsi, vagliono i soli tre dati al num. 585.

587. Ho detto al num. 584., che quando è $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, l'equazione di terzo grado ha tutte tre le radici reali ineguali, e queste possono essere tutte tre razionali, e tali sono le radici dell'equazione $x^3-7x+6=0$, delle quali la prima è $+1$, la seconda $+2$, la terza $-3$; o una razionale e due irrazionali, e tali sono le radici

dici dell' equazione $x^3-28x+15=0$, delle quali la prima è 5, la seconda è $-2+\sqrt{3}$, la terza è $-3-\sqrt{3}$; o tutte tre irrazionali, e tali sono le radici dell' equazione $x^3-24x+16=0$, delle quali la prima cade tra 0, ed 1, la seconda tra 4, e 5, la terza tra $-5$, e $-6$. E pure se si vorranno risolvere queste equazioni per mezzo della formola data al num. 585., la quantità radicale verrà negativa, e però la formola inchiuderà degli immaginarj, lo che succederà sempre, ogniqualvolta l' equazione da risolversi avrà questa forma $x^3*-px\pm q=0$. Di fatto risolvendosi l'equazione $x^3-7x+6=0$, fatte le debite sostituzioni nella formola generale del num. 585., si ha $\sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$. Per l' equazione $x^3-28x+15=0$ si ha $\sqrt[3]{-\frac{15}{2}+\sqrt{-\frac{81733}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{15}{2}-\sqrt{-\frac{81733}{108}}}$. Per l'equazione $x^3-24x+16=0$ si ha $\sqrt[3]{-8+\sqrt{-448}}+\sqrt[3]{-8-\sqrt{-448}}$ ognuna delle quali radici inchiude degli immaginarj, abbenchè le equazioni, dalle quali si ricavano, abbiano tutte tre le radici reali, e però esprimibili con formole algebraiche. Ora questo inconveniente, che chiamasi il caso irreduttibile, il quale ha dato tanto che fare agli Algebristi ne' passati tempi, nasce dalla maniera, con cui si risolvono queste equazioni.

588. Per dimostrare la verità di questa proposizione premetto ciò che ho osservato al num. 579, cioè che le equazioni, le quali si riferiscono a questa formola (A) $x^3+px\pm q=0$ hanno sempre due radici immaginarie, e le equazioni, che si riferiscono a questa formola (B) $x^3-px\pm q=0$ e possono avere due radici immaginarie, e possono avere tutte le radici reali; avranno due radici immaginarie se sarà $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$, ma se sarà $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$ le tre radici saranno reali, e ineguali. Sia pertanto da risolversi l'equazione $x^3-3a^2x\pm a^2c=0$, che si riferisce alla formola (B). Fatto il paragone de' coefficienti de' corrispondenti termini si ha $3a^2=p$, cioè $a=\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e $2a^2c=q$, vale a dire (fatta la sostituzione del ritrovato valore di $a$) $c=\frac{3q}{2p}$. Che se sarà $a=c$, l'equazione proposta sarà $x^3-3a^2x-2a^3=0$, le di cui radici sono $2a$, $-a$, $-a$, conseguentemente in questo caso la radice maggiore $2a$ è uguale a $\sqrt{\frac{4}{3}p}$; ma essendo $c>a$ l'equazione avrà due radici immaginarie, e la radice maggiore sarà più grande di $2a$, o sia di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$; essendo poi $c<a$, le tre radici dell'equazione saranno reali ineguali, e la radice maggiore sarà minore di $2a$, vale a dire di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$. Ora quando giusta la regola Cardanica, fattasi la suppositione

ne

ne di $x=m+n$, si istituisce il paragone $3mn=\mp p$, ne nasce $n=\mp\frac{p}{3m}$, il qual valore sostituito in luogo di $n$ nella supposizione di $x=m+n$, si avrà per le equazioni, che si riferiscono alla formola (A) $x=m-\frac{p}{3m}$; ed $x=m+\frac{p}{3m}$ per le equazioni, che si riferiscono alla formola (B). La prima espressione poi $m-\frac{p}{3m}$ può rappresentare qualunque grandezza reale, ma non già l'espressione $m+\frac{p}{3m}$, la quale non può esprimere le quantità minori di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$. Di fatto sia $x$ il valore corrispondente ad $m-\frac{p}{3m}$, da questa equazione $m-\frac{p}{3m}=x$, si ricavi il valore di $m$, e si avrà $m=\frac{x\pm\sqrt{x^2+\frac{4}{3}p}}{2}$, il qual radicale è sempre reale, qualunque sia il valore reale, che si assegna ad $x$, e però $m-\frac{p}{3m}$ può rappresentare qualunque quantità reale: Che se si farà $m+\frac{p}{3m}=x$, indi se ne deduca il valore di $m$, si avrà $m=\frac{x\pm\sqrt{x^2-\frac{4}{3}p}}{2}$, il qual radicale risultando immaginario allorchè è $x^2<\frac{4}{3}p$, o sia $x<\sqrt{\frac{4}{3}p}$, ben si vede, che il valore di $x=m+\frac{p}{3m}$ non può essere qualunque, ma egli deve essere o uguale, o maggiore di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$. Allorchè pertanto giusta la regola Cardanica si suppone $x=m+n$, vale a dire $x=m-\frac{p}{3m}$ relativamente alla formola (A), che ha sempre due radici immaginarie, questa supposizione è sempre possibile rispetto alla terza radice reale, mentre, come pur ora ho dimostrato questa espressione $x-\frac{p}{3m}$ può rappresentare qualunque quantità positiva, o negativa, e conseguentemente può rappresentare la radice reale dell'equazione, o sia questa supposizione deve portare a una formola reale, lo che pure ha da fare la supposizione di $x=m+\frac{p}{3m}$ rispetto all'equazione (B) allorchè ella ha due radici immaginarie, perchè in tal caso, come ho poc'anzi detto, la radice maggiore dell'equazione è sempre più grande di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, e l'espressione $m+\frac{p}{3m}$ può rappresenta-

re

re qualunque grandezza maggiore di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$. Ma ſiccome nel caſo, che le tre radici dell'equazione (B) ſono reali ineguali, la radice maggiore dell'equazione (poichè l'equazione manca del ſecondo termine, ella ha una radice maggiore uguale alla ſomma dell'altre due, che devono eſſere affette da ſegno contrario) eſſendo ſempre minore di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, e l'eſpreſſione $m+\frac{p}{3m}$ non potendo rappreſentare un valore minore di $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, chiaramente s'intende, che queſta eſpreſſione non può rappreſentare tale radice; onde è, che eſſendo impoſſibile l'ipoteſi di $x=m+\frac{p}{3m}$, ella perciò deve dare per la radice cercata una formola impoſſibile, o ſia immaginaria. Quando poi delle tre radici dell'equazione (B) due ſono uguali, la ſuppoſizione $m+\frac{p}{3m}$ è pure poſſibile riſpetto alla radice maggiore, poichè in queſto caſo la radice maggiore è uguale a $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, il qual valore, come ho detto, può eſſere rappreentato da $m+\frac{p}{3m}$: Quindi eſſendo poſſibile l'ipoteſi, ſarà pure poſſibile la formola radicale, che da eſſa naſce, o ſia tale formola nulla conterrà d'immaginario. Per diſcendere al caſo pratico proporrò da riſolverſi il ſeguente Problema.

## *ESEMPIO.*

589. Prob. Uno Sciabecco Turco avendo veduto in diſtanza di miglia 18 un Pinco Criſtiano, ſi mette ad inſeguirlo. La velocità dello Sciabecco ſta alla velocità del Pinco, come il a accreſciuto del viaggio fatto dal Pinco dal punto, in cui fu ſcoperto fino al punto, in cui è ſtato raggiunto, ſta a 63 diviſo pel viaggio in queſto frattempo fatto dallo Sciabecco. Cercaſi il numero delle miglia, dopo le quali lo Sciabecco raggiungerà il Pinco.

590. Riſol. Il viaggio fatto dal Pinco ſi dica $=y$, il viaggio fatto dallo Sciabecco ſarà $y+18$. La velocità dello Sciabecco ſarà $y+2$, e quella del Pinco $=\frac{63}{y+18}$. Poichè tanto lo Sciabecco, come il Pinco fanno il loro riſpettivo viaggio nello ſteſſo tempo, e lo ſpazio percorſo diviſo per la velocità è uguale al tempo, quindi ſi avrà toſto la ricercata equazione, che è $\frac{y+18}{y+2}=\frac{y}{\frac{63}{y+18}}$, cioè $\frac{y+18}{y+2}=\frac{y^2+18y}{63}$, e però $y^3+\overline{18+2}\times y^2+\overline{36-63}\times y-1134=0$, vale a dire $y^3+20y^2-27y-1134=0$. Si liberi queſta equazione dal ſecondo termine con porre $y=z-\frac{20}{3}$, mediante la quale ſoſtituzione ſi ha

$y^3$

$$\left.\begin{array}{rl} y^3 = & z^3 - 20z^2 + \frac{400}{3}z - \frac{8000}{27} \\ 20y^2 = & +20z^2 - \frac{800}{3}z + \frac{8000}{9} \\ -27y = & -27z + \frac{540}{3} \\ -1134 = & -1134 \end{array}\right\} = 0$$

cioè $z^3 * - \frac{481}{3}z - \frac{9758}{27} = 0$

591. Ora per risolvere questa equazione si prenda la formola del num. 585., che è $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$. Dal paragone della nostra equazione coll' equazione generale $x^3 + px + q = 0$ si ha $p = -\frac{481}{3}$, e $q = -\frac{9758}{27}$; che però fatta la sostituzione di questi valori nella formola della radice, essa si cambierà nelle seguenti.

$$\sqrt[3]{\frac{4879}{27} + \sqrt{-\frac{8748000}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{4879}{27} - \sqrt{-\frac{8748000}{729}}}$$

cioè $\sqrt[3]{\frac{4879 + 5400\sqrt{-3}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{4879 - 5400\sqrt{-3}}{3}}$

Le altre due radici poi si avranno giusta il num. 585., le quali saranno $x =$

$$\sqrt[3]{\frac{4879+5400\sqrt{-3}}{3}} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{\frac{4879-5400\sqrt{-3}}{3}} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

e $x = \sqrt[3]{\frac{4879+5400\sqrt{-3}}{3}} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{\frac{4879-5400\sqrt{-3}}{3}} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Ma siccome l'equazione $y^3 + 20y^2 - 27y - 1134 = 0$ si è trasformata per liberarla dal secondo termine, e la trasformazione è stata fatta con accrescere le sue radici di $\frac{20}{3}$, quindi è, che le radici ora trovate devonsi diminuire di $\frac{20}{3}$, e però la prima radice sarà $x = \frac{\sqrt[3]{4879+5400\sqrt{-3}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{4879-5400\sqrt{-3}}}{3} - \frac{20}{3}$, la seconda ec.

Ed

Ecco pertanto, che il proposto Problema avendo tre radici reali, la formola ce le esibisce sotto forma immaginaria. Ora per disimpegnare questa formola dagli immaginarj, onde avere le cercate radici, bisognerebbe risolvere in serie (lo che insegnerò più abbasso) i due di lei termini, nel qual modo vengonsi ad elidere i termini, che contengono quantità immaginarie, e vi restano i soli termini reali, che danno i valori cercati. Alle volte si può ancora ciò ottenere mediante l'estrazione della radice cuba da una parte, e dall'altra, come or ora dirò.

592. Si osservi intanto, che le radici della ritrovata equazione $y^3+20y^2-27y-1134=0$ sono 7, $-9$, $-18$, (come vedremo fra poco, e al num. 707.), delle quali la prima 7, che è l'unico valore cercato, ci fa sapere, che il Pinco dopo avete fatte 7 miglia sarà raggiunto dallo Sciabecco. Ma siccome il Calcolo nella soluzione de' Problemi, come ho detto al num. 26., dà i valori per tutti i casi, ne' quali può essere proposto il Problema, e nel presente tre cose porevansi supporre, la prima che il Pinco fuggisse lo Sciabecco, da cui fosse inseguito; la seconda, che il Pinco, e lo Sciabecco si venissero incontro; la terza che stando fermo lo Sciabecco, il Pinco venisse verso di lui; però la soluzione trovata ci esibisce i valori per ciascuna di queste supposizioni. Per la prima ci dà la radice reale positiva 7, per la seconda ci dà la negativa $-9$, e finalmente per la terza ci dà l'altra negativa $-18$.

Potrebbe accadere, che nel levare il secondo termine da un'equazione di terzo grado (e lo stesso si dica di qualunque altra equazione) si ritrovasse un'equazione trasformata mancante di tutti i termini a riserva del primo, in cui l'incognita ascende alla massima potestà. Quando ciò succede egli è segno, che la quantità, di cui si sono accresciute, o diminuite (giusta il num. 496.) le radici dell'equazione proposta a fine di avere una trasformata mancante del secondo termine, è appunto la radice reale dell'equazione data. Ciò si veda nel seguente Esempio, in cui è proposto di levare il secondo termine dall'equazione $x^3-6x^2+12x-8=0$. Per avere la trasformata mancante del secondo termine bisogna fare $x=y+\frac{6}{3}$, cioè $x=y+2$, indi procedere alle sostituzioni come segue

$$\left.\begin{array}{rl} x^3= & y^3+6y^2+12y+8 \\ -6x^2= & -6y^2-24y-24 \\ +12x= & +12y+24 \\ -8= & -8 \end{array}\right\}=0$$

Trasformata $y^3=0$

Ed ecco, che nella trasformata spariscono tutti i termini a riserva di $y^3$, le di cui radici sono $y=0$, $y=0$, $y=0$. Ciò poi fa vedere, che il 2, di cui mediante la trasformazione si sono diminuite le radici dell'equazione $x^3-6x^2+12x-8=0$, è la di lei radice, lo che è ben evidente, perchè le radici della nuova equazione trasformata non possono essere tutte uguali a zero, se non in caso, che la quantità, di cui sono state aumentate, o diminuite, come nel presente Esempio le radici dell'equazione da trasformarsi, sia loro uguale, onde mediante la contrarietà di segno le riduca a zero. Ciò poi non potrà succedere, se non in caso, che l'equazione proposta, o abbia una sola radice, o avendone più d'una, esse siano tutte uguali.

Abbiamo trovato, che la radice di una equazione cubica costa di due radicali di questa forma $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$, supponendosi $\frac{1}{2}q=a$, $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{b}$. Ora molte volte dall' uno, e dall' altro di questi radicali cubici si può estrarre la radice cuba: darò pertanto il modo di farlo; e perchè uno di questi radicali, come $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ non differisce dall'altro $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$, se non nel segno prefisso alla quantità $\sqrt{b}$, però basterà estrarre la radice da uno per avere ancora la radice dell' altro, che non gli differirà, se non nel segno prefisso alla seconda parte. Si debba adunque estrarre la radice cuba da $a+\sqrt{b}$, che si indica così $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$. Suppongo, che essa sia $x+\sqrt{y}$; si avrà perciò $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$. Si inalzi al cubo l' uno, e l'altro membro di questa equazione, e ne verrà $a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$. Si paragonino le quantità razionali alle razionali, e le irrazionali alle irrazionali, con che si otterranno le due seguenti equazioni $a=x^3+3xy$, e $\sqrt{b}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$: E siccome si hanno due indeterminate $x$, $y$ con due equazioni, però per mezzo loro si elimini una indeterminata, come $y$, e si ritrovi il valore dell'altra $x$, indi si passi a ritrovare il valore dell' altra indeterminata $y$ come segue. Dall' una, e dall'altra delle precedenti equazioni si prenda il valore di $y$, che rispetto alla prima sarà $y=\frac{a-x^3}{3x}$, rispetto alla seconda sarà $y=\frac{\sqrt{b}-3x^3\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$, e paragonando questi due valori si avrà $\frac{a-x^3}{3x}=\frac{\sqrt{b}-3x^3\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$, cioè $a\sqrt{y}-x^3\sqrt{y}=3x\sqrt{b}-9x^3\sqrt{y}$, e però $a\sqrt{y}+8x^3\sqrt{y}=3x\sqrt{b}$, conseguentemente $\sqrt{y}=\frac{3x\sqrt{b}}{a+8x^3}$, che inalzata al quadrato è $y=\frac{9bx^2}{a^2+16ax^3+64x^6}$: Ma dalla prima equazione si è avuto $y=\frac{a-x^3}{3x}$. Si paragonino pertanto questi due valori, e si avrà finalmente l'equazione senza $y$, che è $\frac{9bx^2}{a^2+16ax^3+64x^6}=\frac{a-x^3}{3x}$, cioè $27bx^3=a^3+16a^2x^3+64ax^6-a^2x^3-16ax^6-64x^9$, vale a dire $64x^9-48ax^6-15a^2x^3+27bx^3-a^3=0$. Questa equazione poi quantunque di nono grado è derivativa del terzo, al quale si ridurrà, e insieme si libererà il massimo termine dal coefficiente con supporre $x^3=\frac{1}{8}z$, lo che riduce l' equazione trovata alla seguente $\frac{1}{8}z^3-\frac{3}{4}az^2-\frac{15a^2+27b}{8}\times z-a^3=0$, cioè $z^3-6az^2-\overline{15a^2+27b}\times z-8a^3=0$. Risolvendosi questa equazione, si avrà il valore di $z$, e conseguentemente quello di $x$, che sarà $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{z}$, perchè si è supposto $x^3=\frac{1}{8}z$. Ma per facilitare questa risoluzione si osservi, che

l'in-

l'indeterminata $x$ rappresentando la prima parte della cercata radice, la quale prima parte deve essere razionale, sarà razionale il valore di $x$, e però $x^3 = \frac{1}{8}z$, cioè $8x^3 = z$ sarà pure razionale; quindi essendo razionale il valore di $x$, sarà eziandio razionale la radice cuba di $z$ a motivo della stessa equazione $8x^3 = z$, perchè non può essere razionale la radice comunque $n$ di un membro di una equazione, senza che sia parimente razionale la stessa radice dell'altro membro, altrimenti questi due membri non sarebbero uguali. Essendo poi razionale la radice cuba di $z$, che dà il valore di $2x$, questo valore si dovrà prendere da quei soli divisori dell'ultimo termine $-8a^3$, dai quali si può estrarre la radice cuba; imperocchè essendo razionale il valore di $z$, deveſi egli ritrovare tra i divisori dell'ultimo termine dell'equazione; dunque essendo razionale la radice cuba di $z$, il suo valore sarà somministrato dalla radice cuba di uno de' divisori dello stesso ultimo termine: E siccome la radice cuba dei divisori deveſi trovare tra i divisori della radice cuba dell'ultimo termine, però il divisore, che deve essere il valore di $2x$, ha da essere un divisore di $2a$, o sia $x$ un divisore di $a$: Che se tra i divisori dell'ultimo termine $8a^3$ niuno vi sarà, che si assoggetti alla detta condizione, dal proposto radicale non si potrà estrarre la radice cuba, ciò che molte volte ancora succederà, benchè tra i divisori di $8a^3$ ve ne sieno di quelli, che si assoggettano alla detta legge. Ritrovato il valore di $x$, si troverà il valore di $y$ mediante l'equazione $y = \frac{a-x^3}{3x}$ con sostituirci in luogo di $x$ il suo ritrovato valore. Supposto pertanto, che la ritrovata radice sia $x+\sqrt{y}$, la radice dell'equazione sarà $x+\sqrt{y}+x-x\sqrt{y}=2x$. Si osservi, che se il radicale, da cui deveſi estrarre la radice cuba avrà un divisore, all'assunta radice indeterminata deveſi dare eziandio il suo conveniente divisore, che deve essere la radice cuba del denominarore del radicale dato, la quale sarà sempre cognita: Per esempio dovendosi estrarre la radice cuba da $\frac{a+\sqrt{\pm b}}{c^3}$, si dovrà supporre $\sqrt[3]{\frac{a+\sqrt{\pm b}}{c^3}} = \frac{x+\sqrt{\pm y}}{c}$. Vengo all'esempio, nel quale determinerò le radici dell'equazione $y^3+20y^2-27y-1134=0$ trovata al numero 590. Dalla trasformazione di questa equazione si è avuta l'altra $z^3 - \frac{481}{3}z - \frac{9758}{27} = 0$, di cui una radice si è trovata essere

$$\sqrt[3]{\frac{4879}{27} + \sqrt{-\frac{87480000}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{4879}{27} - \sqrt{-\frac{87480000}{729}}}.$$

Poichè la radice cuba della prima parte di questa formola non differisce in altro dalla radice cuba della seconda parte, che nel segno prefisso al vincolo quadrato, però basterà estrarre la radice cuba dalla prima parte $\sqrt[3]{\frac{4879}{27} + \sqrt{-\frac{87480000}{729}}}$, o sia

$\sqrt[3]{\frac{4879+\sqrt{-87480000}}{27}}$, che fatta uguale a $\sqrt[3]{\frac{a+\sqrt{b}}{c^3}} = \frac{x+\sqrt{y}}{c}$, si ha

$a=4879$, $b=-87480000$, $c=3$. Si ommetta per ora il divisore $c=3$, che si riassumerà dopo essersi trovata la radice $x+\sqrt{y}$. Si sostituiscano nell' equazione $z^3-6az^2-15a^2+270)\times z-8a^3=0$ i valori di $a$, $b$, con che essa si cambierà nella seguente $z^3-29274z^2-271902961 5z-9291427475 12=0$. I divisori di quest' ultimo termine, da' quali si può estrarre la radice cuba sono 343, che ha 7 per radice cuba, 68921, la di cui radice cuba è 41, e 39304, che ha 34 per radice cuba. Il primo divisore 343, e il terzo 39304 sostituiti affetti dal segno + in luogo di $z$ nell' equazione non la fanno verificare, ma la fanno verificare sostituiti col segno —, il secondo divisore poi 68921 la fa verificare sostituito col segno +, dunque le tre radici di questa equazione sono $z=-343$, $z=$ 68921, $z=-39304$. Ma $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{z}$, però sarà $x=-\frac{7}{2}$, $x=\frac{41}{2}$, $x=-\frac{34}{2}$. Per avere i valori di $y$ si prenda l' equazione $y=\frac{a-x^3}{3x}$, e in luogo di $x$, ed $x^3$ si sostituisca $-\frac{7}{2}$, e il cubo di $-\frac{7}{2}$, con che si avrà $y=-\frac{1875}{4}$; poscia vi si sostituisca $\frac{41}{2}$, e il cubo di $\frac{41}{2}$, e ne verrà $y=\frac{243}{4}$, finalmente sostituendo il cubo di $-\frac{34}{2}$ in luogo di $x^3$, e $-\frac{34}{2}$ in vece di $x$, si avrà $y=-\frac{768}{4}$. Quindi mettendo nella radice assunta $\frac{x+\sqrt{y}}{c}$ questi trovati valori di $x$, $y$, e il suo divisore $c=3$, si avranno le tre seguenti radici del radicale $\sqrt[3]{\frac{4879+\sqrt{-87480000}}{27}}$ che sono $-\frac{7}{6}+\sqrt{-\frac{1875}{36}}$; $\frac{41}{6}+\sqrt{\frac{243}{36}}$; $-\frac{34}{6}+\sqrt{-\frac{768}{36}}$. Le stesse pure saranno le radici del radicale $\sqrt[3]{\frac{4879-\sqrt{-87480000}}{27}}$; se non che il segno prefisso al vincolo quadrato sarà —; e però le radici espresse da questa formola

$$\sqrt[3]{\frac{4879+\sqrt{-87480000}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{4879-\sqrt{-87480000}}{27}}$$

sono (A) $-\frac{7}{6}+\sqrt{-\frac{1875}{36}}-\frac{7}{6}-\sqrt{-\frac{1875}{36}}$; (B) $\frac{41}{6}+\sqrt{\frac{243}{36}}+\frac{41}{6}$

$-\sqrt{}$

$-\sqrt{\frac{243}{36}}$; (C) $-\frac{34}{6}+\sqrt{-\frac{768}{36}}-\frac{34}{6}-\sqrt{-\frac{768}{36}}$, cioè (A) $-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}$, (B) $\frac{82}{6}=\frac{41}{3}$; (C) $-\frac{68}{6}=-\frac{34}{3}$. Ma da ciaſcuna di queſte radici deveſi levare $\frac{20}{3}$, perchè coll'eſſerſi trasformata l'equazione $y^3+20y^2-27y-1134=0$ ſi è aumentata di $\frac{20}{3}$ ciaſcuna delle ſue radici; dunque una delle radici di queſta equazione è $-\frac{7}{3}-\frac{20}{3}=-\frac{27}{3}=-9$, la ſeconda è $\frac{41}{3}-\frac{20}{3}=\frac{21}{3}=7$; e la terza è $-\frac{34}{3}-\frac{20}{3}=-\frac{54}{3}=-18$, che ſi dovevano trovare.

## ARTICOLO VII.

### *Della riſoluzione delle equazioni di quarto grado.*

593. PEr procedere ordinatamente comincierò dalla riſoluzione delle equazioni di quarto grado pure, delle quali la formola generale è $x^4 \pm p = 0$. La riſoluzione di queſte equazioni ſi ottiene mediante la replicata eſtrazione della radice quadrata. Debbaſi riſolvere l'equazione $x^4 \pm 1 = 0$, cioè $x^4 = \mp 1$. Si eſtragga la radice quadrata dall'uno, e dall'altro membro dell' equazione, e ſi avrà $x^2 = \pm\sqrt{\mp 1}$, da cui levando di nuovo la radice quadrata, ne verrà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\mp 1}}$, che ſono le quattro radici dell' equazione propoſta, cioè $x = \sqrt{+\sqrt{+1}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{+1}}$, $x = \sqrt{-\sqrt{+1}}$, $x = -\sqrt{-\sqrt{+1}}$. Se pertanto l' equazione data ſarà $x^4+1=0$, le di lei radici ſaranno tutte quattro immaginarie cioè $x = \sqrt{+\sqrt{-1}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{-1}}$, $x = \sqrt{-\sqrt{-1}}$, $x = -\sqrt{-\sqrt{-1}}$. Se poi l' equazione data ſarà $x^4-1=0$, ella avrà due radici reali, cioè $+1, -1$ e due immaginarie, che ſono $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.

594. Nè punto diverſa è la riſoluzione dell' equazione $x^4 \pm p = 0$. Primieramente vi ſi eſtragga la radice quadrata, e ſi avrà $x^2 = \pm\sqrt{\mp p}$; da cui levando pure la radice quadrata, ne verrà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\mp p}}$, in cui la diverſa combinazione de' ſegni dà le quattro radici dell' equazione data $x^4 \pm p = 0$, la quale avrà tutte le radici immaginarie, qualora abbia luogo il ſegno ſuperiore $+$, e ſe varrà il ſegno inferiore $-$, due ſaranno reali, una poſitiva, e l'altra negativa, cioè $x = +\sqrt{+\sqrt{p}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{p}}$, e le altre due immaginarie.

595. Quanto alle equazioni di quarto grado di queſta forma $x^4 \pm p x^2 \pm q = 0$, che chiamanſi immuni da affezione cubica, già ne ho dato la riſoluzione al num. 411. Per iſcuoprire immediatamente la natura delle radici di queſta equazione $x^4 + p x^2 + q = 0$, ſi faccia $x^2 = z$, e fatte le debite ſoſtituzioni, l'equazione data ſi cambie-

bierà in quest' altra $z^2+pz+q=o$, le di cui radici determineranno la natura di quelle della proposta; imperocchè se ella avrà due radici reali, e positive, le quattro radici dell' equazione $x^4+px^2+q=o$ saranno parimente reali, ma due positive, e due negative: Se poi essendo reali le due radici dell' equazione $z^2+pz+q=o$, una sarà positiva, e l'altra negativa, delle quattro radici dell' equazione $x^4+px^2+q=o$ due saranno immaginarie, e due reali, una positiva, e l'altra negativa. Finalmente se le due radici dell' equazione $z^2+pz+q=o$ saranno, o negative, o immaginarie, tutte quattro le radici dell' equazione $x^4+px^2+q=o$ saranno immaginarie.

596. Veniamo adesso alle equazioni di quarto grado affette mancanti del secondo termine, giacchè (pel num. 496.) tali si possono sempre rendere, qualora non lo siano, delle quali la formola generale è $x^{4*}\pm px^2\pm qx\pm r=o$ in cui le lettere $p$, $q$, $r$ esprimono qualsivoglia quantità positiva, o negativa. Riguardo poi ai segni ne nascono le seguenti otto formole

| | |
|---|---|
| I | $x^4+px^2+qx+r=o$ |
| II | $x^4+px^2+qx-r=o$ |
| III | $x^4+px^2-qx-r=o$ |
| IV | $x^4-px^2-qx-r=o$ |
| V | $x^4-px^2+qx+r=o$ |
| VI | $x^4-px^2-qx+r=o$ |
| VII | $x^4-px^2+qx-r=o$ |
| VIII | $x^4+px^2-qx+r=o$ |

597. Di queste formole la prima, la seconda, la terza, e l'ottava contengono due radici immaginarie giusta il num. 502, e però tutte le equazioni, che a loro si riferiranno avranno per lo meno due radici immaginarie.

598. Tutte le equazioni affette corrispondenti a qualcuna delle precedenti formole contengono affezione cubica; mentre la loro risoluzione dipende da una equazione di terzo grado, come fra poco vedremo. Esse poi caderanno nel caso irreduttibile ogniqualvolta hanno tutte le radici reali; poichè da loro derivano equazioni cubiche, che hanno parimente tutte le radici reali.

599. Osserviamo frattanto che forma possano avere le radici reali irrazionali di queste equazioni immuni da' radicali. Primieramente la loro forma non può essere questa $\sqrt{m}$, poichè col farsi $\sqrt{m}=x$, se si sostituirà questo valore nell' equazione $x^4+px^2+qx+r=o$, si avrà $m^2+pm+q\sqrt{m}+r=o$, in cui il termine $q\sqrt{m}$ non potendo essere distrutto da alcun altro, perchè una quantità radicale può essere solamente distrutta da un' altra radicale uguale, e affetta da segno contrario: non potendosi adunque verificare l' equazione, le di lei radici non possono avere questa forma $\sqrt{m}$. Per la stessa ragione le di lei radici non possono avere questa altra forma, $\sqrt[3]{m}$ nè $\sqrt[4]{m}$. Se si prenderà la radice della forma $\sqrt{n\pm\sqrt{m}}$, quale si sostituisca nella formola generale $x^4+px^2+qx+r=o$, si avrà $n^2+2n\sqrt{m}+m+pn+p\sqrt{m}+q\sqrt{n+\sqrt{m}}+r=o$, la quale equazione non può verificarsi, se non manca il termine $qx$, onde l'equazione abbia la forma seguente $x^4+px^2+r=o$,

la

la quale appunto ha le radici della forma $\sqrt{n \pm \sqrt{m}}$, come si è veduto al num. 411, ove si è data la soluzione di queste equazioni, nel qual caso l'equazione risulta $n^2 + 2n\sqrt{m} + m + pn + p\sqrt{m} + r = 0$, per lo che deve essere $n = -\frac{1}{2}p$, che nasce da $2n\sqrt{m} = -p\sqrt{m}$, ed $m = \frac{1}{4}p^2 - r$, che nasce da $n^2 + m + pn + r = 0$, in cui si è sostituito in luogo di $n$ il suo ritrovato valore $-\frac{1}{2}p$, i quali valori di $m$, $n$ sostituiti nella proposta radice $\sqrt{n+\sqrt{m}}$ danno $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - r}}$, lo che dà la risoluzione di queste equazioni, come si era ritrovata al num. 411. Parimente la radice non può avere questa forma $\sqrt{n+\sqrt{m}}$, o pure $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{t}}}$ ec., nè meno $\sqrt{n+\sqrt[3]{m}}$, nè $\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{n}}$. Ella può bensì essere $n+\sqrt{m}$, il qual valore sostituito in luogo di $x$ nell'equazione $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ dà $n^4 + 4n^3\sqrt{m} + 6n^2m + 4mn\sqrt{m} + m^2 + pn^2 + 2pn\sqrt{m} + pm + qn + q\sqrt{m} + r = 0$, in cui deve essere $4n^3 + 4mn + 2pn + q = 0$, ed $n^4 + 6n^2m + m^2 + pn^2 + pm + qn + r = 0$.

600. Le equazioni di quarto grado possono risultare, o da quattro fattori di primo grado, o da due fattori di secondo grado, o da due fattori uno del primo, e l'altro del terzo grado. Le loro radici possono essere o tutte quattro reali, o tutte quattro immaginarie, o due reali, e due immaginarie (pel num 484.) Il modo di determinare se una data equazione di quarto grado inchiude radici immaginarie, e quale è il loro numero, si ripeta dal num. 512.

601. Prima di venire alla risoluzione delle equazioni di quarto grado $m'$ è d'uopo premettere il seguente

602. Lemma. In qualsivoglia quadrato costante di tre termini, e la di cui radice è un binomio, il prodotto dei due termini estremi è uguale al quadrato della metà del termine di mezzo, e *vice versa* se di un proposto trinomio il prodotto dei termini estremi sarà uguale al quadrato della metà del termine di mezzo, tale trinomio sarà un quadrato, di cui si avrà la radice con prendere le radici dei termini estremi, e unirle insieme collo stesso segno, da cui è affetto il termine di mezzo.

603. Dim. Il trinomio sia $m \pm pq + n$, il quale essendo un quadrato, o acciò sia un quadrato, dovrà verificarsi $mn = \frac{1}{4}p^2q^2$, nel qual caso la radice quadrata del proposto trinomio è $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$. Di fatto si alzi al quadrato questa radice, e si avrà $\overline{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}^2 = m \pm 2\sqrt{mn} + n$: Ma essendo $\frac{1}{4}p^2q^2 = mn$, sarà $p^2q^2 = 4mn$, e però $\pm pq = 2\sqrt{mn}$, dunque fatta la sostituzione di questo valore, si avrà $\overline{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}^2 = m \pm pq + n$ trinomio dato. Lo che si doveva dimostrare.

504 Sia proposta da risolversi l'equazione $x^4 + xp^2 + qx + r = 0$ mancante del secondo termine, il che si può sempre ottenere mediante il num. 496., e in cui le lettere $p$, $q$, $r$ rappresentino quali si siano quantità positive, o negative. Dispongo

go pertanto primieramente l' equazione così $x^4 + px^2 = -qx - r$, poscia assumo una quantità indeterminata $m$ da determinarsi poscia col calcolo, e moltiplicata in $x^2$ la aggiungo all'uno, e all'altro membro dell'equazione (lo che non turba l'eguaglianza pel num. 45. del I. Tomo.) in questo modo $x^4+px^2+mx^2=mx^2-qx-r$, o sia $x^4 + \overline{p+m}\,x^2 = m \times \overline{x^2 - \frac{q}{m}x - \frac{r}{m}}$. Ora affinchè il primo membro di questa equazione sia un quadrato perfetto bisogna aggiungerci (pel num 395.) il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, con che si ha $x^4 + \overline{p+m}\times x^2 + \frac{\overline{p+m}^2}{4} = m \times \overline{x^2 - \frac{qx}{m} - \frac{r}{m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4m}}$ : Quindi estraendo da ambi i membri la radice quadrata, ne viene $x^2 + \frac{p+m}{2} = \sqrt{m \times \overline{x^2 - \frac{q}{m}x - \frac{r}{m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4m}}}$.

Ma affinchè anche il secondo membro sia un quadrato perfetto, bisogna che l'assunta quantità indeterminata $m$ sia tale, che (pel num. 602.) il prodotto degli estremi di questo secondo membro sia uguale al quadrato della metà del termine di mezzo, cioè (ommettendo la quantità $m$, che moltiplica tutto il secondo membro) $\frac{q^2x^2}{4m^2} = x^2 \times -\frac{r}{m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4m}$, cioè (fatta la divisione per $x^2$) $\frac{q^2}{4m^2} = -\frac{r}{m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4m}$, nel qual caso il secondo membro (fatta la sostituzione dell'anzidetto valore) sarà $\sqrt{m \times \overline{x^2 - \frac{q}{m}x + \frac{q^2}{4m^2}}}$, e però fatta l'attuale estrazione della radice $\sqrt{m} \times \overline{x - \frac{q}{2m}}$.

Mediante adunque l'estrazione della radice quadrata da ambi i membri della precedente equazione, si ha $x^2 + \frac{p+m}{2} = \sqrt{m} \times \overline{\pm x \mp \frac{q}{2m}}$, conseguentemente $x^2 \mp x\sqrt{m} \pm \frac{q\sqrt{m}}{2m} + \frac{p+m}{2} = 0$; ma perchè $\frac{\sqrt{m}}{m} = \frac{1}{\sqrt{m}}$, sarà $x^2 \mp x\sqrt{m} \pm \frac{q}{2\sqrt{m}} + \frac{p+m}{2} = 0$, la quale equazione a motivo dell'ambiguità dei segni dà i due trinomj di secondo grado, ne' quali si risolve la proposta equazione di quarto grado.

605. Di fatto moltiplicando fra loro questi due trinomj ne risulterà la data equazione di quarto grado. Ecco il calcolo.

$$x^2 - x\sqrt{m} + \frac{q}{2\sqrt{m}} + \frac{p+m}{2} = 0$$

$$x^2 + x\sqrt{m} - \frac{q}{2\sqrt{m}} + \frac{p+m}{2}$$

---

$$x^4 - x^3\sqrt{m} + \frac{qx^2}{2\sqrt{m}} + \frac{\overline{p+m}}{2} \times x^2 + \frac{qx}{2} + \frac{\overline{p+m}}{2} \times x\sqrt{m} - \frac{q^2}{4m} - \frac{q}{2\sqrt{m}} \times \frac{\overline{p+m}}{2} + \frac{\overline{p+m}^2}{4} = 0$$

$$+ x^3\sqrt{m} - mx^2 - \frac{qx^2}{2\sqrt{m}} + \frac{\overline{p+m}}{2} \times x^2 + \frac{qx}{2} - \frac{\overline{p-m}}{2} \times x\sqrt{m} - \frac{q}{2\sqrt{m}} \times \frac{\overline{p+m}}{2}$$

---

cioè $x^4 - mx^2 + \overline{p+m} \times x^2 + qx - \frac{q^2}{4m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4} = 0$

in cui rimettendo in luogo di $\frac{q^2}{4m}$ il suo valore, che è $-\frac{r}{m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4m}$, si ha finalmente $x^4 + \overline{p+m} \times x^2 = mx^2 - qx - r$, che è l'equazione presa a risolversi. Si vede pertanto, che i due ritrovati trinomj sono le due equazioni di secondo grado componenti l'equazione del quarto. Una poi di queste due equazioni di secondo grado deve avere il secondo termine positivo, e l'altra negativo collo stesso coefficiente, perchè il loro prodotto deve dare una equazione di quarto grado priva del secondo termine.

606. Questo metodo serve ancora per le equazioni di quarto grado affette dal secondo termine, ma l'equazione, che serve a determinare il valore di $m$, e che fra poco verrò a trovare, risulta più complicata, e però torna più comodo togliercì prima, se v'è, il secondo termine.

607. Collo stesso metodo si risolvono le equazioni di questa forma $x^{2n} + px^{n} + qx^{n} + rx^{n} + s = 0$, qualunque sia il valore di $n$, poichè facendosi $y = x^{n}$ la proposta si riduce a $y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$

607. Passiamo adesso a determinare quale debba essere il valore dell'assunta indeterminata $m$, affinchè i due ritrovati trinomj abbiano luogo. Per avere l'equazione, da cui ricavare il ricercato valore di $m$, riprendo la supposta equazione $\frac{q^2}{4m^2} = -\frac{r}{m} + \frac{\overline{p+m}^2}{4m}$, che moltiplico per $m$, onde mi viene $\frac{q^2}{4m} = -r + \frac{\overline{p+m}^2}{4}$, che liberata dai denominatori è $q^2 = -4rm + m \times \overline{p+m}^2$, e però $m^3 + 2pm^2 + p^2$

$+p^2m-q^2=0$. Questa equazione essendo di terzo grado ha per lo meno una ra-
$-4rm$
dice reale (giusta il num. 472.), che però ritrovata essendosi questa radice reale, se ella si sostituirà in luogo di $m$ ne' due sovrapposti trinomj, niente altro più resterà per avere le cercate radici dell' equazione di quarto grado, che estrarre da ciascun di loro la radice quadrata: Che però supposto determinato il valore di $m$, si estragga la radice quadrata dall'equazione $x^2 \mp x\sqrt{m} \pm \frac{q}{2\sqrt{m}} + \frac{p+m}{2} = 0$, e si avrà $x =$

$\pm \frac{\sqrt{m}}{2} \pm \sqrt{\mp \frac{q}{2\sqrt{m}} - \frac{2p-m}{4}}$, la qual formola stante l' ambiguità dei segni dà tutte quattro le cercate radici.

607. La data risoluzione dimostra abbastanza come qualunque equazione di quarto grado si possa risolvere in due trinomj di secondo grado: Siccome poi in questi trinomj entra la quantità $\sqrt{m}$, però essi saranno reali, quando la quantità $m$ sia positiva, e pel contrario saranno immaginarj, se $m$ sarà negativa; e poichè il valore di $m$ si ha da una equazione di terzo grado, però egli potrà sempre essere reale (pel num. 472.); in oltre l'equazione di terzo grado essendo $m^3 + 2pm^2 + p^2m -$
$-4rm$
$q^2 = 0$, cioè avendo sempre l'ultimo termine negativo, mentre qualunque sia o positivo, o negativo il valore di $q$, il suo quadrato è sempre positivo, ella ha (pei num. 479, 580) per lo meno una radice positiva; quindi è, che i detti trinomj saranno sempre reali, comunque le radici dell'equazione di quarto grado siano reali, o immaginarie, dal che ognuno scorge, che le radici immaginarie di quarto grado possono essere espresse da radici immaginarie di secondo grado.

609. Qualunque equazione poi di grado pari sarà sempre risolubile in fattori reali di secondo grado; e se l'equazione sarà di grado dispari, poichè in tal caso ella ha un numero dispari di radici reali, se col prodotto di queste radici reali si dividerà l' equazione, ne verrà di quoziente una equazione di grado pari risolubile in fattori reali di secondo grado. E perchè quando questi fattori hanno radici immaginarie, il loro ultimo termine è positivo, però qualunque equazione di grado impari, che abbia l'ultimo termine negativo, avrà per lo meno una radice reale, e positiva.

610. Quando l'equazione di quarto grado sia di questa forma $x^4+px^2+r=0$, nel qual caso il coefficiente $q=0$, nell' equazione data per $m$ mancherà l'ultimo termine, cioè a dire sarà $m^3 + 2pm^2 + \overline{p^2-4r} \times m = 0$, in cui è (pel num. 481.) $m=0$. Cioè essendo divisa per $m$ l' equazione detta, ella diverrà di secondo grado così $m^2+2pm+p^2-4r=0$, la quale si risolva al modo delle quadratiche affette, e si avrà il valore di $m$, che è $m = -p \pm \sqrt{4r}$, il qual valore nei trinomj sostituito dà $x^2 \pm x\sqrt{-p+\sqrt{4r}} + \frac{1}{2}\sqrt{4r}$, $x^2 \pm x\sqrt{-p-\sqrt{4r}} - \frac{1}{2}\sqrt{4r}$, ne' quali manca il termine $\frac{q}{2\sqrt{m}}$, poichè $q=0$. Ommetto l'applicazione di questi trinomj, perchè è evidente per se stessa.

611.

611. Qualora l'equazione data per $m$, mediante la quale deveſi determinare il valore dell'aſſunta indeterminata $m$, avrà tutte le radici reali, e non ſi abbia altro modo di determinarle, che mediante la formola data al num. 585, ſi caderà nel caſo irreduttibile, cui in tale circoſtanza ſono ſempre ſoggette le equazioni di quarto grado. Soggiungerò un Problema, acciò ſi veda l'applicazione del metodo al caſo particolare.

## ESEMPIO.

612. Prob. Dati due mobili A, B, che partendo da due oppoſti luoghi ſi vengono incontro con queſta legge, che il primo nella prima ora percorre lo ſpazio di un paſſo, nella ſeconda percorre lo ſpazio di due, nella terza di tre, e così ſuſſeguentemente ſecondo la progreſſione naturale; il ſecondo nella prim'ora di un paſſo, nella ſeconda di otto, nella terza di 27, e così in poi ſecondo i cubi dei termini della progreſſione naturale. La diſtanza dei detti due luoghi è di paſſi 2070. Cercaſi dopo quante ore s'incontreranno.

613. Riſol. Il numero delle ore cercate ſi dica $= x$. Pel num. 1023. del I. Tomo il viaggio fatto dal primo in tale tempo ſarà $x \sqrt{\frac{x+1}{2}}$: Il viaggio fatto dal ſecondo nello ſteſſo tempo ſarà (pel num. 1339. del I. Tomo) $x \sqrt{\frac{x+1}{4}}^2$ : Ma il viaggio fatto da queſti due mobili è uguale allo ſpazio 2070, quindi ſi ha immediatamente l'equazione cercata, che è $x\sqrt{\frac{x+1}{2}} + x\sqrt{\frac{x+1}{4}}^2 = 2070$, cioè

$2x\sqrt{x+1} + x\sqrt{x+1}^2 = 8280$, conſeguentemente $x^4+2x^3+3x^2+2x-8280=0$ equazione cercata, quale a fine di riſolvere, ſi liberi primieramente dal ſecondo termine, facendo pel num. 496. $x = y - \frac{1}{2}$, dalla ſoſtituzione del qual valore ne naſce giuſta il num. 522.

$$\left.\begin{array}{rl} x^4 = & y^4 - 2y^3 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} \\ 2x^3 = & \quad + 2y^3 - 3y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{1}{4} \\ 3x^2 = & \quad + 3y^2 - 3y + \frac{3}{4} \\ 2x = & \quad + 2y - 1 \\ -8280 = & \quad - 8280 \end{array}\right\} = 0$$

cioè $y^4 * + \frac{3}{2}y^2 * - \frac{132487}{16} = 0$

la quale equazione col porſi $y^2 = z$, diventa $z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{132487}{16} = 0$, che però ſi riſolve come le quadratiche affette così $z = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{132487}{16} + \frac{9}{16}}$, cioè $z = -\frac{3 \pm \sqrt{132496}}{4}$, ed eſtraendo la radice quadrata ſarà $z = -\frac{3 \pm 364}{4}$, vale a dire $z = \frac{361}{4}$, e $z = -\frac{367}{4}$, ma perchè ſi è ſuppoſta $z = y^2$, però ſarà $y^2 = \frac{361}{4}$, e $y^2 = -\frac{367}{4}$, ed eſtraendo finalmente da queſte due equazioni la radice quadrata, ſi avrà riſpetto alla prima $y = \pm\frac{\sqrt{361}}{2}$, e però $y = \pm\frac{19}{2}$, e riſpetto alla ſeconda $y = \pm\frac{\sqrt{-367}}{4}$, le quali due radici ſono immaginarie, e ſolamente ſono reali quelle della prima formola $y = \pm\frac{19}{2}$. Siccome poi per levare il ſecondo termine all'equazione $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 8280 = 0$ ſi ſono dovute accreſcere le ſue radici di $\frac{1}{2}$, quindi è, che le poc'anzi ritrovate radici $\pm\frac{19}{2}$ ſi dovranno diminuire di $\frac{1}{2}$, con che ſi avrà $x = \pm\frac{19}{2} - \frac{1}{2}$: Onde una radice ſarà $x = +\frac{19}{2} - \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$, e la ſeconda ſarà $x = -\frac{19}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{20}{2} = -10$, che ſono le radici cercate. I due mobili adunque s'incontreranno dopo 9 ore. La radice negativa $-10$ non è di alcun uſo.

614. Per riſolvere l'equazione $y^4 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{132487}{16} = 0$ chi aveſſe voluto far uſo de' trinomj, avrebbe biſognato adoprare quelli del num. 610., ma fatte le debite ſoſtituzioni eſſi ſarebbero riſultati immaginarj, come ſi può facilmente vedere ſoſtituendo $\frac{3}{2}$ in luogo di $p$, e $-\frac{132487}{16}$ in luogo di $r$.

## ARTICOLO VIII.

### *Dei metodi finora trovati per la riſoluzione delle equazioni ſuperiori.*

615. LE riſoluzioni complete, e generali, che fino ad ora vanta l'Analiſi non ſi eſtendono al di là delle equazioni di quarto grado. I metodi, che di quando in quando ſono ſtati ſcoperti per le altre ſuperiori equazioni, o non godono della generalità di eſtenderſi a tutte; o all'incoſtante prova di tentare ſi appoggiano; o per gli immenſi calcoli, che eſigono, rendonſi impraticabili; o ſolamente danno le radici per approſſimazione. Io li anderò brevemente accennando, acciocchè nulla rimanga a deſiderarſi in queſta materia. ME-

## METODO I.

*Per mezzo dei divisori semplici, e composti.*

616. Abbiamo veduto al num. 479. che l'ultimo termine di qualsivoglia equazione risulta dal prodotto delle sue radici; che però qualunque radice dell' equazione sarà un di lui divisore. L'equazione pertanto, essendo libera dalle frazioni, se avrà radici razionali, esse saranno numeri interi (pel num. 491.); nel qual caso per determinare quali siano le radici dell'equazione, basterà prendere tutti i divisori dell' ultimo termine (pel num. 191. del I. Tomo, e pel num. 213. di questo), indi sostituire ciascun di loro tanto positivo, come negativo, nell' equazione in luogo di $x$, e quelli, che la faranno verificare, cioè a dire che faranno andare a zero tutti i di lei termini, faranno (pel num. 318.) le cercate radici. O pure coll' incognita prima accresciuta, poscia diminuita di ciascuno di loro dovrassi tentare la divisione dell' equazione, mentre qualora essa succederà esattamente, noi saremo sicuri (pel num. 451.) di avere in tal caso nel secondo termine del divisore una radice dell'equazione.

617. Il metodo per altro, benchè proceda tentando ci porterà con facilità allo scopo bramato ogni qual volta l'ultimo termine dell'equazione ammetta pochi divisori. Ma se l'ultimo termine abbonderà di divisori, potrà il numero de'tentativi crescere a segno di stancare anche i più pazienti, e coll'inutile prolissità annojare chicchessia: Che però in tal caso, o bisognerà trasformare (giusta il num. 530.) la data equazione in un'altra, il di cui ultimo termine ammetta un numero minore di divisori, o bisognerà trovare una maniera di scoprire addirittura i divisori inutili, onde diminuire in tal modo il numero delle operazioni da farsi, lo che è stato pienamente trattato dal Signor Clairaut.

618. Il modo pertanto di distinguere i divisori utili dagli inutili sarà il seguente. Primieramente osservo, che se vi sarà una equazione qualunque $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + A = 0$, di cui una radice sia $m$, siccome in supposizione di $x = 0$, va a zero tutta l'equazione a riserva dell'ultimo termine, che è divisibile per $m$, così non supposta $x = 0$, l'equazione è divisibile per $x + m$, però se in vece di $x$ si supporrà una qualunque quantità $p$, poichè questa quantità $p$ si sostituisce tanto nell' equazione, come nel divisore $x + m$, se la divisione da prima si faceva, ella deve succedere anche dopo la fatta sostituzione, mentre mediante questa sostituzione non si fa altro, che assegnare ad $x$ uno degli infiniti valori, che arbitrariamente se gli possono dare: Per lo che fatta $x = 1$, l'equazione sarà divisibile per $1 + m$; fatta $x = 2$; l'equazione sarà divisibile per $2 + m$ ec.; parimente fatta $x = -1$, l'equazione sarà divisibile per $-1 + m$; fatta $x = -2$, l'equazione sarà divisibile per $-2 + m$ ec. Ciò posto si osservi, che essendo $m$ un divisore dell'ultimo termine in supposizione di $x = 0$; $1 + m$ un divisore dell' equazione in supposizione di $x = 1$; $-1 + m$ un divisore dell'equazione in supposizione di $x = -1$ ec., questi numeri $1 + m$, $m$, $-1 + m$ vicendevolmente si superano di una unità, onde è, che niuno dei divisori, che nascono dalla supposizione di $x = 0$, cioè niuno dei divisori dell' ultimo termine può essere radice dell'equazione, se egli non supera di una unità qualcuno dei divisori nati dalla supposizione di $x = -1$, e nel tempo stesso non venga superato di una unità da qualcuno dei divisori nati dalla supposizione di $x = 1$.

Que-

Queſta oſſervazione potrà baſtare per eſcludere come inutili molti diviſori dell'ultimo termine. Vediamone l'Eſempio, nell'equazione $x^3-11x^2+38x-40=0$, di cui ſi vogliano trovare le radici fra i diviſori dell'ultimo termine. Suppongo per $x$ prima 1, poi 0, indi $-1$; e queſte ſuppoſizioni le ſcrivo in A. Paſſo a prendere gli aggregati dei termini dell'equazione nati da queſte ſuppoſizioni, che ſono $-12$ nella ſuppoſizione di $x=1$, $-40$ nella ſuppoſizione di $x=0$, $-90$ nella ſuppoſizione di $x=-1$, quali ſcrivo in B. Scrivo in C i diviſori di 12, in D i diviſori di 40, in E i diviſori di 90. Poichè i diviſori poſſono eſſere tanto poſitivi, come negativi, devonſi conſiderare le ſerie tanto creſcenti dall'alto al baſſo, come dal baſſo all'alto: Per lo che nel preſente caſo conſidero primieramente fra i diviſori ſcritti in D quelli, che ſuperano di una unità qualcuno de' diviſori poſti in C, e trovo, che v'è il 2 fra i diviſori poſti in D, in cui ſi adempie la ricercata condizione, mentre fra i diviſori poſti in C v'è il 3, e i diviſori poſti in E v'è l'1, ed ecco trovata la ſerie 1, 2, 3 creſcente dal baſſo all'alto, oltre la quale non ve n'è alcun' altra, che proceda dal baſſo all'alto: Ma conſiderando le progreſſioni creſcenti dall'alto al baſſo, ſi trovano le tre ſeguenti 1, 2, 3; 3, 4, 5; 4, 5, 6, le quali ſomminiſtrano le tre radici dell'equazione propoſta, che ſono 2, 4, 5.

| A | B | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 12. | C | 1. | 2. | 3. | 4. | 6. | 12. | | | | |
| 0. | 40. | D | 1. | 2. | 4. | 5. | 8. | 10. | 20. | 40. | | |
| −1. | 90. | E | 1. | 2. | 3. | 5. | 6. | 9. | 10. | 15. | 30. | 45. | 90. |

619. Una coſa ſi noti, che fra i diviſori poſti in D ve ne poſſono eſſere molti inutili, abbenchè godano delle accennate condizioni, e di ciò ſarà facile accorgerſene ogni qual volta ſe ne trovi un numero maggiore del grado dell'equazione. Ora per potere anche in queſto caſo ravviſare i diviſori inutili da rigettarſi, ſi oſſervi, che ſiccome nell'equazione $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}\ldots+A=0$, di cui una radice è $m$, col porre $x=0$, con che l'equazione ſi riduce al ſolo ultimo termine, deve eſſere la quantità $m$ un di lui diviſore, e con porre $x=1$, o $x=-1$, l'aggregato dei termini riſultante da tale ſuppoſizione deve eſſere diviſibile nel primo caſo per $1+m$, e nel ſecondo per $-1+m$, così continuandoſi le ſuppoſizioni di $x=2$, $x=-2$, $x=3$, $x=-3$ ec., gli aggregati de' termini dell'equazione, che quindi ne riſultano, devono eſſere diviſibili per $2+m$, $-2+m$, $3+m$, $-3+m$ ec.: Per lo che ciaſcun dei valori dell'equazione, che naſcono per ordine dalle ſuppoſizioni fatte di $x$ ſucceſſivamente ſuperanteſi di una unità, deve contenere fra' ſuoi diviſori di queſte quantità $-3+m$, $-2+m$, $-1+m$, $m$, $1+m$, $2+m$, $3+m$ ec. quella, che giuſta la fatta ſuppoſizione gli corriſponde, cioè fra i diviſori della quantità proveniente dalla ſuppoſizione di $x=0$ vi ſarà $m$, e fra i diviſori della quantità nata dalla ſuppoſizione di $x=1$, vi deve eſſere $1+m$, fra i diviſori della quantità nata dalla ſuppoſizione di $x=2$, vi deve eſſere $2+m$, fra quelli della ſuppoſizione di $x=3$ vi deve eſſere $3+m$ ec.; parimente fra i diviſori della quantità nata dalla ſuppoſizione di $x=-1$ vi deve eſſere $-1+m$, fra i diviſori della quantità nata dalla ſuppoſizione di $x=-2$ vi deve eſſere $-2+m$ ec.. Fatte adunque le accennate ſuppoſizioni, e dei provenienti valori dell'

dell'equazioni trovati i divisori, si osservi fra i divisori dell'ultimo termine dell'equazione quali si assoggettino alle proposte condizioni, così che in ciascuna superiore serie dei divisori ve ne sia uno, che vada l'altro continuamente superando di una unità, e nelle serie inferiori vada gradatamente calando di una unità, e que' divisori dell'ultimo termine, rispetto ai quali si verificherà tal legge, dovransi provare tanto presi col segno +, come col segno —, se fanno verificare l'equazione, onde accertarsi, che siano le cercate radici.

620. Trovata la maniera di scuoprire quali fra i divisori dell'ultimo termine dell'equazione possano essere di lei radici, e però quai possano esser i di lei divisori semplici, passiamo a vedere come si possano ritrovare i di lei divisori razionali esatti di secondo grado, mentre qualora s'abbia il modo di trovarli, niun fastidio sarà per dare la risoluzione dell'equazione.

621. Data una equazione qualunque $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}\ldots+A=0$, di cui l'equazione di secondo grado $x^2+mx+b=0$ sia un divisore, io dico che sarà pure la quantità $b$ un divisore esatto di A. La verità di questa proposizione è evidente, poichè essendo per ipotesi $x^2+mx+b=0$ un divisore di $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}\ldots+A=0$, questa equazione risulterà dal prodotto di $x^2+mx+b=0$ in $x^{n-2}+px^{n-3}+qx^{n-4}\ldots+B$, dalla quale moltiplicazione nasce $bB$ per ultimo termine, il quale deve essere uguale ad A; ma $bB$ è divisibile per $b$, dunque lo deve essere anche A. Ciò posto vengo immediatamente al metodo, che anderò esponendo con applicarlo primieramente alle equazioni di quarto grado.

622. Sia proposta l'equazione di quarto grado $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$: Suppongo pertanto, che ella risulti dalle due equazioni componenti $x^2+mx+b=0$, $x^2+ax+b$. Si moltiplichino fra loro queste due equazioni, con che si avrà

$x^4+\overline{a+m}\times x^3+\overline{b+b+am}\times x^2+\overline{ab+bm}\times x+bb=0$ equazione per ipotesi identica alla data equazione, onde si paragonino i coefficienti di una coi coefficienti dell'altra, e si avrà $p=a+m$, $q=b+b+am$, $r=ab+bm$, $s=bb$. Mediante queste equazioni si trovi una equazione, in cui entrino le sole quantità $m$, $b$, e i coefficienti dell'equazione data, così. Dall'equazione $p=a+m$ prendo il valore di $a$, che è $a=p-m$: Ne faccio la moltiplicazione per $b$, e mi viene $ab=pb-mb$: Dalla sostituzione di questo valore di $ab$ nell'equazione $r=ab+bm$ si ha $r=pb-mb+bm$, da cui resta soltanto a togliersi la quantita $b$; si prenda pertanto il valore di $b$ dall'equazione $s=bb$, e si avrà $b=\frac{s}{b}$, e fattane la sostituzione nell'equazione $r=pb-mb+bm$, si avrà finalmente $r=pb-mb+\frac{ms}{b}$, cioè $br=pb^2-mb^2+ms$, da cui si ricava il valore di $m$, che è $m=\frac{br-pb^2}{s-b^2}$. Ma poichè $b$ è un divisore dell'ultimo termine $s$ dell'equazione data, si cerchi il suo valore fra i divisori di $s$, dalla di cui sostituzione nella precedente equazione resterà determinato il valore di $m$: Si sostituiscano pertanto questi valori di $m$, $b$ nell'assunta equazione di secondo grado $x^2+mx+b=0$, indi colla medesima si tenti la divisione dell'equazione proposta, e se ella succederà, sarà $x^2+mx+b=0$ il ricercato divisore di secondo grado, e il quoziente sarà l'altro divisore pure di secondo grado.

623. Lo stesso metodo serve per le altre equazioni. Sia data l'equazione $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$, di cui le componenti si suppongano essere $x^3+mx+b=0$,

$b=0$, $x^3+ax^2+bx+c$, le quali insieme moltiplicate danno $x^5+\overline{a+m}\times x^4+\overline{b+b+am}\times x^3+\overline{c+bm+ab}\times x^2+\overline{bb+cm}\times x+bc=0$, che deve essere identica alla proposta, e però si ha $p=a+m$, $q=b+b+am$, $r=c+bm+ab$, $s=bb+cm$, $t=cb$. Dal primo paragone ne viene $a=p-m$, che moltiplicato per $m$ è $am=mp-m^2$, e questo valore sostituito nella seconda equazione $q=b+b+am$ in luogo di $am$ dà $q=b+b+mp-m^2$, cioè $b=q-b-mp+m^2$, che moltiplicata per $b$ diviene $bb=qb-b^2-mbp+m^2b$: Se pertanto questo valore di $bb$ si sostituirà nella quarta equazione, ne verrà $s=qb-b^2-mbp+m^2b+cm$. Finalmente si sostituisca in quest' ultima equazione in luogo di $c$ il suo valore $=\frac{t}{b}$ preso dall' equazione $t=cb$, e si avrà $s=qb-b^2-mbp+m^2b+\frac{tm}{b}$, o sia $sb=qb^2-b^3-mb^2p+m^2b^2+tm$, la quale ordinata secondo la lettera $m$ è $m^2-mp+\frac{mt}{b^2}+q-b-\frac{t}{b}=0$, la quale dopo fatta la sostituzione del valore di $b$ preso fra i divisori dell' ultimo termine $t$ dell' equazione data, risolvendosi nella maniera delle quadratiche affette, ci fornirà il valore di $m$. Questi valori di $m$, $b$ sostituiscansi nell' equazione $x^2+mx+b=0$, poscia con questa equazione si provi la divisione dell'equazione proposta, la quale succedendo mostrerà essere questo il divisore cercato. Il quoziente poi sarà una equazione di terzo grado, che o si risolverà giusta il num. 585., o pure vi si applicherà di nuovo il presente metodo. Colla stessa maniera si proceda a trovare i fattori di secondo grado per le altre equazioni più alte.

624. Una sola cosa può fare difficoltà, ed è, che quando l' ultimo termine dell' equazione data abbia molti divisori, sarà cosa troppo molesta il dovere tentare quale fra tanti s'abbia a sostituire in luogo di $b$ ultimo termine dell'assunta equazione di secondo grado. Si osservi pertanto, che essendo per ipotesi $x^n+mx+b=0$ un divisore esatto dell' equazione $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}\ldots+A=0$, lo sarà pure qualunque sia il valore, che nell'una, e nell'altra si supponga in vece di $x$, e però fatta per $x$ qualsifia supposizione, il risultante valore dell'equazione $x^2+mx+b$ deve ritrovarsi fra i divisori, che in questa supposizione ammette il valore dell' equazione proposta: Ma siccome i valori dell' equazione $x^2+mx+b=0$, che nascono dalle supposizioni $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$ ec. sono in progressione aritmetica, qualora si trascuri ciò che compete al primo termine $x^2$, essendo essi nelle fatte supposizioni $-2m+b$, $-m+b$, $b$, $m+b$, $2m+b$, le quali quantità, come ognun vede, sono in progressione aritmetica, e se ne può fare la prova con sommare gli equidistanti da quel di mezzo, però se ad ognuno dei divisori, che nascono dai valori dell' equazione da risolversi in ciascuna supposizione, si leverà ciò che compete ad $x^2$ nella formola $x^2+mx+b$, come ai di lei valori si è fatto, si dovranno ritrovare nelle serie degli accennati divisori i mutilati valori di $x^2+mx+b=0$ corrispondenti a ciascuna supposizione. Quindi si ha un indizio per conoscere se un qualsifia divisore dell' ultimo termine dell' equazione proposta possa servire d'ultimo termine all'assunta equazione componente $x^2+mx+b=0$. Nell' equazione data si facciano le supposizioni di $x=-3$, $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$. ec., e dei risultanti valori si trovino tutti i divisori, ognuno de' quali preso sì positivo, che negativo si mutili colla seguente legge. Ognuno dei divisori del valore dell' equazione nato dalla supposizione tanto di $x=1$, come di $x=-1$, si mutili di 1, perchè in queste supposizioni è $x^2=1$: Ognuno dei divisori del valore dell'

equa-

equazione nato dalla ſuppoſizione tanto di $x=2$, come di $x=-2$, ſi mutili di 4, perchè in queſte ſuppoſizioni è $x^2=4$: Così ognuno dei diviſori del valore dell'equazione nato dalla ſuppoſizione tanto di $x=3$, come di $x=-3$, ſi mutili di 9, perchè in queſte ſuppoſizioni è $x^2=9$. Ciò fatto ſi veda ſe prendendo un diviſore dell'ultimo termine dell'equazione da riſolverſi, ſi poſſa avere in ciaſcuna dell'altre ſerie dei diviſori corriſpondentemente alle varie ſuppoſizioni un tal termine, che poi conſiderando fra loro tutti queſti termini ſi trovino eſſere in progreſſione aritmetica naturale. Se ciò ſuccederà, il diviſore preſo ſi potrà ſoſtituire per ultimo termine nell'aſſunta equazione componente, ſe non ſuccederà, dovraſſi egli rigettare come inutile. Sia per Eſempio l'equazione $x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$, in cui ſi ſuppongano in vece di $x$ i numeri poſti in A. Da queſte ſuppoſizioni naſceranno dall'equazione i valori poſti in B. Di ciaſcuno di queſti valori ſi prendano i ſuoi diviſori ſcritti in C. Finalmente ſi diminuiſca ciaſcuno di queſti diviſori preſi tanto poſitivi, come negativi del quadrato di quel numero, dalla di cui ſuppoſizione derivano, e così mutilati ſi ſcrivano in E, come ſegue

Equazione $x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$

| A | B | C | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | del zero qualunque numero può eſſere diviſore | | | | | | | |
| 1 | 24 | 1. | 2. | 3. | 4. | 6. | 8. | 12. | 24. |
| 0 | 120 | 1. | 2. | 3. | 4 | 5. | 6. | 8. | 10. | 15. | ec. |
| −1 | 360 | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 8. | 9. | 10. | |
| −2 | 840 | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 7. | 8. | 10. | 12. | |

Diviſori negativi — Diviſori poſitivi

−24, −12, −8, −6, −4, −3, −2, −1, +1, +2, +3, +4, +6, +8, +12, +24
−10, −8, −6, −5, −4, −3, −2, −1, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +8, +10
−9, −8, −6, −5, −4, −3, −2, −1, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +8, +9
−10, −8, −7, −5, −4, −3, −2, −1, +1, +2, +3, +4, +5, +7, +8, +10

Diviſori poſitivi, e negativi mutilati

$-25,-13,-9,-7,-5',-4'',-3''',-2'''',0,''''+2,+2,+4,+5,+7,''''+11,+23$
$-10,-8,-6,-5,''-4,'''-3,''''-2,-1,''''+1,+2,+3,+4,+5,+6,''''+8,+10$
$-10,-9,-7,-6,''-5,'''-4,''''-3,-2,''''0,+1,+2,+3,+4,+5,''''+7,+8$
$-14,-12,-11,-9,-8,'-7,''-6,'''-5,''''-3,''''-2,-1,0,+1,+3,+4,''''+6$

In queſti diviſori mutilati ritrovo ſei progreſſioni aritmetiche, la prima dei numeri ſegnati ', la ſeconda dei numeri ſegnati '', la terza dei numeri ſegnati ''', la quarta dei numeri ſegnati '''', la quinta dei numeri ſegnati ''''', la ſeſta dei numeri ſegnati '''''. Nella prima progreſſione il numero della ſeconda orizontale fila dei diviſori, che ſono i diviſori dell'ultimo termine dell'equazione data, è $-6$; nella ſeconda egli è $-5$; nella terza egli è $-4$; nella quarta egli è $-3$; e nella quinta egli è $-1$, nella ſeſta è $+6$. I cinque primi ſono inutili, ma l'ultimo $+6$ è appunto quello, che deve ſervire d'ultimo termine nell'equazione componente $x^2+mx+b=0$, che perciò diverrà $x^2+mx+6=0$, in cui reſta a determinarſi il valore di $m$, lo che

per fare prendo l'equazione $m = \frac{br-pb^2}{s-b^2}$ trovata al num. 622., in cui ſoſtituiſco i valori di $b, r, p, s$, che ſono $b=6$, $p=-14$, $r=-154$, $s=120$, con che ho $m=-\frac{924+504}{120-36}$, cioè $m=-5$, dalla ſoſtituzione del qual valore l'equazione anzidetta diventa $x^2-5x+6=0$, colla quale dividendo l'equazione propoſta $x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$, poichè la diviſione rieſce eſatta, venendone di quoziente $x^2-9x+20$, perciò $x^2-5x+6=0$ è quello che ſi cercava. Se ora ſi riſolveranno queſte due trovate equazioni di ſecondo grado, ſi avranno le quattro radici dell' equazione data, che ſono 2, 3, 4, 5.

625. Una coſa deveſi avvertire, ed è, che qualora, eſſendo propoſta da riſolverſi una equazione di grado pari, ſi vorranno prendere per le di lei equazioni componenti altrettante equazioni di ſecondo grado, quante ſe ne richiedono per montare al grado dell'equazione data, ſe ognuna, o due ſole di queſte equazioni avrà per ultimo termine la ſteſſa quantità, nel ricercare il valore di $m$ per l'equazione $x^2+mx+b=0$, che vuolſi determinare, ſi giungerà a una eſpreſſione indeterminata di queſta forma $m=\frac{0}{0}$ avvegnachè l'equazione $x^2+mx+b=0$ propenda in ciaſcuna dell'altre componenti, non eſſendovi maggior motivo, per cui ſi converta piuttoſto in una, che nell'altra: Per Eſempio dovendoſi riſolvere l'equazione $x^4-11x^3+34x^2-33x+9=0$ prendo l'equazione $x^2+mx+b=0$, e ſoſtituiſco in luogo di $b$ il 3, che è il conveniente diviſore dell'ultimo termine 9, onde eſſa riſulta $x^2+mx+3=0$. Reſta da determinarſi la quantità $m$, e a tale oggetto prendo l'equazione $m=\frac{br-pb^2}{s-b^2}$ del num. 622, nella quale ſoſtituendo i valori di $b, r, p, s$, che ſono $b=3$, $r=-33$, $p=-11$, $s=9$, ſi hà $m=-\frac{99+99}{9-9}$, cioè $m=\frac{0}{0}$, e ciò naſce a motivo, che eſſendo queſta componente $x^2-4x+3=0$, l'altra è $x^2-7x+3=0$, delle quali l'una, e l'altra ha il 3 per ultimo termine. Ora in tal caſo deveſi ricercare il valore di $m$ per mezzo di una tale equazione, il di cui grado corriſpondendo al numero delle aſſunte equazioni di ſecondo grado, poſſa perciò ella ſomminiſtrare le quantità neceſſarie da darſi per coefficiente a ciaſcuno dei loro ſecondi termini: Onde per determinare in tal modo la quantità $m$ relativamente all'eſempio poc' anzi addotto, prendo dal num. 622. le equazioni $p=a+m$, $q=b+b+am$, $r=ab+bm$, $s=bb$, e mediante la ſeconda, e la quarta elimino il $b$, onde mi viene $s=qb-b^2-abm$; per mezzo poi di queſta equazione, e della prima $p=a+m$ elimino la quantità $a$, con che ho $s=qb-b^2-pbm+bm^2$, la quale ordinata ſecondo la lettera $m$ è $m^2-pm-b+q=\frac{s}{b}$, in cui ſoſtituendo il valore di $b$ preſo nel modo detto al num. 624. tra i diviſori dell' ultimo termine dell' equazione da riſolverſi, ſi riſolva eſſa per ultimo al modo delle quadratiche affette, e ſi avranno i due ricercati valori di $m$, da darſi per coefficienti ai ſecondi termini delle due aſſunte equazioni di ſecondo grado. La riſoluzione di queſta equazione è $m=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{s}{b}-qb+\frac{1}{4}p^2}$, ove hanſi a ſoſtituire i valori di $p, q, s, b$, che preſi dall'equazione $x^4-11x^3+34x^2-33x+9=0$ ſono $p=-11$, $q=34$, $s=9$, $b=3$, de' quali fatta la ſoſtituzione ſi ha

m

$m=-\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{3}-34+3+\frac{121}{4}}$, cioè $m=-\frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{12-136+12+121}}{2}$, e però $m=-\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}$, conseguentemente $m=-\frac{11\pm3}{2}$. I due valori adunque di $m$ sono $-4$, e $-7$, per lo che le due equazioni componenti saranno $x^2-4x+3=0$, $x^2-7x+3$.

626. Lo stesso metodo si osservi per determinare le equazioni componenti di secondo grado, allorchè le equazioni da risolversi sono letterali. Sia proposta l'equazione $x^4-a^2x^2+2a^2bx-a^2b^2$, di cui una componente si supponga $x^2+mx+b=0$, sarà $b$ uno dei divisori dell'ultimo termine $-a^2b^2$, di cui i divisori sono $ab$, $a^2$, $b^2$ (poichè essendo omogenei i termini dell'equazione devonsi tentare i divisori di due dimensioni). Si ponga pertanto $ab$ in vece di $b$, e perchè è $p=0$, $r=+2a^2b$, $s=-a^2b^2$, sarà $m=\frac{rb-pb^2}{s-b^2}$, cioè $m=\frac{2a^2b\times ab}{-a^2b^2-ab^2}$, e però $m=\frac{2a^2b^2}{-2a^2b^2}$, conseguentemente $m=-a$, con che l'equazione $x^2+mx+b=0$ diventa $x^2-ax+ab=0$, mediante la quale si divide esattamente l'equazione data $x^4-a^2x^2+2a^2bx-a^2b^2=0$, e il quoziente è $x^2+ax-ab$, Dunque le due ricercate equazioni componenti sono $x^2-ax+ab=0$, $x^2+ax-ab$. Collo stesso metodo si proceda alle equazioni più alte, delle quali si avrà la soluzione con determinare primieramente un fattore di secondo grado, col quale faraffi la divisione dell'equazione data, poscia si passerà a determinare un pari divisor del quoziente, e così in seguito.

627. Finora abbiamo avuto in vista i soli divisori razionali, e semplici, e di secondo grado: ora passeremo alla risoluzione delle equazioni per mezzo dei fattori di qualsivoglia grado, ed anche irrazionali. Il modo di determinare questi divisori, che devono essere i fattori dell'equazione, si è di assumerli indeterminati, poscia moltiplicarli fra loro, e mediante il paragone dei termini di questo prodotto coi termini dell'equazione data determinare il valore, che deve competere alle assunte indeterminate, onde determinare con ciò i fattori cercati. Due Esempj renderanno chiaro il metodo.

628. Data l'equazione $x^5+3ax^4+\overline{2b^2+2a^2}\times x^3+\overline{3ab^2-d^3}\times x^2+\overline{b^4-2ad^3}\times x-b^2d^3=0$ cercansi i fattori uno di secondo, e l'altro di terzo grado, da'quali essa risulta. Si ponga che essi siano $x^2+mx+b=0$, $x^3+nx^2+px+q$; dalla moltiplicazione de'quali si avrà

$$\left.\begin{array}{llllll} x^5 & +mx^4 & +bx^3 & +nbx^2 & +pbx & +qb^2 \\ & +nx^4 & +mnx^3 & +pmx^2 & +mqx & \\ & & +px^3 & +qx^2 & & \end{array}\right\}=0$$

Si paragonino i termini di questa equazione coi termini dell'equazione data, con che si avranno le seguenti cinque equazioni $m+n=3a$; $b+mn+p=2b^2+2a^2$; $nb+pm+q=3ab^2-d^3$; $pb+mq=b^4-2ad^3$; $qb=-b^2d^3$. Dalla prima di queste equazioni si prenda il valore di $n$, che è $n=3a-m$; dall'ultima si prenda il valore di $q$ così $q=-\frac{b^2d^3}{b}$, mediante il quale si vede, che $b$ deve essere un divisore dell'ultimo termine $b^2d^3$, di cui i divisori sono $b^2$, $d^3$ (poichè delle equazioni as-

ſunte una è di ſecondo, e l'altra di terzo grado, non ſervono che i diviſori di due, o di tre dimenſioni), e però o ſarà $b=b^2$, o pure $b=d^3$; dalla quarta equazione ſi prenda il valore di $p$, che è $p=\frac{b^4-2ad^3-mq}{b}$, in cui ſi ſoſtituiſca in luogo di $q$ il ſuo poc'anzi ritrovato valore, e ſi avrà $p=\frac{b^4-2ad^3}{b}+\frac{mb^2d^3}{b^4}$. Si ſoſtituiſcano per ultimo queſti ritrovati valori di $n$, $p$ nella ſeconda equazione, con che ſi avrà $b+3am-m^2+\frac{b^4-2ad^3}{b}+\frac{mb^2d^3}{b^2}=2b^2+2a^2$. Si ordini queſta equazione ſecondo la lettera $m$, e ſi avrà $m^2-\frac{3ab^2-b^2d^3}{b^2}\times m=b+\frac{b^4-2ad^3}{b}-2b^2-2a^2$. E poichè abbiamo veduto, che la $b$ deve eſſere o $=b^2$, o $=d^3$, però ſi ſupponga $b=b^2$, e queſto valore ſi collochi nell'ultimamente trovata equazione, che diverrà $m^2-\frac{3ab^2-d^3}{b^2}=-\frac{2ad^3-2a^2b^2}{b^2}$, dalla riſoluzione della quale ne viene $m=\frac{3ab^2+d^3}{2b^2}\pm\sqrt{-\frac{2ad^3-2a^2b^2}{b^2}+\frac{9a^2b^4+12ab^2d^3+4a^6}{4b^4}}$, cioè $m=\frac{3ab^2+d^3}{2b^2}\pm\frac{\sqrt{a^2b^4-2ab^2d^3+d^6}}{2b^2}$, e però $m=\frac{3ab^2+d^3}{2b^2}\pm\left(\frac{ab^2-d^3}{2b^2}\right)$, onde valendo il ſegno + ſarà $m=2a$, e valendo il ſegno — ſarà $m=a+\frac{d^3}{b^2}$. Per conoſcere quale dei due ritrovati valori di $m$ ſia il legittimo, ſi ſoſtituiſca ciaſcun di loro nelle equazioni $n=3a-m$; $p=\frac{b^4-2ad^3+md^3}{b^2}$, poſcia queſti valori di $n$, $p$, e di $q$, che è $q=-d^3$ ſi collochino nella terza equazione $nb+pm+q=3ab^2-d^3$, mentre ſe mediante tale ſoſtituzione ella riſulterà identica, tale valore di $m$ ſarà il ricercato, ſe non riuſcirà identica, egli ſarà inutile. Prendo pertanto il valore di $m=a+\frac{d^3}{b^2}$, con cui fatte le accennate ſoſtituzioni ſi ha $n=2a-\frac{d^3}{b^2}$, $p=b^2-\frac{ad^3}{b^2}+\frac{d^6}{b^4}$, e queſti valori meſſi nella terza equazione, di cui fino ad ora non ſi è fatto alcun uſo, daranno $2ab^2-d^3+ab^2-\frac{a^2d^3}{b^2}+\frac{ad^6}{b^4}+d^3-\frac{ad^6}{b^4}-d^3+\frac{d^9}{b^6}=3ab^2-d^3$, la quale equazione non è identica, e però deveſi rigettare come inutile il valore di $m=a+\frac{d^3}{b^2}$. Si prenda l'altro valore di $m$, che ſi è trovato eſſere $2a$, con cui fatte le debite ſoſtituzioni ſi ha $n=a$, $p=b^2-\frac{2ad^3}{b^2}+\frac{2ad^3}{b^2}$, cioè $p=b^2$, e $q=-d^3$. Fatte adunque queſte ſoſtituzioni nella terza equazione, ella diverrà $ab^2+2ab^2-d^3=3ab^2-d^3$, cioè $3ab^2-d^3=3ab^2-d^3$, che eſſendo identica fa conoſcere, che queſto valore di $m$ è il ricercato. Ora ſi mettano nei due aſſunti fattori queſti valori di

$m$,

$m, b, n, p, q$, con che diverranno $x^2+2ax+b^2=0$, $x^3+ax^2+b^2x-d^3$, che ſono appunto i fattori dell' equazione propoſta, lo che ſi renderà evidente col farne la moltiplicazione, mentre ne verrà la detta equazione.

629. Prendo l' altro Eſempio dall' equazione $x^6+2ax^5+\overline{2b^2+a^2}\times x^4+2ab^2x^3+b^4x^2-a^5b=0$, di cui ſi vogliono determinare i due fattori di terzo grado, che ſuppongo eſſere $x^3+mx^2+nx+b=0$, $x^3+px^2+qx+t$, dalla moltiplicazione de' quali ſi ha

$$\left.\begin{array}{c} x^6+mx^5+nx^4-bx^3+bpx^2+bqx+tb \\ +px^5+mpx^4+npx^3+nqx^2+ntx \\ +qx^4+mqx^3+mtx^2 \\ +tx^3 \end{array}\right\}=0$$

dal paragone dei coefficienti di queſta coi coefficienti della propoſta ſi ha $m+p=2a$, $n+mp+q=2b^2+a^2$; $b+np+mq+t=2ab^2$; $bp+nq+mt=b^4$; $bq+nt=0$; $tb=-a^5b$. Dalla prima di queſte equazioni ſi ha $p=2a-m$, e dall' ultima $t=-\frac{a^5b}{b}$, dalla quale ſi ſcorge, che la quantità $b$ deve eſſere uno dei diviſori dell'ultimo termine dell' equazione propoſta, e però, ſiccome i diviſori dell'ultimo termine ſono $a^3$, $a^2b$, $a^2\sqrt{ab}$ (poichè devono eſſere di tre dimenſioni, mentre $b$ è l'ultimo termine di un fattore di terzo grado), ſarà uguale ad uno di queſti. Si ſoſtituiſca il ritrovato valore di $t$ nella quinta equazione, e ſi avrà $q=\frac{a^5bn}{b^2}$: Nella ſeconda ſi mettano i valori di $p, q$, e ne verrà $n=\frac{2b^2b^2+a^2b^2+m^2b^2-2ab^2m}{a^2b+b^2}$. Finalmente ſe nella terza equazione ſi collocheranno queſti valori di $n, p, q, t$, ſi avrà

$$2a^6b^2b^2+a^{10}b^2b+2ab^2b^2-b^5=4ab^2b^4-2b^2b^4m+2a^5b^2b^2m+2a^2b^4-a^2b^4m+a^7bb^2m+2ab^4m^2-b^4m^2+a^5bb^2m^2-4a^2b^4m+2ab^4m^2+2a^6bb^2m^2,$$

cioè dividendola per $b$ e ordinandola per $m$

$$\overline{a^7bb-b^5}\times m^2+\overline{4ab^4-2a^5bb}\times m^2+\overline{a^7bb-4a^2b^3+2a^5b^2b-2b^2b^3}\times m+2ab^2b^3+2a^3b^3+b^4-a^{10}b^2-2a^6b^2b=0.$$

Ora ſi ſupponga $b=a^2\sqrt{ab}$ uno dei diviſori, e ſoſtituendo queſto valore nella poc' anzi trovata equazione, ſi avrà $\overline{a^7b\sqrt{ab}-a^7b\sqrt{ab}}\times m^2+\overline{4a^8b\sqrt{ab}-2a^8b\sqrt{ab}}\times m^2+\overline{a^8b\sqrt{ab}-4a^8b\sqrt{ab}+2a^7b^2\sqrt{ab}}-\overline{2a^7b^2\sqrt{ab}}\times m+2a^8b^3\sqrt{ab}+2a^{10}b\sqrt{ab}+a^{10}b^2-a^{10}b^2-2a^8b^3\sqrt{ab}=0$, la quale con togliere i termini, che ſi elidono, e con dividerla per $\sqrt{ab}$ ſi riduce a $2a^8bm^2-4a^8bm+2a^{10}b=0$, che diviſa per $2a^8b$ è finalmente $m^2-2am+a^2=0$, e però $m=\pm a$ Si prenda pertanto queſto valore di $m$, e ſi ſoſtituiſca nei valori di $n, p, q, t$, lo che fatto ſi avrà $n=\frac{2a^6b+a^6b+a^6b-2a^7b}{2a^5b}$, cioè $n=b^2$; $p=a$, $q=b^2$; $t=-\frac{a^5b}{a^2\sqrt{ab}}$, cioè (dividendo $-a^5b$ per $a^2\sqrt{ab}$) $t=-a^2\sqrt{ab}$. Si ſoſtituiſcano per ul-

ti-

timo questi ritrovati valori nella quarta equazione $bp+nq+mt=b^4$, che non ha avuto luogo nelle fatte determinazioni, e si avrà $a^3\sqrt{ab}+b^4-a^3\sqrt{ab}=b^4$, cioè $0=0$ equazione identica, la quale fa vedere, che l'assunto valore di $b$, e il ritrovato di $m$ sono quelli, che si cercano; che però se questi valori si collocheranno nelle due assunte equazioni di terzo grado, si avrà $x^3+ax^2+b^2x+a^2\sqrt{ab}=0$, $x^3+ax^2+b^2x-a^2\sqrt{ab}$, che sono le due componenti, dalle quali risulta l'equazione data, e mediante la di cui soluzione si hanno le cercate radici dell'equazione $x^6+2ax^5+2b^2+a^2\times x^4+2ab^2x^3+b^4x^2-a^2b=0$.

630. Se pel valore di $b$ si fosse preso uno degli altri due divisori $a^3$, $a^2b$, non si sarebbe ottenuto il fine desiderato, il che fa vedere, che sono inutili.

631. Si renderà più breve il calcolo, e però si giungerà più facilmente col presente metodo alla risoluzione delle equazioni con considerarle libere dal secondo termine. Che se le equazioni saranno convertibili più speditamente si arriverà a scuoprirne le radici con risolverle in trinomj di secondo grado.

632. Le equazioni convertibili sono di grado pari, in cui perciò il numero de' termini è impari: I termini ugualmente distanti dal termine di mezzo devono essere affetti dallo stesso segno, e dallo stesso coefficiente, non computando per coefficiente quella quantità, che, essendo un divisore dell'ultimo termine, serve in alcuni termini a compiere il numero delle dimensioni, o sia a rendere i termini omogenei. Il primo termine deve essere formato dalla sola incognita $x$, e l'ultimo deve essere affatto cognito, l'uno e l'altro poi deve essere elevato alla stessa potestà; per lo che cominciando l'equazione dal termine positivo $x^n$ deve procedere in modo, che ne' seguenti successivi termini l'esponente di $x$ vada continuamente decrescendo di una unità, finchè si giunga al termine cognito $a^n$, che deve essere positivo: Una equazione pertanto convertibile sarà $x^{10}+bx^9-acx^8-a^2dx^7+a^2ex^6+ab^2x^5+a^2ex^4-a^3dx^3-a^4cx^2+a^5bx+a^{10}=0$, la quale, trascurate le potestà di $a$, che conservano l'omogeneità dei termini, è $x^{10}+bx^9-cx^8-dx^7+ex^6+b^2x^5+ex^4-dx^3-cx^2+bx+a^{10}=0$, in cui i termini ugualmente distanti da quel di mezzo sono affetti dallo stesso segno, e dallo stesso coefficiente.

633. Il modo di risolvere in trinomj di secondo grado queste equazioni è il seguente. Si prenda una equazione convertibile di secondo grado, come $x^2+mx+a^2$, in cui il coefficiente del secondo termine è una quantità indeterminata, e da determinarsi col calcolo, l'ultimo termine poi deve essere il quadrato della radice dell'ultimo termine dell'equazione proposta; questa equazione si moltiplichi in un' altra equazione convertibile presa ad arbitrio coi coefficienti indeterminati, a riserva dell'ultimo termine, che deve essere lo stesso, che quello della proposta, e soltanto di due gradi inferiore, cioè $a^{n-2}$, il di cui massimo esponente deve essere minore di due unità dell'esponente massimo dell'equazione data. Da questa moltiplicazione ne verrà una equazione parimente convertibile, che sarà dello stesso grado dell'equazione da risolversi, e a cui devesi supporre identica. Stante questa identità si paragonino i coefficienti di una coi coefficienti dell'altra, cioè il secondo al secondo, il terzo al terzo ec., fino ai termini di mezzo inclusivamente, essendo superflui gli ulteriori paragoni, poichè rendono le stesse equazioni: Mediante queste equazioni si eliminino tutte le assunte indeterminate a riserva della $m$, da cui è affetto il secondo termine del trinomio di secondo grado, ond'è, che ne verrà una equazione data per $m$, e per le costanti: Si risolva questa equazione coi soliti metodi a fine di avere i valori di $m$, che per ora suppongo A, B, C ec. de' quali il numero sarà

$\frac{n}{2}$, e questi valori si collochino nel trinomio $x^2+mx+a^2=o$, con che si avranno i trinomj $x^2+Ax+a^2=o$; $x^2+Bx+a^2$; $x^2+Cx+a^2$ ec. che appunto saranno i ricercati trinomj di secondo grado, ne' quali si risolve la proposta equazione convertibile.

634. Si debba per Esempio risolvere in trinomj di secondo grado l' equazione convertibile $x^6+acx^5+d^3x^3+a^3cx^3+a^6=o$. Prendo il trinomio di secondo grado $x^2+mx+a^2=o$, e lo moltiplico nell' equazione pure convertibile $x^4+nx^3+p^2x^2+a^2nx+a^4$, con che mi viene

$$\begin{array}{l} x^6+mx^5+a^2x^4+a^2nx^3 \\ \quad +nx^5+mnx^4+mp^2x^3 \quad \text{ec.} = o \\ \qquad +p^2x^4+a^2nx^2 \end{array}$$

Paragono i coefficienti indeterminati di questa coi coefficienti della proposta, con che ho le seguenti equazioni $m+n=o$; $a^2+mn+p^2=ac$; $a^2n+mp^2+a^2n=d^3$: Prendo dalla prima il valore di $n$, che è $n=-m$; poscia dalla seconda prendo il valore di $p^2$, e lo metto nella terza, onde ella risulta $2a^2n+acm-m^2n-a^2m=d^3$, la quale mediante la sostituzione del valore di $n$ si cambia in $-2a^2m+acm+m^3-a^2m=d^3$, cioè

$m^3+\overline{ac-3a^2}\times m-d^3=o$, dalla di cui risoluzione (giusta il num. 585.) si hanno i tre seguenti valori di $m$, cioè

$$m=\sqrt[3]{\frac{d^3}{2}+\sqrt{\frac{d^6}{4}+\frac{a^3c^3-9a^4c^2+27a^5c-27a^6}{27}}}+$$

$$\sqrt[3]{\frac{d^3}{2}-\sqrt{\frac{d^6}{4}+\frac{a^3c^3-9a^4c^2+27a^5c-27a^6}{27}}}$$, e gli altri due che sono gli stessi di questo, ma moltiplicati nelle due radici cubiche immaginarie dell' unità. Se pertanto la prima di queste radici si dirà $=b$, la seconda $=i$, la terza $=k$, i tre trinomj di secondo grado, da' quali risulta l' equazione presa da risolversi, saranno $x^2+bx+a^2=o$, $x^2+ix+a^2$; $x^2+kx+a^2$, lo che dovevasi ritrovare.

635. Poichè nelle equazioni convertibili i termini ugualmente distanti dal termine di mezzo devono essere affetti dallo stesso segno, e coefficiente, se in una equazione convertibile mancherà un termine, dovrà mancare ancora l'altro suo corrispondente, come nella precedente equazione del num. 634. perchè manca il secondo, manca ancora il penultimo: Onde è, che non solo saranno convertibili queste equazioni mancanti di qualche termine, ma ancora la presente $x^n\pm a^n=o$, in cui si possono supporre tutti i termini intermedj, ma moltiplicati in zero. Debbasi pertanto risolvere ne' suoi trinomj di secondo grado questa equazione $x^n+a^n=o$, di cui per maggior chiarezza determino l' esponente così $x^8+a^8=o$. Prendo le due equazioni convertibili $x^2+mx+a^2=o$, $x^6+px^5+qx^4+rx^3+ux^2+yx+z$, e le moltiplico fra loro, con che mi viene

$x^8$

$$x^8+mx^7+a^2x^6+a^2px^5+a^2qx^4$$
$$+px^7+mpx^6+mqx^5+mtx^4 \text{ ec.} =0$$
$$+qx^6+tx^5$$

Dal paragone de' coefficienti di queſta colla propoſta ſi ha $m+p=0$, $a^2+mp+q=0$; $a^2p+mq+t=0$. La prima da $p=-m$, che meſſo nella ſeconda diventa eſſa $q=m^2-a^2$, e queſto valore collocato nella terza inſieme col valore di $p$ la cambia in $t=2a^2m-m^3$. Finalmente ſoſtituiti nella quarta i valori di $q$, $t$, ne viene $m^4-3a^2m^2+a^4=0$, le di cui quattro radici ſono $m=\sqrt{\frac{3a^2+a^2\sqrt{5}}{2}}$; $m=\sqrt{\frac{3a^2-a^2\sqrt{5}}{2}}$; $m=-\sqrt{\frac{3a^2+a^2\sqrt{5}}{2}}$; $m=-\sqrt{\frac{3a^2-a^2\sqrt{5}}{2}}$, o ſia $m=a\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$; $m=a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$; $m=-a\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$; $m=-a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$. Si ſoſtituiſcano queſti quattro valori di $m$ nel trinomio $x^2+mx+a^2=0$, e ſi avranno i quattro ſeguenti trinomj da' quali riſulta l' equazione $x^8+a^8=0$, cioè

$$x^2+x\sqrt{\frac{3a^2+a^2\sqrt{5}}{2}}+a^2;\ x^2+x\sqrt{\frac{3a^2-a^2\sqrt{5}}{2}}+a^2;\ x^2-x\sqrt{\frac{3a^2+a^2\sqrt{5}}{2}}+a^2;$$
$$x^2-x\sqrt{\frac{3a^2+a^2\sqrt{5}}{2}}+a^2.$$

636. Ho detto al num. 632., che le equazioni ſono di grado pari; in queſta però $x^n\pm a^n=0$ l'eſponente può eſſere ancora un numero impari. Quanto all' equazione $x^n+a^n=0$ eſſendo $n$ un numero impari, ella farà il prodotto del binomio $x+a$ moltiplicato in una equazione convertibile della forma ſeguente $x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}$ ec.... $+a^{n-1}$, la quale riſolvendoſi nel modo detto ne' ſuoi trinomj di ſecondo grado, ſi verrà pure a riſolvere parte in trinomj, parte nel binomio $x+a$ la data equazione $x^n+a^n=0$. La equazione convertibile poi, che ſi deve aſſumere da moltiplicarſi nel trinomio $x^2+mx+a^2=0$, a fine di riſolvere in trinomj l' equazione $x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}$ ec., deve avere per primo termine $x^{n-3}$. Parimente l'equazione $x^n-a^n=0$, eſſendo $n$ un numero impari, è il prodotto di $x-a$ in $x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+a^3x^{n-4}$ ec.... $a^{n-1}$, e però circa eſſa ſi opererà come ſi è detto della precedente $x^n+a^n=0$.

637. Reſta a parlare dell' equazione $x^n-a^n=0$ quando l'eſponente $n$ è un numero pari: In tal caſo ella ſi riſolve primieramente in $x^{\frac{n}{2}}+a^{\frac{n}{2}}$, $x^{\frac{n}{2}}-a^{\frac{n}{2}}$, poichè $x^n-a^n=x^{\frac{n}{2}}+a^{\frac{n}{2}} \times x^{\frac{n}{2}}-a^{\frac{n}{2}}$. Di queſti due binomj il primo $x^{\frac{n}{2}}+a^{\frac{n}{2}}$ ſi tratta come ſi è detto al num. 635. quando $\frac{n}{2}$ è numero pari, e giuſta il num. 636. quando

do $\frac{n}{2}$ è un numero impari. Il ſecondo $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{2}}$ ſi riſolve ne'due binomj $x^{\frac{n}{4}}+a^{\frac{n}{4}}$, $x^{\frac{n}{4}}-a^{\frac{n}{4}}$, de' quali il primo ſi tratta come pur ora ſi è detto, comunque $\frac{n}{4}$ ſia numero pari, o impari, ma il ſecondo $x^{\frac{n}{4}}-a^{\frac{n}{4}}$ ſi riſolve ne'due $x^{\frac{n}{8}}+a^{\frac{n}{8}}$, $x^{\frac{n}{8}}-a^{\frac{n}{8}}$, e così di ſeguito, finchè l'eſponente di $x-a$ ſia un numero impari, e allora egli ſi riſolverà ne'ſuoi trinomj giuſta il num. 636.

Anche indipendentemente dai diviſori dell'ultimo termine ſi potrà riſolvere una data equazione nei ſuoi fattori di ſecondo grado. La maniera è la ſeguente. Sia propoſta l'equazione (A) $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}$ ec.... $+Q=0$, per riſolvere la quale ne'ſuoi fattori di ſecondo grado, ſi prendano due equazioni a coefficienti indeterminati, la prima di ſecondo grado, che ſarà (B) $x^2+mx+p=0$; la ſeconda di due gradi inferiore alla propoſta (onde dal prodotto di queſte due ne poſſa riſultare un'equazione di grado $n$ eguale al grado dell'equazione (A), cui deve eſſere identica), che però ſarà (D) $x^{n-2}+qx^{n-3}+rx^{n-4}+$ ec.... $+R=0$. Si moltiplichino inſieme queſte due equazioni (B, D), e dell'equazione, che ne verrà ſi paragonino i coefficienti coi coefficienti dell'equazione (A), e per mezzo di queſte peculiari equazioni, che ſaranno tante, quanti ſono gli aſſunti coefficienti indeterminati, ſi eliminino coi metodi dati tutte queſte indeterminate a riſerva della $m$, che è il coefficiente del ſecondo termine del fattore (B), onde ne verrà un'equazione data per $m$, e per i coefficienti cogniti dell'equazione (A). Nell'equazione (B) ſi ſoſtituiſca poſcia in luogo di $p$ il ſuo valore dato per $m$, e ritrovato per mezzo del paragone de' coefficienti; indi ſi riſolva la precedente equazione provenuta dalla eliminazione di tutte le indeterminate, a riſerva della $m$, e i valori di $m$, che dalla medeſima ſi otterranno, ſi ſoſtituiſcano nel fattore (B). Quanti poi ſaranno queſti valori di $m$, in altrettanti fattori di ſecondo grado ſi cambierà il fattore indeterminato $x^2+mx+p=0$; e queſti ſaranno i fattori, ne' quali ſarà riſolubile la data equazione (A).

Ben è vero però, che l'equazione in $m$ ſarà completa, e d'un grado maggiore alla propoſta, conſeguentemente più difficile da riſolverſi. Se però in certi caſi ſi avrà il modo di ſcoprirne le radici, ſi conſeguirà il fine bramato. Ma per ſapere di qual grado dovrà eſſere queſta equazione data per $m$, ſi oſſervi, che eſſendoſi ſuppoſto $x^2+mx+p=0$ un fattore dell'equazione (A), egli perciò, in quanto che di ſecondo grado, dovrà contenere due delle di lei radici; e ſiccome il coefficiente del ſecondo termine (pel num. 477.) non è altro, che la ſomma delle radici dell'equazione, perciò la lettera $m$, che eſprime la ſomma delle radici dell'equazione (B), rappreſenterà due radici dell'equazione (A). Ma poichè nulla v'ha, che determini la lettera $m$ a rappreſentare piuttoſto un pajo delle di lei radici, che l'altro, quindi ella dovrà rappreſentare nel tempo ſteſſo tutti gli ambi, che dal numero delle radici dell'equazione (A) poſſono formarſi. La queſtione adunque circa il grado, cui aſcenderà l'equazione in $m$, ſi riduce a queſto ſolo di trovare il numero degli ambi, che ammette un dato eſponente. Se adunque l'eſponente eſpri-

mente il grado dell'equazione data sarà $=n$, il numero degli ambi, che da esso si possono formare sarà (pel num. 1357. del Tomo I.) $n\sqrt{\frac{n-1}{2}}$. Ma $n$ (pel num. 461.) esprime il numero delle radici; dunque dovendo la lettera $m$ esprimere il numero degli ambi, che si possono formare da queste radici, dovrà sempre l'equazione in $m$ ascendere al grado indicato da $n\sqrt{\frac{n-1}{2}}$. Ma veniamo al caso particolare.

Debbasi risolvere ne' suoi fattori di secondo grado l'equazione $x^4-3x^3-x^2-3x+18=0$. Prendo le due equazioni indeterminate $x^2+mx+q=0$; $x^2+qx+t=0$, dalla moltiplicazione delle quali si ha

$$\begin{array}{l} x^2 + mx + p=0 \\ x^2 + qx + t \\ \hline x^4 + mx^3 + px^2 + pqx + pt \\ \quad + qx^3 + mqx^2 + mtx \\ \quad\quad + tx^2 \end{array} \Big\}=0$$

Si faccia il paragone de' coefficienti di questa coi coefficienti della proposta, e si avrà $m+q=-3$; $p+mq+t=-1$; $pq+mt=-3$; $pt=18$. Primieramente si trovi il valore di $p$ dato per $m$, quale si otterrà mediante la seconda, e la terza equazione. Dalla seconda si ha $t=-1-mq-p$, dalla terza $t=-\frac{3-pq}{m}$, le quali paragonate insieme danno $-1-mq-p=-\frac{3-pq}{m}$, cioè $-m-m^2q-mp=-3-pq$, in cui sostituendosi il valore di $q$ preso dalla prima equazione, che è $q=-3-m$, si ha $-m+3m^2+m^3-mp=-3+3p+pm$, conseguentemente $p=\frac{m^3+3m^2-m+3}{3+2m}$, il qual valore di $p$ sostituito nel fattore (B), lo cambia in $x^2+mx+\frac{m^3+3m^2-m+3}{3+2m}=0$. Ciò fatto si passi alla eliminazione di tutte le indeterminate a riserva della $m$, o sia a trovare l'equazione in $m$, lo che si farà con sostituire nella seconda equazione il valore trovato di $p$, il valore di $q$ preso dalla prima, e il valore di $t$ preso dalla quarta, con che si avrà $\frac{m^3+3m^2-m+3}{3+2m}+m\sqrt{-3-m}+\frac{18\sqrt{3+2m}}{m+3m^2-m+3}=-1$, da cui ricavasi l'equazione cercata $m^6+9m^5+25m^4+15m^3-80m^2-186m-180=0$, della quale quattro radici sono immaginarie, e due reali, che sono 2, $-5$. Si sostituiscano questi due valori in luogo di $m$ nel fattore $x^2+mx+\frac{m^3+3m^2-m+3}{3+2m}=0$, e si avranno le due seguenti equazioni di secondo grado $x^2-5x+6=0$; $x^2+2x+3=0$, che sono i due fattori, ne' quali si risolve la data equazione di quarto grado.

641.

Collo ſteſſo metodo ſi potrà riſolvere qualſivoglia equazione in due fattori comunque; ma poichè l'equazione in $m$, che ricavaſi dalle eliminazioni, aſcende a un grado molto maggiore della propoſta, e però inchiude una difficoltà aſſai maggiore, quindi è, che il metodo non è ſervibile al biſogno; ed io ne ho parlato ſoltanto, acciò ſi veda l'uſo, che ſi può fare del calcolo.

## METODO II.

*Mediante il ſupporre una radice dell' equazione di queſta forma* $x=m+n+p$ ec., *in cui il numero delle lettere* m, n ec. *deve eſſere uguale al grado dell' equazione da riſolverſi diminuito di una unità.*

638. IL preſente metodo di cui ſiamo debitori al Sig. Varignon eſige, che dalle equazioni da riſolverſi ſia levato il ſecondo termine. Egli conſiſte in ſupporre una radice $x$ dell' equazione uguale alla ſomma di tante lettere indeterminate quante ne eſprime il maſſimo eſponente dell' equazione diminuito di una unità, onde ſi farà

| | |
|---|---|
| Per le equazioni di terzo grado | $x = m + n$ |
| Per quelle del quarto | $x = m + n + p$ |
| del quinto | $x = m + n + p + q$ |
| del ſeſto | $x = m + n + p + q + r$ |
| del ſettimo | $x =$ ec. |

Fatta queſta ſuppoſizione ſi alzi l'uno, e l'altro membro della ſuppoſta equazione al grado dell' equazione da riſolverſi, che ſia per Eſempio $t$, indi nella potestà $\overline{m+n+p}$ ec.$^t$, che forma il ſecondo membro della preſente equazione, ſi diſtinguano i fattori $\overline{m+n+p}$ ec.$^{t-1}$; $\overline{m+n+p}$ ec.$^{t-2}$; $\overline{m+n+p}$ ec.$^{t-3}$ ec., che corriſpondono ad $x^{t-1}$; $x^{t-2}$; $x^{t-3}$ ec., e in vece di quelle quantità ſi ſoſtituiſcano queſte, che gli ſono uguali, lo che fatto ſi avrà una equazione, che deve eſſere identica alla propoſta, ſtante che ella riſulta dall' aggregato dell' incognita, e di una quantità, che per Ipoteſi è una radice dell'equazione da riſolverſi, elevato al medeſimo grado: Per lo che facendo il paragone dei coefficienti di una coi coefficienti dell'altra, ſi verranno a ſcuoprire i valori delle aſſunte indeterminate $m$, $n$, $p$ ec; e però ad avere la radice cercata. L' Eſempio metterà ſotto gli occhi, e renderà evidente quanto ho detto.

639. E primieramente nelle equazioni di ſecondo grado queſto metodo non ha luogo, poichè ſupponendo egli le equazioni prive del ſecondo termine, in tal caſo le equazioni di ſecondo grado diventano pure, e però non eſigono per la loro riſoluzione alcun artifizio. Quanto alle equazioni di terzo grado ſi veda egli meſſo in pratica al num. 585., in cui per la loro riſoluzione ne ho fatto uſo: Sicchè paſſiamo ad applicarlo alle equazioni di quarto grado, riſpetto alle quali ſi dovrà ſupporre $x=m+n+p$. Prima però n'è neceſſario premettere il ſeguente

640. Prob. Nel quadrato-quadrato di $m+n+p$ ſi debba ritrovare ciò, che moltiplica $\overline{m+n+p}^2$, ciò, che moltiplica $m+n+p$, e ciò, che ſi può chiamare l'omogeneo di comparazione.

641. Risol. Pel num. 263, è $\overline{m+n+p}^4 = \overline{m+n}^4 + 4p \times \overline{m+n}^3 + 2p^2 \times \overline{m+n}^2 + 4p^3 \times \overline{m+n} + p^4$: Ma (per lo stesso num.) si ha $\overline{m+n+p}^2 = \overline{m+n}^2 + 2p \times \overline{m+n} + p^2$, mediante la quale equazione si ha il valore di $\overline{m+n}^2$, che è $\overline{m+n}^2 = \overline{m+n+p}^2 - 2p \times \overline{m+n} - p^2$, il quale sostituito nella precedente equazione nel termine $2p^2 \times \overline{m+n}^2$, la trasforma nella seguente $\overline{m+n+p}^4 = \overline{m+n}^4 + 4p \times \overline{m+n}^3 + 2p^2 \times \overline{m+n+p}^2 - 4p^3 \times \overline{m+n} - 2p^4 + 4p^2 \times \overline{m+n}^2 + 4p^3 \times \overline{m+n} + p$, cioè con togliere i termini, che si elidono.

(A) $\overline{m+n+p}^4 = \overline{m+n}^4 + 4p \times \overline{m+n}^3 + 2p^2 \times \overline{m+n+p}^2 + 4p^2 \times \overline{m+n}^2 - p^4$. Ora essendo $\overline{m+n}^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$, cioè $\overline{m+n}^4 = 4mn \times \overline{m+n}^2 - 2m^2n^2 + m^4 + n^4$, in cui sostituendo il valore di $\overline{m+n}^2$ poc'anzi trovato, si cambia ella in $\overline{m+n}^4 = 4mn \times \overline{m+n+p}^2 - 8mnp \times \overline{m+n} - 4mnp^2 - 2m^2n^2 + m^4 + n^4$. Si collochi pertanto questo valore di $\overline{m+n}^4$ nell'equazione (A) e si avrà $\overline{m+n+p}^4 = \overline{4mn+2p^2} \times \overline{m+n+p}^2 - 8mnp \times \overline{m+n} - 4mnp^2 - 2m^2n^2 + m^4 + n^4 + 4p \times \overline{m+n}^2 + 4p^2 \times \overline{m+n}^2 - p^4$, la quale con fare gli attuali prodotti di $-8mnp \times \overline{m+n} + 4p \times \overline{m+n}^3$, $4p^2 \times \overline{m+n}^2$, trovasi essere $\overline{m+n+p}^4 = \overline{4mn+2p^2} \times \overline{m+n+p}^2 - 2m^2n^2 + m^4 + n^4 - p^4 + 4p \times m^2p + m^3 + n^2 + mn^2 + n^2p + m^2n + mnp$: E poichè $m^2p + m^3 + n^3 + mn^2 + n^2p + m^2n + mnp = \overline{m^2+n^2} \times \overline{m+n+p} + mnp$, come costa dal dividere la detta quantità per $m+n+p$, però fatta la sostituzione di questo valore, si avrà finalmente $\overline{m+n+p}^4 = \overline{4mn+2p^2} \times \overline{m+n+p}^2 + \overline{4m^2p+4n^2p} \times \overline{m+n+p} + 4mnp^2 - 2m^2n^2 + m^4 + n^4 - p^4$, lo che si doveva trovare.

642. Veniamo adesso alla risoluzione delle equazioni quadrato-quadrate. A tale oggetto prendo l'equazione nella precedente soluzione trovata, e vi sostituisco $x^4$ in luogo di $\overline{m+n+p}^4$; $x^2$ in luogo di $\overline{m+n+p}^2$, ed $u$ in luogo di $m+n+p$, con che essa diventa $x^4 - \overline{4mn-2p^2} \times x^2 - \overline{4m^2p-4n^2p} \times x - 4mnp^2 + 2m^2n^2 - m^4 - n^4$

$n^4+p^4=0$. Di queſta equazione poſcia mi ſervo per fare i neceſſarj paragoni coi termini dell'equazione da riſolverſi.

643. Sia propoſta da riſolverſi l'equazione $x^4-a^2x^2-ab^2x+a^2b^2=0$. Dal paragone dei coefficienti di queſta coi coefficienti della precedente ſi ha $4mn+2p^2=a^2$; $4m^2p+4n^2p=ab^2$; $-4mnp^2+2m^2n^2-m^4-n^4+p^4=a^2b^2$. Dalla prima ſi ha tanto $4mn=a^2-2p^2$, come $2mn=\frac{a^2}{2}-p^2$, che elevata al quadrato è $4m^2n^2=\frac{a^4}{4}-a^2p^2+p^4$. Dalla ſeconda equazione ſi ha $m^2+n^2=\frac{ab^2}{4p}$, che alzata al quadrato è $m^4+2m^2n^2+n^4=\frac{a^2b^4}{16p^2}$. La terza equazione ſi diſponga così $-4mnp^2+p^4=a^2b^2+m^4-2m^2n^2+n^4$, di cui all'uno, e all'altro membro ſi aggiunga $4m^2n^2$, e ſi avrà $4m^2n^2-4mnp^2+p^4=a^2b^2+m^4+2m^2n^2+n^4$. In queſta equazione ſi ſoſtituiſcano i poc'anzi ritrovati valori di $4mn$, di $4m^2n^2$, e di $m^4+2m^2n^2+n^4$, ed ella ſi cambierà nella ſeguente $\frac{a^4}{4}-a^2p^2+p^4-a^2p^2+2p^4+p^4=a^2b^2+\frac{a^2b^4}{16p^2}$, cioè $\frac{a^4}{4}-2a^2p^2+4p^4=a^2b^2+\frac{a^2b^4}{16p^2}$, e togliendo il denominatore $p^2$, ordinando l'equazione per $p$, e liberando la maſſima poteſtà di $p$ dal coefficiente, ſi avrà finalmente $p^6-\frac{1}{2}a^2p^4-\frac{1}{4}a^2b^2p^2+\frac{1}{16}a^2p^2-\frac{1}{64}a^2b^4=0$. Queſta è un'equazione derivativa del terzo grado, mediante la quale ſi ha il valore di $p$, che deve eſſere reale (pel num. 580), e che preſentemente io chiamerò $=A$. Si collochi queſto valore di $p$ nelle due prime equazioni $4mn+2p^2=a^2$; $4m^2p+4n^2p=ab^2$, e ſi avrà $4mn+2A^2=a^2$; $4Am^2+4An^2=ab^2$. Dalla prima ſi prenda il valore di $n$, che è $\frac{a^2-2A^2}{4m}=n$, il di cui quadrato è $n^2=\frac{\overline{a^2-2A^2}^2}{16m^2}$, e queſto valore di $n^2$ ſi ponga nella ſeconda equazione, con che ella diverrà $4Am^2+4A\sqrt{\frac{\overline{a^2-2A^2}^2}{16m^2}}=ab^2$, la quale con togliere il diviſore $m^2$, con ordinarla per $m$, e liberare dal coefficiente la maſſima poteſtà di $m$, diventa $m^4-\frac{ab^2m^2}{4A}+\frac{\overline{a^2-2A^2}^2}{16}=0$. Mediante queſta equazione, che è derivativa del ſecondo grado ſi ottiene il valore di $m$, che ſuppongo $=B$. Si mettano per ultimo i ritrovati valori di $m$, $p$ nella prima equazione $4mn+2p^2=a^2$, e ſi avrà il valore di $n$. Fatte le ſoſtituzioni ne viene $4Bn+2A^2=a^2$, e però $n=\frac{a^2-2A^2}{4B}$, quale ſi chiami $=C$. La cercata radice adunque della propoſta equazione è $x=A+B+C$, che ſi doveva trovare.

644. Io mi contenterò di queſto ſolo Eſempio, perchè, quantunque queſto metodo ſia cattolico, è però nel tempo ſteſſo laborioſiſſimo, ed eſige calcoli molto penoſi, ond'è, che meritamente viene poſpoſto ad altri metodi molto più ſempli-

plici, e facili. Ho ſtimato bene eſporlo ſuccintamente a fine di nulla laſciare di quanto ſu queſto punto hanno tentato gli Analiſti.

645. Le difficoltà, che ſeco porta queſto metodo ſono due. La prima ſi incontra nello ſciogliere il problema, con cui devonſi trovare le quantità (eſſendo $t$ il grado dell'equazione), che moltiplicano la ſuppoſta radice $m+n+p$ ec. elevata alle poteſtà $t-2$, $t-3$, $t-4$ ec.; mentre per le equazioni di quinto grado nella quinta poteſtà di $m+n+p+q$ ſi deve diſtinguere ciò, che moltiplica $\overline{m+n+p+q}^{3}$, ciò, che moltiplica $\overline{m+n+p+q}^{2}$, $m+n+p+q$, e ciò, che può chiamarſi l'omogeneo di comparazione. Per la riſoluzione delle equazioni di ſeſto grado nella ſeſta poteſtà di $m+n+p+q+s$ deveſi diſtinguere ciò, che moltiplica $\overline{m+n+p+q+s}^{4}$, ciò, che moltiplica $\overline{m+n+p+q+s}^{3}$, ciò, che moltiplica $\overline{m+n+p+q+s}^{2}$, ciò, che moltiplica $m+n+p+q+s$, e ciò, che ſi può chiamare l'omogeneo di comparazione ec. Queſti Problemi poi ſi ſcioglieranno in un modo analogo a quello, che ho tenuto nel num. 641.

646. La ſeconda difficoltà riguarda la determinazione dei valori di $m$, $n$, $p$, $q$ ec., poichè queſti valori non ſi poſſono avere ſenza riſolvere altrettante equazioni, quante ſono le indeterminate $m$, $n$, $p$ ec., cioè quante ne moſtra il maſſimo eſponente $t$ dell'equazione da riſolverſi diminuito di una unità; per lo che per avere la radice $m+n+p+q$ ec. di una equazione di quinto grado ſi dovrà riſolvere una equazione del quarto, una del terzo, una del ſecondo, e una del primo, e generalmente per determinare la radice di una equazione del grado $t$, biſognerà riſolvere tutte le equazioni dei ſeguenti gradi $t-1$, $t-2$, $t-3$, $t-4$ ec.

## METODO III.

*Per tutte le equazioni, che ammettono una radice della forma*

$$\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}m+\sqrt{\tfrac{1}{4}m^{3}+\tfrac{1}{27}p^{n}}}+\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}m-\sqrt{\tfrac{1}{4}m^{3}+\tfrac{1}{27}p^{n}}}$$

647. Abbiamo veduto al num. 585., che le equazioni cubiche ricevono una radice della forma precedente. Eſſe però non ſono le ſole equazioni, che ammettano per radice reale la ſomma di due radicali del di lei medeſimo grado, come per mezzo delle ſerie ricorrenti ce ne reſe avvertiti il Sig. Moivre. Prima di tutto però biſogna determinare quali ſiano queſte equazioni, lo che ſi otterrà con iſcuoprire la legge, che fra ſe oſſervano i loro coefficienti. Per farlo intanto prendo l'equazione ecumenica $x^{n}+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}+fx^{n-6}$ ec.... $+A=0$, e poichè deve eſſere $x=\sqrt[n]{R}+\sqrt[n]{S}$; o ſia per maggiore facilità del calcolo $x=r+s$ (ſupponendoſi $\sqrt[n]{R}=r$, $\sqrt[n]{S}=s$), ſi ſoſtituiſcano nella precedente equazione in luogo di $x^{n}$, $x^{n-1}$, $x^{n-2}$ ec. le quantità $\overline{r+s}^{n}$, $\overline{r+s}^{n-1}$, $\overline{r+s}^{n-2}$ ec. Perchè poi $r+s$ è (per ipoteſi) radice dell'equazione, mediante la di lei ſoſtituzione l'equazione ſteſſa deve verificarſi (pel num. 318.); cioè deve andare a zero

ro l'aggregato dei di lei termini, lo che non potendo ſuccedere ſenza che ſcambievolmente ſi diſtruggano tutti i radicali, converrà che oſſervino fra loro i coefficienti dell'equazione una tale relazione, mediante cui ciò ſi effettui. Tentiamo adunque di determinare queſto rapporto. Faccio pertanto le accennate ſoſtituzioni, e ne ho l'equazione $\overline{r+s}^n + a\overline{r+s}^{n-1} + b\overline{r+s}^{n-2} + c\overline{r+s}^{n-3} + d\overline{r+s}^{n-4} + e\overline{r+s}^{n-5}$ ec.... $+A=0$, la quale con fare le attuali potenze di $r+s$ (giuſta il num. 256.) ſi cambia nella ſeguente.

Primo termine $r^n + nr^{n-1}s + n\frac{n-1}{2}r^{n-2}s^2 + n\frac{n-1}{2\times 3}\overline{n-2}\,r^{n-3}s^3 +$

$n\frac{n-1}{2\times 3}\overline{n-2}\frac{n-3}{4}r^{n-4}s^4$ ec.... $+s^n$.

Secondo termine $ar^{n-1} + a\overline{n-1}\,r^{n-2}s + a\frac{n-1}{2}\overline{n-2}\,r^{n-3}s^2 +$

$a\frac{n-1}{2\times 3}\overline{n-2}\frac{n-3}{4}r^{n-4}s^3 + a\frac{n-1}{2\times 3}\overline{n-2}\frac{n-3}{4}\overline{n-4}\,r^{n-5}s^4$ ec.... $+as^{n-1}$

Terzo termine $br^{n-2} + b\overline{n-2}\,r^{n-3}s + b\frac{n-2}{2}\overline{n-3}\,r^{n-4}s^2 +$

$b\frac{n-2}{2\times 3}\overline{n-3}\frac{n-4}{4}r^{n-5}s^3 + b\frac{n-2}{2\times 3}\overline{n-3}\frac{n-4}{4}\overline{n-5}\,r^{n-6}s^4$ ec.... $+bs^{n-2}$.

Quarto termine $cr^{n-3} + c\overline{n-3}\,r^{n-4}s + c\frac{n-3}{2}\overline{n-4}\,r^{n-5}s^2 +$

$c\frac{n-3}{2\times 3}\overline{n-4}\frac{n-5}{4}r^{n-6}s^3 + c\frac{n-3}{2\times 3}\overline{n-4}\frac{n-5}{4}\overline{n-6}\,r^{n-7}s^4$ ec.... $+cs^{n-3}$.

Quinto termine $dr^{n-4} + d\overline{n-4}\,r^{n-5}s + d\frac{n-4}{2}\overline{n-5}\,r^{n-6}s^2 +$

$d\frac{n-4}{2\times 3}\overline{n-5}\frac{n-6}{4}r^{n-7}s^3 + d\frac{n-4}{2\times 3}\overline{n-5}\frac{n-6}{4}\overline{n-7}\,r^{n-8}s^4$ ec.... $+ds^{n-4}$

Collo ſteſſo metodo ſi continui a trovare gli altri ſuſſeguenti termini dell'equazione. I già ritrovati termini ſi diſpongano per maggiore comodità così.

Primo termine $r^n + s^n + nrs\overline{r^{n-2} + s^{n-2}} + n\frac{n-1}{2}r^2s^2\overline{r^{n-4} + s^{n-4}}$

$+ n\frac{n-1}{2\times 3}\overline{n-2}\,r^3s^3\overline{r^{n-6} + s^{n-6}} + n\frac{n-1}{2\times 3}\overline{n-2}\frac{n-3}{4}r^4s^4\overline{r^{n-8} + s^{n-8}}$ ec.

Se-

Secondo termine $ar^{n-1}+as^{n-1}+a\times\frac{n-1}{1}\times rs\times r^{n-3}+s^{n-3}+$

$a\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}r^2s^2\times r^{n-5}+s^{n-5}+a\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}r^3s^3\times r^{n-7}+s^{n-7}+$

$a\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}\times\frac{n-4}{4}r^4s^4\times r^{n-9}+s^{n-9}$ ec.

Terzo termine $br^{n-2}+bs^{n-2}+b\times\frac{n-2}{1}\times rs\times r^{n-4}+s^{n-4}+$

$b\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}r^2s^2\times r^{n-6}+s^{n-6}+b\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-4}{3}r^3s^3\times r^{n-8}+s^{n-8}+$

$b\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-4}{3}\times\frac{n-5}{4}r^4s^4\times r^{n-10}+s^{n-10}$

Quarto termine $cr^{n-3}+cs^{n-3}+c\times\frac{n-3}{1}\times rs\times r^{n-5}+s^{n-5}+$

$c\times\frac{n-3}{1}\times\frac{n-4}{2}s^2s^2\times r^{n-7}+s^{n-7}+c\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-4}{2}\times\frac{n-5}{3}r^3s^3\times r^{n-9}+s^{n-9}$

Quinto termine $dr^{n-4}+ds^{n-4}+d\times\frac{n-4}{1}\times rs\times r^{n-6}+s^{n-6}+$

$d\times\frac{n-4}{1}\times\frac{n-5}{2}r^2s^3\times r^{n-6}+s^{n-6}+d\times\frac{n-4}{1}\times\frac{n-5}{2}\times\frac{n-6}{3}r^3s^3\times r^{n-10}+s^{n-10}.$

648. Chi offerverà i precedenti termini ſcorgerà, che due ſoli ſono razionali, cioè $r^n$, $s^n$, e gli altri tutti ſono irrazionali, dei quali i ſimili coi ſimili ſi dovranno vicendevolmente diſtruggere, affinchè ſi verifichi, che $r+s$, o ſia $\sqrt[n]{R}+\sqrt[n]{S}$ ſia una radice dell'equazione. Cominciamo adunque a paragonare fra loro i termini ſimili, quelli cioè, che hanno lo ſteſſo eſponente, a fine di ſcuoprire la relazione, che deve paſſare fra i coefficienti, acciocchè i termini ſimili ſi diſtruggano fra loro. Si paragonino pertanto i termini $nr^{n-1}s+nrs^{n-1}$, che ſi trovano nel valore di $x^n$, coi termini $ar^{n-1}+as^{n-1}$, che ſi trovano nel valore di $x^{n-1}$, e ſi avrà $nr^{n-1}s+nrs^{n-1}=ar^{n-1}+as^{n-1}$. Ora acciò ſi elidano i due termini $nr^{n-1}s$, $ar^{n-1}$ deve eſſere $a=-ns$, ed affinchè ſvaniſcano i due termini $nrs^{n-1}$, $as^{n-1}$, deve eſſere $a=-nr$; ma ciò non può eſſere, perchè $a$ non può eſſere nel tempo ſteſſo uguale a due diverſe quantità, onde qualunque ſia il valore di $a$ non ſi potranno mai elidere i termini $nr^{n-1}s+nrs^{n-1}$, $ar^{n-1}+as^{n-1}$. Maſe ſarà $a=0$, in tal caſo ſpariranno i termini $ar^{n-1}+as^{n-1}$, e gli altri due ſi ridurranno alla forma $nrs\times r^{n-3}+s^{n-3}$, che non cadono ſotto al preſente paragone. Se adunque l'equazione da riſolverſi non è priva del ſecondo termine, ella non ſi può verificare mediante una radice della forma $\sqrt[n]{R}+\sqrt[n]{S}$.

649

649. Quanto ai termini, ne'quali entra $r^{n-2}$, $s^{n-2}$ ricerchiamo cosa si richieggа, affinchè si elidano. Dal loro paragone si ha $-nrs \times \overline{r^{n-2}+s^{n-2}} = br^{n-2} + bs^{n-2}$, da cui si ricava $b = -nrs$, cioè a dire si elideranno questi termini ogni qual volta sia $b = -nrs$.

650. Il paragone dei termini, ne' quali entra $r^{n-3}$, $s^{n-3}$, dà

$$-n \times \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3} r^{n-3}s^3 + r^3 s^{n-3} = b \times \overline{n-2} \times r^{n-3}s + rs^{n-3} + cr^{n-3} + cs^{n-3},$$

in cui dopo essersi sostituito il poc'anzi trovato valore di $b$, si scuopre non potersi in modo alcuno verificare; se però sarà $c = 0$, spariranno i due termini $cr^{n-3} + cs^{n-3}$, e gli altri si ridurranno alla seguente forma

$$n \times \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3} r^3 s^3 \times \overline{r^{n-6}+s^{n-6}} + b \times \overline{n-2} \times rs \times \overline{r^{n-4}+s^{n-4}},$$

onde non spettano al presente paragone. Acciò dunque l'equazione si verifichi deve mancare ancora il quarto termine.

651. Passiamo adesso a paragonare i termini ne'quali entra $r^{n-4}$, $s^{n-4}$, dal qual paragone si ha $-n \times \frac{\overline{n-1}}{2} r^3 s^3 \times \overline{r^{n-4}+s^{n-4}} = b \times \overline{n-2} \times rs \times \overline{r^{n-4}+s^{n-4}} + dr^{n-4} + ds^{n-4}$, da cui col sostituirsi il valore trovato di $b$, ne viene

$$d = n \times \frac{\overline{n-3}}{2} r^3 s^3.$$

652. Paragonandosi i termini, ne' quali entra $r^{n-5}$, $s^{n-5}$, si trova, che in niuna maniera si possono elidere, e però acciò si verifichi l'equazione deve mancare ancora il sesto termine, e lo stesso si troverà rispetto all' ottavo, al decimo, e a tutti gli altri in posto pari.

653. Svaniranno i termini, in cui entra $r^{n-6}$, $s^{n-6}$, ogni qual volta sia $f = -n \times \frac{\overline{n-4} \times \overline{n-5}}{2 \times 3} r^3 s^3$, lo che ricavasi dall'equazione

$$-n \times \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3} r^3 s^3 = b \times \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-3}}{2} r^2 s^2 + d \times \overline{n-4} \times rs + f.$$

Nella stessa maniera si determineranno i valori degli altri coefficienti dei termini in posto impari.

654. Siccome poi i coefficienti dell'equazione da risolversi sono razionali, e nei determinati valori dei coefficienti $b$, $d$, $f$ ec. si trovano le quantità $rs$, $r^2s^2$ ec., quindi ognun vede, che deve essere $rs$ una quantità razionale, il che succederà ogni qual volta le due parti della radice cercata siano tali, che dal loro prodotto si possa levare la radice indicata dal grado dell'equazione.

655. Le equazioni adunque, che possono avere una radice della forma Cardanica devono primieramente essere prive dei termini esistenti in posto pari; in secondo luogo i coefficienti numerici convenienti a ciascun termine devono essere i seguenti.

$$\text{I} = n;$$

$$\text{II} = n \times \frac{n-3}{2};$$

$$\text{III} = n \times \frac{n-4 \times n-5}{2 \times 3};$$

$$\text{IV} = n \times \frac{n-5 \times n-6 \times n-7}{2 \times 3 \times 4};$$

$$\text{V} = n \times \frac{n-6 \times n-7 \times n-8 \times n-9}{2 \times 3 \times 4 \times 5};$$

$$\text{VI} = n \times \frac{n-7 \times n-8 \times n-9 \times n-10 \times n-11}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6};$$

$$\text{VII} = n \times \frac{n-8 \times n-9 \times n-10 \times n-11 \times n-12 \times n-13}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} \text{ ec.}$$

656. Che ſe in queſti coefficienti indeterminati ſi ſoſtituiranno ſucceſſivamente i numeri 2, 3, 4, 5, 6 ec. indicanti i gradi delle equazioni, ſi avranno i coefficienti numerici, che convengono a ciaſcun termine di tali equazioni, come ſi può vedere nella ſeguente Tavola, in cui i numeri romani della prima colonna verticale eſprimono i gradi delle equazioni, e i numeri arabici della prima fila orizzontale eſprimono l'ordine di ciaſcun termine: Le altre file poi orizontali eſibiſcono i coefficienti numerici, che devono avere i termini dell' equazione indicata dal corriſpondente numero romano.

TA-

## TAVOLA.

| | 2. | 3. | 4 | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 2 | | | | | | | | | |
| III | 3 | | | | | | | | | |
| IV | 4 | 2 | | | | | | | | |
| V | 5 | 5 | | | | | | | | |
| VI | 6 | 9 | 2 | | | | | | | |
| VII | 7 | 14 | 7 | | | | | | | |
| VIII | 8 | 20 | 16 | 2 | | | | | | |
| IX | 9 | 27 | 30 | 9 | | | | | | |
| X | 10 | 35 | 50 | 25 | 2 | | | | | |
| XI | 11 | 44 | 77 | 55 | 11 | | | | | |
| XII | 12 | 54 | 112 | 105 | 36 | 2 | | | | |
| XIII | 13 | 65 | 156 | 182 | 91 | 13 | | | | |
| XIV | 14 | 77 | 210 | 294 | 196 | 49 | 2 | | | |
| XV | 15 | 90 | 275 | 450 | 378 | 140 | 15 | | | |
| XVI | 16 | 104 | 352 | 660 | 672 | 336 | 64 | 2 | | |
| XVII | 17 | 119 | 442 | 935 | 1122 | 714 | 204 | 17 | | |
| XVIII | 18 | 135 | 546 | 1287 | 1782 | 1386 | 540 | 81 | 2 | |
| XIX | 19 | 152 | 665 | 1729 | 2717 | 2508 | 1254 | 285 | 19 | |
| XX | 20 | 170 | 800 | 2275 | 4004 | 4290 | 2640 | 825 | 100 | 2 |

657. Già abbaſtanza ognun vede con che legge procedono i ritrovati coefficienti numerici, onde poterne prolungare la ſerie a piacere, e così proſeguire la precedente Tavola.

658. Mediante i coefficienti, che devono convenire ai termini dell'equazione, ritrovati ai num. 649, 651, 653, ſi può formare l'equazione ecumenica rappreſentante tutte le equazioni, che ammettono una radice della forma Cardanica, quale ſarà la ſeguente $x^n - nrsx^{n-2} + n\times\frac{\overline{n-3}}{2}r^2s^2x^{n-4} - n\times\frac{\overline{n-4}\times\overline{n-5}}{2\times3}r^3s^3x^{n-6} +$

$$n\times\frac{\overline{n-5}\times\overline{n-6}\times\overline{n-7}}{2\times3\times4}r^4s^4x^{n-8} - n\times\frac{\overline{n-5}\times\overline{n-7}\times\overline{n-8}\times\overline{n-9}}{2\times3\times4\times5}r^5s^5x^{n-10} + \text{ec.....}$$

$-r^n-s^n=0$. Qualora pertanto debbaſi riſolvere una equazione, che abbia le già ſcoperte condizioni, baſterà paragonare il coefficiente del ſecondo termine, e l'ultimo termine dell'equazione data con i corriſpondenti di queſta equazion generale, e per mezzo di un tal paragone determinare i valori di $r$, $s$, mentre ſe queſti valori ſi ſoſtituiranno nella ſuppoſta radice $x=r+s$, ſi otterrà la radice cercata.

659. Si debba per Eſempio trovare la radice Cardanica, che ha l'equazione $x^6-6bx^4+9b^2x^2-2d=0$. Si paragonino il coefficiente del ſecondo, e il di lei ultimo termine col coefficiente del ſecondo, e coll'ultimo termine dell'equazione generale, e ſi avrà $6b=6rs$, o ſia $b=rs$, e $2d=r^6+s^6$. Dalla prima equazione ſi ha

$r=\frac{b}{s}$, che elevata alla ſeſta poteſtà è $r^6=\frac{b^6}{s^6}$. Soſtituendoſi queſto valore di $r^6$ nella ſeconda equazione, ne verrà $2d=\frac{b^6}{s^6}+s^6$, che ordinata è $s^{12}-2ds^6+b^6=0$, in cui facendoſi $s^6=y$, ſi cambierà eſſa nella ſeguente $y^2-2dy+b^6=0$, che riſoluta è $y=d\pm\sqrt{d^2-b^6}$, cioè (con rimetterſi $s^6$ in luogo di $y$) $s^6=d\pm\sqrt{d^2-b^6}$, e però $s=\sqrt[6]{d\pm\sqrt{d^2-b^6}}$. Nello ſteſſo modo operando ſi troverà $r=\sqrt[6]{d\mp\sqrt{d^2-b^6}}$: Quindi la cercata radice è

$$x=\sqrt[6]{d\pm\sqrt{d^2-b^6}}+\sqrt[6]{d\mp\sqrt{d^2-b^6}}.$$

660. Ritrovata una radice, ſi avranno le altre con moltiplicare la radice trovata in tutte le radici d'egual grado dell'unità, relativamente alla maniera praticata al num. 585. cioè a dire, ſe la radice trovata è del grado $n$, in tutte le radici dell'equazione $y^n-1=0$: Ma ſiccome queſta equazione $y^n-1=0$ ha una ſola radice reale, ſe l'eſponente $n$ è un numero impari, e due ſe $n$ è un numero pari, e tutte l'altre ſono immaginarie, perciò tali pure devono eſſere le radici dell'equazione propoſta da riſolverſi; che ſe ella avrà tutte le radici reali, la ſoluzione eſpoſta involverà il caſo irreduttibile.

661. Quantunque il modo di determinare i valori di $r$, $s$, e così avere la radice cercata, mediante l'accennato paragone de' termini goda di tutta la ſemplicità, e facilità, pure mi ſembra non dovrà eſſere diſcaro, che qui ſoggiunga, come ciò ancora ottenere ſi poſſa per mezzo delle due ſeguenti equazioni generali A, B, o ſia di una equazione in due diverſe maniere eſpreſſa.

$$\text{(A)}\quad 2ym^{n-1}=\sqrt[n]{x+\sqrt{xx-mm}}+\sqrt[n]{x-\sqrt{xx-mm}}$$

$$\text{(B)}\quad 2xm^{\frac{1}{n}-1}=\sqrt[n]{y+\sqrt{yy-mm}}^{\frac{1}{n}}+\sqrt[n]{y-\sqrt{yy-mm}}^{\frac{1}{n}}$$

Prima però è meſtiere dimoſtrare, che valendo una di queſte equazioni, vale anche l'altra; Di fatto ſi alzi al quadrato l'equazione (A), e ſi avrà $4y^2m^{2n-2}=x+\sqrt{xx-mm}^{2n}+2m^{2n}+x-\sqrt{xx-mm}^{2n}$, e ſottraendo $4m^{2n}$ dall'uno, e dall'altro membro di queſta equazione ſi avrà $4y^2m^{2n-2}-4m^{2n}=x+\sqrt{xx-mm}^{2n}+2m^{2n}-4m^{2n}+x-\sqrt{xx-mm}^{2n}$, cioè $4m^{2n-2}\times y^2-m^2=x+\sqrt{xx-mm}^{2n}-2m^{2n}+x-\sqrt{xx-mm}^{2n}$, da cui levando la radice quadrata ſi ha (D) $2m^{n-1}\sqrt{y^2-m^2}=$

$= \pm x + \sqrt{xx-mm}^{n} \mp x - \sqrt{xx-mm}^{n}$, la quale (ſecondo che in lei ha luogo il ſegno ſuperiore, o inferiore) ſi aggiunga all'equazione [A], o dalla medeſima ſi ſottragga, e ſi avrà $2ym^{n-1} + 2m^{n-1}\sqrt{y^2-m^2}^{n} = 2 \times x + \sqrt{xx-mm}^{n}$, cioè $m^{n-1} \times y \pm \sqrt{y^2-m^2}^{n} = x + \sqrt{xx-mm}^{n}$, dalla quale ſi levi la radice $n$, così $m^{1-\frac{1}{n}} \times y \pm \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}} = x + \sqrt{xx-mm}$, ma perchè $m^{1-\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{\frac{1}{n}-1}}$, però eſſa ſarà $m^{\frac{1}{\frac{1}{n}-1}} \times y \pm \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}} = x + \sqrt{xx-mm}$, cioè [E] $m^{\frac{1}{n}-1} \times x + \sqrt{xx-mm} = y \pm \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}}$. Di nuovo ſi ſottragga l'equazione (D) dall'equazione (A), o vi ſi aggiunga (ſecondo che nell'equazione (D) ha luogo il ſegno ſuperiore, o inferiore), e ſi avrà $2m^{n-1} \times y \mp \sqrt{y^2-m^2}^{n} = 2 \times x - \sqrt{xx-mm}^{n}$, cioè (coll'eſtraerci la radice $n$) $m^{1-\frac{1}{n}} \times y \mp \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}} = x - \sqrt{xx-mm}$, e però per la ragione poc'anzi detta $m^{\frac{1}{n}-1} \times x - \sqrt{xx-mm} = y \mp \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}}$. Si ſommi adeſſo queſta equazione coll'equazione [E], e ne verrà $2xm^{\frac{1}{n}-1} = y + \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}} + y - \sqrt{y^2-m^2}^{\frac{1}{n}}$, che è la ſteſſa equazione (B); quindi poſta l'equazione (A) ſuſſiſte anche la (B). Nella ſteſſa maniera operando dall'equazione (B) ſi paſſerà all'equazione (A).

*662.* Si oſſervi, che nell'equazione (D) ſi deve far uſo del ſegno ſuperiore +, quando l'eſponente $n$ è poſitivo, ma ſe l'eſponente $n$ ſarà negativo, ſi dovrà far uſo del ſegno inferiore —, affinchè il di lei ſecondo membro ſia poſitivo.

*663.* Ciò poſto veniamo al modo di uſare queſte due formole generali per avere la radice cardanica delle equazioni, di cui ora ſi tratta. Primieramente adunque ſi ſoſtituiſca nell'equazione [A] in luogo dell'eſponente indeterminato $n$ l'eſponente dell'equazione da riſolverſi, indi alla poteſtà indicata da queſto eſponente ſi alzino le quantità $m^{n-1}$, $x + \sqrt{xx-mm}^{n}$, $x - \sqrt{xx-mm}^{n}$, poſcia ſi ordini per $x$ l'equazione. Fatto ciò ſi paragonino i coefficienti di queſta equazione coi coefficienti dell'equazione da riſolverſi, e ſi determini il valore di $m$, e di $ym$, e delle ſue poteſtà, che entrano nell'equazione [B], in cui pure in luogo dell'eſponente $\frac{1}{n}$ ſi deve porre quello, che gli conviene, e fatte le debite ſoſtituzioni in queſta equazione [B], nella quale deveſi laſciare la $x$ ſola da una parte del ſegno d'egualità, da-

darà essa la radice cercata. Proporrò un solo Esempio per non diffondermi in una cosa tanto chiara.

664. Debbasi ritrovare la radice dell'equazione $x^5-5ex^3+5e^2x-b=0$. A questo fine prendo l'equazione A, e in luogo di $n$ vi pongo 5, onde essa sarà $2ym^4=\sqrt[5]{x+\sqrt{xx-mm}}+\sqrt[5]{x-\sqrt{xx-mm}}$. Alzo alla quinta potestà le due quantità $x+\sqrt{xx-mm}$, $x-\sqrt{xx-mm}$, indi ordino l'equazione per $x$, e mi viene $x^5-\frac{5}{4}m^2x^3+\frac{5}{16}m^4x-\frac{1}{16}ym^4=0$. Paragono i coefficienti di questa coi coefficienti dell'equazione proposta, e ne ho $m^2=4e$, e però $m^4=16e^2$, e $ym^4=16b$. Prendo adesso l'equazione B, e vi sostituisco $\frac{1}{5}$ in luogo di $\frac{1}{n}$, con che essa diventa $2xm^{\frac{2}{5}-1}$, o sia $2xm^{-\frac{4}{5}}$, e però $\frac{2x}{m^{\frac{4}{5}}}=\sqrt[5]{y+\sqrt{yy-mm}}+\sqrt[5]{y-\sqrt{yy-mm}}$,

conseguentemente $x=\frac{1}{2}\sqrt[5]{ym^4+\sqrt{yym^8-m^{10}}}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{ym^4-\sqrt{yym^8-m^{10}}}$. In questa espressione sostituisco per ultimo i valori di $ym^4$, $yym^8$, $m^{10}$, e ne ho finalmente la radice cercata, che è $x=\frac{1}{2}\sqrt[5]{16b+\sqrt{256b^2-1024e^5}}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{16b-\sqrt{256b^2-1024e^5}}$, cioè $x=\frac{1}{2}\sqrt[5]{16b+16\sqrt{\frac{b^2}{4}-e^5}}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{16b-16\sqrt{\frac{b^2}{4}-e^5}}$

## METODO IV.

*Mediante il ritrovare i limiti, fra' quali cadono le radici dell' equazione.*

665. Diconsi limiti di una qualunque radice quelle quantità, fra le quali essa esiste: Come se una radice non sarà maggiore di 7, nè minore di 6, questi due numeri 7, 6 saranno i di lei limiti. Circa la maniera poi di ritrovare questi limiti versa il presente merodo, lasciatoci dal Sig. Newton.

666. Abbiamo veduto ai num. 505., 511., che se una equazione avrà tutte le radici reali, con moltiplicarsi ciascun di lei termine per l'esponente, che in tal termine ha l'incognita, ne verrà un'equazione inferiore di un grado, le di cui radici saranno reali, e contenute fra le radici dell'equazione proposta. Lo stesso succederà all'equazione, che nascerà dal moltiplicarsi i termini di questa equazione trovara negli esponenti dell'incognita, e così in seguito. Data pertanto un' equazione, delle di cui radici si vogliano trovare i limiti, si moltiplichino primieramente i di lei termi-

mini nei corriſpondenti eſponenti dell' incognita, lo ſteſſo ſi faccia coll' equazione, che ne naſce, e così ſuſſeguentemente riſpetto alle altre, finchè ſi giunga ad una equazione di primo grado. Ciò fatto ſi comincino a determinare i limiti della maſſima, e della minima radice dell'equazione propoſta, cioè a dire ſi determini il numero, che è maggiore della maſſima, e il numero, che è minore della minima di lei radice, e ciò ſi otterrà con prendere il minimo numero poſitivo, il quale ſoſtituito in tutte le accennate equazioni rende in ciaſcuna poſitivo l' aggregato di tutti i termini, mentre queſto numero ſarà maggiore della maſſima radice dell'equazione propoſta; indi prendere il minimo numero negativo, il quale nelle dette equazioni ſoſtituito fa alternare da poſitivi a negativi, e da negativi a poſitivi gli aggregati di tutti i termini di ciaſcuna equazione, e tale numero ſarà minore della minima radice dell'equazione data.

667. Che poi il minimo numero poſitivo, il quale ſoſtituito nelle ritrovate equazioni rende in ciaſcuna poſitivo l' aggregato di tutti i termini, ſia maggiore della maſſima radice dell' equazione propoſta, ſiccome il minimo numero negativo, che ne fa paſſare gli aggregati da poſitivi a negativi alternativamente, ſia minore della di lei minima radice, lo dimoſtro così: E quanto al primo, poichè queſto numero rende poſitivo l' aggregato dei termini dell' equazione di primo grado, egli deve eſſere maggiore della ſua radice, la quale o è negativa, e in tal caſo egli, che è poſitivo n' è maggiore, o ella è poſitiva, e in tal caſo eſſendo eſſa unita all' incognita col ſegno —, perchè l'equazione è uguagliata a zero, non può rendere poſitivo queſto aggregato, ſe non è maggiore della ſteſſa radice. Siccome poi la radice di queſta equazione di primo grado cade fra le due radici della ſeguente equazione di ſecondo grado, però una di eſſe è minore di queſta, onde il di lei aggregato con l'incognita ſuppoſta uguale al detto numero è neceſſariamente poſitivo: Ma poichè l'equazione, eſſendo di ſecondo grado, riſulta da due fattori ſemplici, ſe uno di queſti è poſitivo, come pur ora abbiamo veduto eſſerne uno, dovrà pure eſſere poſitivo anche l'altro, altrimenti non ſarebbe poſitivo il loro prodotto, e conſeguentemente non ſarebbe poſitivo (contro l'ipoteſi) l' aggregato dei termini di queſta equazione di ſecondo grado. Per la ſteſſa ragione delle tre radici della ſeguente equazione di terzo grado due eſſendo minori della maſſima radice dell' equazione del ſecondo grado, il loro aggregato coll'incognita, ſempre ſuppoſta uguale al già detto numero poſitivo, deve eſſere poſitivo, e però poſitivo ſarà il loro prodotto; dunque perchè l'aggregato dei termini di queſta equazione di terzo grado è poſitivo per Ipoteſi, cioè a dire è poſitivo il prodotto de' ſuoi fattori, eſſendone poſitivi due, deve eſſere poſitivo anche il terzo; ma ciò non può eſſere, ſe il numero ſoſtituito in luogo dell'incognita non è maggiore anche della terza radice, che è la più grande delle altre, dunque il numero ſoſtituito è maggiore di ciaſcuna delle di lei radici. Eſtendendoſi lo ſteſſo diſcorſo alle ſeguenti equazioni di quarto, di quinto grado ec., ſi dimoſtrerà, che l'aſſunto numero è maggiore di ciaſcuna delle loro radici. Dunque il minimo numero poſitivo, che, ſoſtituito in tutte le equazioni dei limiti, rende poſitivo in ciaſcuna l' aggregato di tutti i termini, è maggiore della maſſima radice dell' equazione propoſta.

668. Da ciò neceſſariamente ne ſegue, che ſe il numero ſoſtituito renderà in qualche equazione negativo l'aggregato di tutti i termini, tale numero ſarà minore della maſſima radice dell'equazione propoſta.

669. Quanto al ſecondo il diſcorſo è pure lo ſteſſo, e primieramente ſupponiamo, che tutte le radici dell'equazione ſiano negative, nel qual caſo eſſe ſi uniranno all'incognita col ſegno +, a fine di formare i fattori ſemplici. Il numero negati-

tivo ſoſtituito in luogo di $x$ nell' ultima equazione dei limiti, che è di primo grado, dovendo rendere un'aggregato negativo dovrà eſſere maggiore nell' eſpreſſione della radice di tale equazione, ma in ſoſtanza minore della medeſima (pel num. 52.); e ſiccome la radice di queſta equazione cade tra le due radici della ſeguente equazione di ſecondo grado, delle quali perciò una deve eſſere di queſta radice maggiore, perciò il numero ſoſtituito deve in ſoſtanza eſſere di lei minore, mentre è minore della radice dell'equazione di primo grado, che della ſteſſa è minore: Eſſendo pertanto minore in ſoſtanza, e maggiore in apparenza, con che riſulta un fattore negativo, deve pure eſſere in ſoſtanza minore anche dell'altra radice, perchè il prodotto di queſti due fattori eſſendo per ipoteſi poſitivo, non può eſſere negativo un fattore, ſe non lo è anche l'altro, dunque neceſſariamente il numero ſoſtituito deve eſſere maggiore in apparenza, ma minore in ſoſtanza dell'una, e dell'altra delle due radici: Nella ſteſſa maniera continuando il diſcorſo ſi dimoſtrerà, che il numero ſoſtituito deve eſſere minore di ciaſcuna delle radici delle ſeguenti ſuperiori equazioni, e però della propoſta. Che ſe egli è minore di ciaſcuna radice quando tutte ſono negative, egli è ben chiaro, che molto più lo è quando o tutte ſono poſitive, o parte poſitive, e parte negative. Quel numero adunque negativo, che ſoſtituito in ciaſcuna equazione dei limiti ne rende gli aggregati di tutti i termini alternativamente poſitivi, e negativi, è minore della minima radice dell' equazione propoſta. Lo che dovevaſi dimoſtrare.

670. Quindi ſe il numero ſoſtituito non farà alternare i ſegni agli aggregati di tutti i termini delle equazioni dei limiti, egli ſarà maggiore della minima radice dell' equazione data.

671. Prendo l'eſempio dall' equazione $x^6+2x^5-18x^4-30x^3+81x^2+72x-108=0$, la quale ſcrivo qui ſotto inſieme colle provenienti equazioni dei limiti.

I $x^6+2x^5-18x^4-30x^3+81x^2+72x-108=0$

II $x^5+\frac{5}{3}x^4-12x^3-15x^2+27x+12=0$

III $x^4+\frac{4}{3}x^3-7\frac{1}{5}x^2-6x+5\frac{2}{5}=0$

IV $x^3+x^2-3\frac{3}{5}x-\frac{3}{2}=0$

V $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{6}{5}=0$

VI $x+\frac{1}{3}=0$

In ciaſcuna di queſte equazioni ſoſtituendo il numero 4 in luogo di $x$, gli aggregati de'loro termini riſultano tutti poſitivi, come ſi vede in (A). Dunque ſe la propoſta equazione ha tutte le radici reali, ſarà la ſua maſſima radice poſitiva minore di 4, e maggiore di 3. Ma in luogo di $x$ ſoſtituendo $-4$ nelle ſuddette equazioni, gli aggregati de'loro termini paſſano alternativamente da poſitivi a negativi, come ſi può vedere in (B). Dunque ſe la data equazione avrà tutte le radici reali, la ſua minima radice negativa ſarà minore di $-3$, e maggiore di $-4$. La condizione poi, che le radici dell'equazione ſiano reali è indiſpenſabile, perchè quando le radici ſo-

no

no immaginarie non vi si può applicare il presente metodo dei limiti (pel num. 471.), il quale esige, che l'aggregato de' termini possa passare dal positivo al negativo.

A

I $4^6+2\times4^5-18\times4^4-30\times4^3+81\times4^2+72\times4-108=+1092$

II $4^5+\frac{5}{3}\times4^4-12\times3^3-15\times4^2+27\times4+12=+562\frac{2}{3}$

III $4^4+\frac{4}{3}\times4^3-7\frac{1}{5}\times4^2-6\times4+5\frac{2}{3}=+207\frac{4}{5}$

IV $4^3+4^2-3\frac{3}{5}\times4-\frac{3}{2}=+64\frac{1}{10}$

V $4^2+\frac{2}{3}\times4-\frac{6}{5}=+17\frac{7}{15}$

VI $4+\frac{1}{3}=+4\frac{1}{3}$

B

I $4^6+2\times\overline{-4^5}-18\times4^4-30\times\overline{-4^3}+81\times4^2+72\times\overline{-4}-108=260$

II $-4^5+\frac{5}{3}\times4^4-12\times\overline{-4^3}-15\times4^2+27\times\overline{-4}+12=-165\frac{1}{3}$

III $4^4+\frac{4}{3}\times\overline{-4^3}-7\frac{1}{5}\times4^2-6\times\overline{-4}+5\frac{2}{3}=85\frac{2}{15}$

IV $-4^3+4^2-3\frac{3}{5}\times\overline{-4}-\frac{3}{2}=-35\frac{1}{10}$

V $4^2+\frac{3}{2}\times\overline{-4}-\frac{6}{5}=12\frac{2}{15}$

VI $-4+\frac{1}{3}=-3\frac{2}{3}$

672. Trovato il modo di conoscere il minimo numero positivo, che è maggiore della massima radice positiva di una qualsisia equazione, e il minimo numero negativo, che è minore della minima di lei radice, passiamo a indagare la maniera di scuoprire i numeri, che servono di limiti a tutte le di lei radici. Data una equazione, delle di cui radici si vogliano ritrovare i limiti, si risolva essa nel modo esposto in tutte le inferiori equazioni fino all'ultima di primo grado, e ciò mediante la replicata moltiplicazione dei termini di ciascuna negli esponenti dell'incognita. Dell' ultima per essere di primo grado si ha facilissimamente la radice, che per ora supporrò $=M$. Mediante quest'ultima equazione di primo grado, e la penultima del secondo, si determini (giusta il num. 666.) il minimo numero positivo $e$, che è maggiore della massima radice positiva dell'equazione di secondo grado, e il minimo numero negativo $f$, che è minore della minima di lei radice, con che si avranno i limiti delle due radici dell'equazione di secondo grado, delle quali una caderà

fra *e*, ed M, e l'altra fra M, ed *f*. Con queſti limiti ſi trovino le vere, o quaſi vere radici dell'equazione di ſecondo grado nella maniera, che darò in appreſſo al num. 675., e queſte radici ſiano H, K (ho cominciato dall'equazione di primo grado in grazia dell'ordine; per altro ſiccome le radici di una equazione di ſecondo grado ſi hanno con tutta facilità, e ſpeditezza, però ſi può dalla medeſima cominciare). Fatto ciò, con prevalerſi delle equazioni del primo, del ſecondo, e del terzo grado, ſi trovi il minimo numero poſitivo *c*, che è maggiore della maſſima radice della ſteſſa equazione di terzo grado, e il minimo numero negativo *d*, che è minore della minima di lei radice, e con ciò ſi ſaranno trovati i limiti delle tre radici dell'equazione di terzo grado, delle quali una caderà tra *c*, ed H, la ſeconda tra H, e K, la terza tra K, e *d*. Avuti queſti limiti, ſi trovino le vere, o quaſi vere radici E, F, G dell'equazione di terzo grado (pel ſeguente num. 675.). Dopo ciò ſi paſſi per mezzo delle equazioni di primo, ſecondo, terzo, e quarto grado a trovare il minimo numero poſitivo *a*, che è maggiore della maſſima radice poſitiva della ſteſſa equazione di quarto grado, e il minimo numero negativo *b*, che è minore della di lei minima radice, e con ciò ſi avranno tutti i limiti delle radici dell'equazione di quarto grado, delle quali una medierà fra *a*, ed E, la ſeconda tra E, ed F, la terza tra F, e G, e la quarta tra G, e *b*. Collo ſteſſo metodo proſeguendo ſi troveranno i limiti di tutte le radici delle altre equazioni ſuperiori. Ben è vero però che il metodo è lungo, e nojoſo.

*a* A B C D *b*
*c* E F G *d*
*e* H K *f*
M

673. Accadendo che due limiti di una radice ſiano fra loro molto diſtanti, e volendoli riſtringere finchè differiſcano di una ſola unità a motivo di avere il proſſimo valore della radice, ſi faccia così: Si diminuiſca tanto il maggiore, e ſi accreſca tanto il minore, finchè, ſoſtituendo e l'uno, e l'altro nell'equazione in luogo dell'incognita, quello che rendeva poſitivo l'aggregato di tutti i termini dell'equazione, ve lo renda tuttavia, e quello, che dava negativo l'aggregato di tutti i termini dell'equazione, continui a somminiſtrarlo negativo. La ragione poi di ciò ſi ripete dal num. 470., in cui ſi è oſſervato, che ſe ſi ſoſtituiranno in una equazione in luogo dell'incognita due quantità, delle quali una ſia maggiore, e l'altra minore di una delle ſue radici, gli aggregati de' termini, che riſulteranno da queſte ſoſtituzioni ſaranno affetti da diverſo ſegno, quando però tra le due dette quantità non cadeſſe un numero pari di radici. Per lo che ſe, ſoſtituendoſi gradatamente diverſe quantità in luogo dell'incognita, gli aggregati, che da queſte ſoſtituzioni riſulteranno, ſaranno affetti dallo ſteſſo ſegno, tali quantità ſaranno o tutte maggiori, o tutte minori di una ſteſſa radice.

674. Per altro ſi poſſono determinare ancora algebraicamente i limiti della maſſima radice di una equazione. Ne ſoggiungerò l'eſempio nella formola generale delle equazioni di terzo grado mancanti del ſecondo termine. Sia pertanto l'equazione $x^3 - qx + r = 0$, o ſia $x^3 + r = qx$. Sarà adunque $x^3 < qx$, cioè $x^2 < q$, e però $x < \sqrt{q}$. Parimente ſarà $qx > r$, ed $x > \frac{r}{q}$. La maſſima radice adunque di

que-

queſta equazione cade tra $\sqrt{q}$, ed $\frac{r}{q}$. Se l'equazione ſarà $x^3+qx-r=0$, cioè $x^3+qx=r$, ſi avrà $qx<r$, ed $x<\frac{r}{q}$. Di nuovo ſia ha $r>x^3$, quindi $\sqrt[3]{r}>x$, o ſia $\sqrt[3]{r^2}>x^2$, conſeguentemente $x\sqrt[3]{r^2}>x^3$, ed aggiungendo a una parte, e all'altra $qx$, ſi avrà $x\sqrt[3]{r^2}+qx>x^3+qx$; ma $x^3+qx$ è uguale ad $r$, dunque ſoſtituendo $r$ in luogo di $x^3+qx$, ne verrà $x\sqrt[3]{r^2}+qx>r$, e finalmente $x>\frac{r}{\sqrt[3]{r^2}+q}$. Quindi la maſſima radice cade tra $\frac{r}{q}$, ed $\frac{r}{\sqrt[3]{r^2}+q}$. Conſimili artifizj ſi uſino per trovare i limiti della maſſima radice nell' altre equazioni.

675. Ritrovati i limiti delle radici reſteranno per ultimo da ritrovarſi i veri, o quaſi veri loro valori. Se le radici ſaranno razionali, ſe ne avranno i veri valori, ma ſe ſaranno irrazionali biſognerà contentarſi del proſſimamente vero valore. Il modo di approſſimarſi al vero valore di una radice, dati eſſendo i di lei limiti è il ſeguente: Sia l'equazione $x^2-2x-6=0$, la di cui maſſima radice ha per limiti i numeri 3, 4, cioè ella è maggiore di 3, ma minore di 4. Si ſuppongа pertanto, che ella ſia $3+y$, così che la $y$ ſia ciò, che manca al 3 per ſomminiſtrare la radice cercata. Quì adunque ſi tratta di determinare quale eſſer debba il valore di $y$. Per ritrovarlo ſi traſformi (pel num. 526.) l'equazione propoſta $x^2-2x-6=0$ facendo $x=3+y$, con che ne verrà una equazione data per $y$, mediante la quale ſi avrà il ricercato valore di $y$. Ecco il calcolo

$$\begin{array}{rl} x^2= & 9+6y+y^2 \\ -2x= & -6-2y \\ -6= & -6 \\ \hline \text{Equaz. traſfor.} & -3+4y+y^2=0 \end{array}$$

Ora in queſta equazione $y^2+4y-3=0$ dovendo eſſere il valore di $y$ una quantità aſſai piccola, e una frazione eſſendo tanto più piccola, quanto maggiore è la poteſtà a cui è inalzata, però ſarà $y^2$ aſſai più piccola di $y$, e ſiccome ſi cerca il quaſi vero valore, quindi al confronto di $y$ ſi potrà traſcurare $y^2$, con che l'equazione ſi ridurrà a $4y=3$, da cui ſi ha il valore di $y$, che è $y=\frac{3}{4}$, o ſia, con ridurlo alla frazione decimale, $y=0.75$, conſeguentemente la radice cercata ſarà 3. 75. Qualora non ſi ſia contento dell'eſpreſſione trovataſi, ma ſi voglia accoſtare ancora al vero valore, biſognerà traſformare di nuovo l'equazione data, ſupponendo $x=3.75+y$ con che ſi avrà

$$\begin{array}{l} x^2 = 14.0625+7.50y+y^2 \\ -2x = -7.50-2y \\ -6 = -6. \end{array}$$

Equaz. trasfor. $+0.5625+5.50y+y^2=0$

la quale equazione con trascurarsi $y^2$ è, $5.50y=-0.5625$, e però $y=-0.102272$. La cercata radice adunque è $3.75-0.102272$, cioè $3.647728$. Quando piaccia si potrà accostare ancora al vero valore di questa radice, con trasformare di nuovo l'equazione data, supponendo $x=3.647728+y$, e proseguendo l'operazione nella maniera pur ora osservata.

676. In vece di prevalersi delle trasformazioni a fine di ritrovare il valore di quella piccola quantità, di cui devesi aumentare il limite minore, o di cui devesi diminuire il limite maggiore, per avere il vero, o quasi vero valore della radice cercata, si può far uso della seguente formola canonica

$$\left(-\frac{m^n+am^{n-1}+bm^{n-2}+cm^{n-3}+dm^{n-4}\text{ ec.}}{nm^{n-1}+\overline{n-1}\times am^{n-2}+\overline{n-2}\times bm^{n-3}+\overline{n-3}\times cm^{n-4}\text{ ec.}}\right)$$

in cui la lettera $m$ rappresenta il limite minore della cercata radice, ed $n$ esprime l'esponente dell'equazione da risolversi: Per lo che la di lei radice cercata sarà $x=m-\left(\frac{m^n+am^{n-1}+bm^{n-2}\text{ ec.}}{nm^{n-1}+\overline{n-1}\times am^{n-2}\text{ ec.}}\right)$. Se dopo essersi avuto mediante questa formola il valore di cui devesi accrescere il limite $m$, si vorrà approssimare sempre più al vero valore della radice, bisognerà in tal caso supporre $m-\left(\frac{m^n+am^{n-1}+bm^{n-2}\text{ ec.}}{nm^{n-1}+\overline{n-1}\times am^{n-2}\text{ ec.}}\right)=p$, con che si avrà la seguente formola generale, che darà il valore anche più prossimo cercato $x=p-\left(\frac{p^n+ap^{n-1}+bp^{n-2}+cp^{n-3}\text{ ec.}}{np^{n-1}+\overline{n-1}\times ap^{n-2}+\overline{n-2}\times bp^{n-3}\text{ec.}}\right)$. Istessamente seguitando a sostituire nella prima formola i nuovi ritrovati valori si potrà accostare quanto si vorrà alla vera radice,

677. Ecco poi come si trovi, e insieme si dimostri codesta formola d'approssimazione. Sia l'equazione ecumenica (A) $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}\text{ ec.}=0$, di cui una radice da determinarsi abbia per limite prossimo minore la quantità $m$. Sarà adunque $x-m$ un tal fattore, la di cui seconda parte sarà la radice dell'equazione mancante dalla vera. Si divida pertanto l'equazione (A) per questo fattore $x-m$, e ne verrà il quoziente (B) $x^{n-1}+\overline{m+a}\times x^{n-2}+\overline{m^2+am+b}\times x^{n-3}+\overline{m^3+am^2+bm+c}\times x^{n-4}$ ec. col residuo (C) $m^n+am^{n-1}+bm^{n-2}+cm^{n-3}$ ec. Collo stesso fattore $x-m$ si passi a dividere il ritrovato quoziente (B), lo che fatto si avrà di quoziente (D) $x^{n-2}+$

$\overline{2m+a} \times x^{n-3} + \overline{3m^2+2am+b} \times x^{n-4} + \overline{4m^3+3am^2+2bm+c} \times x^{n-5}$ ec., e di reſiduo (E) $m^{n-2} + \overline{m+a} \times m^{n-3} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3} +$ $\overline{m^3+am^2+bm+c} \times m^{n-4}$ ec. Si divida parimente col fattore $x-m$ il provenuto quoziente (D), e il quoziente ſarà (F) $x^{n-3} + \overline{3m+a} \times x^{n-4} +$ $\overline{6m^2+3am+b} \times x^{n-5} + \overline{10m^3+6am^2+3bm+c} \times x^{n-6}$ ec. col reſiduo (G) $m^{n-2}$ $+ \overline{2m+a} \times m^{n-3} + \overline{3m^2+2am+b} \times m^{n-4} + \overline{4m^3+3am^2+2bm+c} \times m^{n-5}$ ec. Iſteſſamente col fattore $x-m$ ſi divida queſto quoziente [F], con che ne verrà di quoziente [H] $x^{n-4} + \overline{4m+a} \times x^{n-5} + \overline{10m^2+4am+b} \times x^{n-6} +$ $\overline{20m^3+10am^2+4bm+c} \times x^{n-7}$ ec., e di reſiduo [I] $m^{n-3} + \overline{3m+a} \times m^{n-4}$ $+ \overline{6m^2+3am+b} \times m^{n-5} + \overline{10m^3+6am^2+3bm+c} \times m^{n-6}$ ec. Colla ſteſſa maniera ſi divida per $x-m$ queſto quoziente [H], e così ſi divida quello, che ne naſce, e di poi tutti gli altri finchè ſi arrivi ad un quoziente, che ſia uguale all'unità. L'equazione pertanto (A) ſarà (P)=

$\overline{x-m} \times$ [B] $x^{n-2} + \overline{m+a} \times x^{n-3} + \overline{m^2+am+b} \times x^{n-3}$ ec. + [C] $m^n + am^{n-1} + bm^{n-2}$ ec. Il quoziente (B) ſarà =

$\overline{x-m} \times$ [D] $x^{n-2} + \overline{2m+a} \times x^{n-3} + \overline{3m^2+2am+b} \times x^{n-4}$ ec. + [E] $m^{n-2} +$ $\overline{m+a} \times m^{n-3} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3}$ ec. Il quoziente (D) ſarà =

$\overline{x+m} \times$ [F] $x^{n-3} + \overline{3m+a} \times x^{n-4} + \overline{6m^2+3am+b} \times x^{n-5}$ ec. + [G] $m^{n-2} +$ $\overline{2m+a} \times m^{n-3} + \overline{3m^2+2am+b} \times m^{n-4}$ ec. Il quoziente F ſarà =

$\overline{x-m} \times$ [H] $x^{n-4} + \overline{4m+a} + x^{n-5} + \overline{10m^2+4am+b} \times x^{n-6}$ ec. +

[I] $m^{n-3} + \overline{3m+a} \times m^{n-4} + \overline{6m+3am+b} \times m^{n-5}$ ec. Iſteſſamente ſi trovi il valore dei ſeguenti quozienti. Ora nell'equazione [P] ſi ſoſtituiſca il ritrovato valore di [B], e ſi avrà [Q] A = [C] $m^n + am^{n-1} + bm^{n-2}$ ec. +

$\overline{x-m} \times$ [D] $x^{n-2} + \overline{2m+a} \times x^{n-3} + \overline{3m^2+2am+b} \times x^{n-4}$ ec. +

$\overline{x-m} \times$ [E] $m^{n-1} + \overline{m+a} \times m^{n-2} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3}$. In queſta equazione [Q] ſi ſoſtituiſca il poc'anzi trovato valore di [D], ond'eſſa diverrà [R] A = [C] $m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3}$ ec. ( A rappreſenta l'equazion data )

$\overline{x-m} \times$ [E] $m^{n-1} + \overline{m+a} \times m^{n-2} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-2}$ ec. +

$\overline{x-m} \times$ [F] $x^{n-3} + \overline{3m+a} \times x^{n-4} + \overline{6m^2+3am+b} \times x^{n-5}$ + [G]

x—

$\overline{x-m}^{2} \times m^{n-1} + \overline{2m+a} \times m^{n-3} + \overline{3m^2+2am+b} \times m^{n-4}$ ec. di nuovo in queſta equazione [R] ſi ſoſtituiſca il ritrovato valore di F, e con ciò ella ſi cambierà nella ſeguente (S) $A = (C)\ m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3}$ ec. $+$

$\overline{x-m} \times (E)\ m^{n-1} + \overline{m+a} \times m^{n-2} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3} +$

$\overline{x-m}^{4} \times (H)\ x^{n-4} + \overline{4m+a} \times x^{n-5} + \overline{10m^2+4am+b} \times x^{n-6}$ ec. $+$

$\overline{x-m}^{3} \times (I)\ m^{n-3} + \overline{3m+a} \times m^{n-4} + \overline{6m^2+3am+b} \times m^{n-5}$ ec. Qui pure in queſta equazione (S) ſi collochi il valore di (H), e così in ſeguito. Siccome poi la quantità $m$ ſi ſuppone eſſere un valore aſſai proſſimo alla radice $x$, così che la loro differenza ſia aſſai piccola, quindi è, che a paragone di $x-m$ le quantità $\overline{x-m}^{2}$, $\overline{x-m}^{3}$ ec. ſono tanto piccole, che ſi poſſono traſcurare ſenza ſcrupolo. Traſcurate pertanto nell'equazione (S), eſſa ſi ridurrà alla ſeguente $A = m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3}$ ec. $+$

$\overline{x-m} \times m^{n-1} + \overline{m+a} \times m^{n-2} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3}$ ec. Ma eſſendo l'equazione $A = 0$, ſarà pure $m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3}$ ec. $+$

$\overline{x-m} \times m^{n-1} + \overline{m+a} \times m^{n-2} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3} = 0$. Da queſta equazione prendendo il valore di $x$, ſi ha finalmente $x = m -$ $\left(\frac{m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3}\text{ ec.}}{m^{n-1} + \overline{m+a} \times m^{n-2} + \overline{m^2+am+b} \times m^{n-3}\text{ ec.}}\right)$. Il denominatore poi di queſta frazione è uguale ad $nm^{n-1} + \overline{n-1} \times am^{n-2} + \overline{n-2} \times bm^{n-3}$ ec. mediante l'attuale moltiplicazione; dunque ſarà $x = m -$ $\left(\frac{m^n + am^{n-1} + bm^{n-2} + cm^{n-3}\text{ ec.}}{nm^{n-1} + \overline{n-1} \times am^{n-2} + \overline{n-2} \times bm^{n-3}\text{ ec.}}\right)$. Ed ecco trovata, e nel tempo ſteſſo dimoſtrata la formola d'approſſimazione.

678. Proporrò un eſempio, acciò ſe ne veda l'uſo. Eſſendo propoſta l'equazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$, di cui una radice cade fra il 3, e il 4, cercaſi di approſſimarſi al vero valore di queſta radice. Sarà adunque $m = 3$, perlochè ſoſtituito queſto valore nella formola d'approſſimazione, e in vece dei coefficienti indeterminati ſoſtituiti i loro valori preſi dall'equazione propoſta coi convenienti ſegni ſi avrà $x = 3 - \left(\frac{3^4 - 2 \times 3^3 - 7 \times 3^2 + 6 \times 3 + 12}{4 \times 3^3 - 6 \times 3^2 - 14 \times 3 + 6}\right)$, cioè $x = 3 + \frac{1}{3}$. Volendo poi approſſimarſi ancora al vero valore, ſi ponga $3 + \frac{1}{3} = p$, e ſi prevalga della formola $x = p - \left(\frac{p^n + ap^{n-1}\text{ ec.}}{np^{n-1} + \overline{n-1} \times ap^{n-2}\text{ ec.}}\right)$

ME-

## METODO V.

*Mediante il conſiderare l'equazione da riſolverſi come il riſultato di due equazioni a due incognite, delle quali una è ſtata eliminata.*

679. IL metodo, che ora ſono per eſporre, e che è del Sig. Bezout, coincide con quello, che ho dato al num. 638., anzi a rigore non è, che lo ſteſſo, cui è ſtata cambiata faccia con metterlo ſotto un altro punto di viſta. Come quello, così queſto inchiude la difficoltà di dover riſolvere tutte le equazioni dei gradi inferiori alla propoſta, e non meno l'uno, che l'altro ſeco porta indiſpenſabilmente i paragoni dei coefficienti dell' equazione indeterminata coi coefficienti dell' equazione da riſolverſi a fine di determinarne i loro valori, e il numero di queſti paragoni, e conſeguentemente dei calcoli neceſſarj a farſi, ſi fa maggiore a miſura, che creſce il grado dell'equazione fino a divenire ben preſto impraticabili. Veramente il preſente metodo va libero dalla difficoltà marcata al num. 645., ma ſeco ne porta un'altra, che è di dovere mediante le due aſſunte equazioni a due incognite eliminarne una, e in tal modo trovare un'equazione data per l'altra incognita; e quantunque il calcolo, che ſe ne richiede, non ſia tanto laborioſo, come nell'altro caſo, non laſcia però riſpetto alle equazioni de' gradi ſuperiori d' eſſere anch' egli proliſſo, e in conſeguenza moleſto.

680. Il metodo pertanto conſiſte in prendere due equazioni arbitrarie a due incognite, alle quali devonſi dare per eſponenti i fattori dell' eſponente dell'equazione da riſolverſi, cioè uno di queſti fattori per eſponente alla $y$ nella prima equazione, cui pure nella ſeconda equazione deveſi dare lo ſteſſo eſponente, ma diminuito di una unità nel primo termine, di due unità nel ſecondo termine ec. L' altro fattore deveſi dare colle ſteſſe leggi alla ſeconda incognita $x$, la quale deve avere ſoltanto luogo nella ſeconda equazione. Se l'eſponente dell' equazione data ſarà un numero compoſto, egli ſarà riſolubile in due fattori; ma ſe ſarà un numero primo, biſognerà prendere l' unità per uno de' ſuoi fattori, e per l'altro fattore lo ſteſſo eſponente. Suppoſto che i due fattori dell' eſponente dell' equazione da riſolverſi ſiano $r$, $t$, le due equazioni indeterminate da aſſumerſi potranno eſſere

I. $y^r - 1 = 0$

II. $\overline{y^{r-1}} \times \overline{ax^{t-1} + bx^{t-2} + cx^{t-3} \text{ ec.} \ldots + P} + \overline{y^{r-2}} \times \overline{a'x^{t-1} + b'x^{t-2} \text{ ec.} \ldots + P'}$
$+ \overline{y^{r-3}} \times \overline{a''x^{t-1} + b'x^{t-2} \text{ ec.} \ldots P'' + } + x^t + Ax^{t-1} + Bx^{t-2} \text{ ec.} \ldots + Q = 0.$

681. Qualora adunque ſia data un' equazione da riſolverſi, la quale deve eſſere immune dal ſecondo termine, ſi prendano i fattori del di lei maſſimo eſponente nel modo detto, comunque egli ſia un numero primo, o compoſto, e uno di queſti fattori ſi faccia $= r$, l' altro $= t$, con che verraſſi a determinare il grado di ciaſcuna delle due aſſunte equazioni indeterminate, e nel tempo ſteſſo a limitare il numero de' termini della ſeconda. Fatto ciò, per mezzo di queſte due equazioni ſi elimini coi ſoliti metodi l'incognita $y$, onde ſi abbia una equazione tutta in $x$ a

coef-

coefficienti indeterminati, che aſcenderà allo ſteſſo grado dell' equazione propoſta. Si paragonino i coefficienti di queſta coi coefficienti dell' equazione data, a fine di ottenere i riſpettivi valori dei coefficienti indeterminati, de' quali la ſomma moltiplicata in tutte le radici dell' equazione $y^m - 1 = 0$ (ſuppoſto che $m$ eſprima il grado dell' equazione propoſta) ſomminiſtrerà tutte le radici dell' equazione da riſolverſi.

682. Per amore della brevità mi contenterò di dichiarare l' eſpoſta dottrina con due ſoli Eſempj, nel primo de' quali l' eſponente dell' equazione ſarà un numero primo, e nel ſecondo un numero compoſto; e per maggiore facilità, e chiarezza il primo verſerà ſu le equazioni del terzo grado, il ſecondo ſu quelle del quarto, giacchè quando il grado dell' equazione comincia a farſi maggiore i calcoli rieſcono aſſai ſpinoſi, e intricatiſſimi, qualora non ſi facciano alcune ſuppoſizioni arbitrarie, che tolgono la generalità al metodo, limitandolo a ſoli caſi particolari. Debbanſi ritrovare le radici dell' equazione $x^3 + mx + n = 0$. Poichè i fattori di 3 ſono 1, e 3, ſi faccia $r = 3$, $t = 1$, con che l' equazione I diverrà $y^3 - 1 = 0$, e l' equazione II ſi cambierà in $ay^2 + a'y + x = 0$. Per eliminare mediante queſte due equazioni l' incognita $y$, moltiplico la ſeconda per $y$, e mi viene $ay^3 + a'y^2 + xy = 0$, in cui ſoſtituiſco in luogo di $y^3$ il ſuo valore 1 preſo dall' equazione $y^3 - 1 = 0$, onde ho $a'y^2 + xy + a = 0$: Di nuovo moltiplico queſta per $y$, lo che mi dà $a'y^3 + ay^2 + ay = 0$, nella quale colloco il valore di $y$, come ho fatto precedentemente, e me ne riſulta l' equazione $xy^2 + ay + a' = 0$. Si hanno adunque le tre ſeguenti equazioni.

$$\begin{aligned} &\text{I. } ay^2 + a'y + x = 0 \\ &\text{II. } a'y^2 + xy + a = 0 \\ &\text{III. } xy^2 + ay + a' = 0 \end{aligned}$$

Per mezzo di due qualſiſiano di queſte tre equazioni, per Eſempio delle due prime, prendo i valori di $y^2$, e di $y$ (giuſta il num. 339.) de' quali il primo è $y^2 = \frac{aa' - x^2}{ax - a'a'}$, e il ſecondo è $y = \frac{a^2 - a'x}{aa' - ax}$, e li ſoſtituiſco nella terza equazione, con che mi viene $\frac{aa'x - x^3}{ax - a'a'} + \frac{a^3 - aa'x}{a'a - ax} + a' = 0$, cioè $-aa'x + x^3 + a^3 - aa'x + a'a'a$, $-aa'x = 0$, e però $x^3 - 3aa'x + a^3 + a'a'a' = 0$. Paragono i coefficienti di queſta coi coefficienti dell' equazione propoſta $x^3 + mx + n = 0$, e ne ho $m = -3aa'$, $n = a^3 + a'^3$: Dalla prima di queſte due equazioni prendo $-\frac{m}{3a} = a'$, il di cui cubo è $-\frac{m^3}{27a^3} = a'^3$, che ſoſtituito nella ſeconda la cambia in $a^6 - a^3n - \frac{m^3}{27} = 0$, la quale è derivativa del ſecondo grado. Una radice poi di queſta equaz. di ſeſto grado la chiamerò $= A$. Nella ſteſſa maniera giungo all' equazione data per $a'$, che ſarà $a'^6 - a'^3n - \frac{m^3}{27} = 0$, che è parimente derivativa del ſecondo grado e ſimilmente una radice di queſta equazione dico $= B$. Si prendano adeſſo le tre radici dell' equazione $y^3 - 1 = 0$, e moltiplicandole nella radice trovata $x = -A - B$, ſi avranno le tre radici dell' equazione propoſta $x^3 + mx + n = 0$, che ſono $x = -A - B$;

$x =$

$x=-A\sqrt{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}-B\sqrt{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$; $x=-A\sqrt{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}-B\sqrt{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$

la prima radice poi è $x=-A-B$, perchè nell' equazione I. fatta $y=1$ si ha $a+a'+x=0$, e però $x=-a-a'$.

683. Debbansi in secondo luogo determinare le radici dell' equazione $x^4+mx^2+nx+p=0$. I fattori del massimo esponente 4 possono essere tanto 1, e 4, come 2, e 2. Se si prendessero i due fattori 1, 4, con fare $r=4$, $t=1$, le due equazioni cattoliche I, II diventerebbero $y^4-1=0$, $ay^3+a'y^2+a''y+x=0$, che si tratterebbero come si è fatto nel precedente Esempio. Ora prendendo i due fattori 2,2, sarà $r=2$, $t=2$, e però l'equazione I. diventerà $y^2-1=0$, e l' equazione II. si cambierà in $y\sqrt{ax+b}+a'x^2+B=0$. Moltiplico questa equazione per $y$, e ne ho $y^2\sqrt{ax+b}+y\sqrt{a'x^2+B}=0$, in cui sostituisco in luogo di $y^2$ il suo valore preso dall' equazione $y^2-1=0$, con che ne viene $y\sqrt{x^2+B}+ax+b=0$. Si hanno adunque le due seguenti equazioni

I $\quad y\sqrt{ax+b}+x^2+B=0$

II $\quad y\sqrt{x^2+B}+ax+b=0$

mediante le quali elimino la $y$, onde ne nasce l' equazione $\overline{x^2+B}^2=-\overline{ax-b}^2$, e però $x^4+\overline{2B-a^2}\sqrt{x^2-2abx+B^2-b^2}=0$. Paragonando pertanto i coefficienti di questa equaz. coi coefficienti della proposta, si ha $2B-a^2=m$, $-2ab=n$, $B^2-b^2=p$. Dalla prima prendo il valore di B, così $B=\frac{m+a^2}{2}$, il di cui quadrato è $B^2=\frac{\overline{m+a^2}^2}{4}$; dalla seconda prendo il valore di $b$, che è $b=-\frac{n}{2a}$, il di cui quadrato è $b^2=\frac{n^2}{4a^2}$: Nella terza sostituisco questi valori di $B^2$, $b^2$, con che ella si cambia in $\frac{\overline{m+a^2}^2}{4}-\frac{n^2}{4a^2}=p$, cioè $a^6+2a^4m+\overline{m^2-4p}\sqrt{a^2-n^2}=0$, la quale è derivativa del terzo grado. Una radice poi di questa equazione la chiamo $=A$. Questo valore A si metta in luogo di $a$ nella prima equazione, ed ella si cambierà nella seguente $2B-A^2=m$, e però $B=\frac{m+A^2}{2}$, il di cui quadrato sostituito nella terza equazione la rende $\frac{\overline{m+A^2}^2}{4}-b^2=p$, conseguentemente $b=\pm\sqrt{\frac{\overline{m+A^2}^2}{4}-p}$, che dico $=C$. Per evitare la confusione delle lettere farò $B=\frac{m+A^2}{2}=D$. La radice adunque dell' equazione proposta $x^4+mx^2+nx+p=0$ è $x=-A-C-D$, la quale moltiplicata nelle radici dell' equazione

$y^4-1=0$ dà le quattro cercate radici, che ſono $x=-A-C-D$; $x=A+C+D$; $x=-A\sqrt{-1}-C-D\sqrt{-1}$; $x=A\sqrt{-1}+C+D\sqrt{-1}$.

684. Chi rifletterà a queſto Eſempio oſſerverà facilmente, che quando l'eſponente dell'equazione propoſta è un numero compoſto ſi viene di molto ad abbreviare il calcolo ſupponendo $r$ uguale ad un fattore, e $t$ uguale all'altro, di quello egli riſulterebbe ſe ſi ſupponeſſe $r$ uguale al dato eſponente, e $t$ uguale all'unità. Di fatto ſe in queſt'ultimo Eſempio ſi foſſe fatto $r=4$, $t=1$, l'equazione I. ſarebbe ſtata $y^4-1=0$, e l'equazione II. ſi ſarebbe cambiata in $ay^3+a'y^2+a''y+x=0$, dalla quale mediante la ſucceſſiva moltiplicazione per $y$, e la ſoſtituzione del valore di $y^4$ preſo dall'equazione $y^4-1=0$; ſi hanno le quattro ſeguenti equazioni

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $ay^3$ | $+a'y^2$ | $+a''y$ | $+x$ | $=0$ |
| II | $a'y^3$ | $+a''y^2$ | $+xy$ | $+a$ | $=0$ |
| III | $a''y^3$ | $+xy^2$ | $+ay$ | $+a'$ | $=0$ |
| IV | $xy^3$ | $+ay^2$ | $+a'y$ | $+a''$ | $=0$ |

per mezzo di tre delle quali, come delle tre prime prendendo i valori di $y^3$, $y^2$, $y$ e ſoſtituendoli nella terza, ſi avrà la bramata equazione data per $x$, che è

$x^4-\overline{4aa''-2a'a'}\times x^2+\overline{4a^2a'+4a'a''^2-4aa'^2a''}\times x-a^4-a''^4+a'^4+2a^2a''^2-4aa'^2a''=0$

ſimile a quella del num. 642, di cui ſi paragonino i coefficienti coi coefficienti dell'equazione propoſta, così $-4aa''-2a'^2=m$; $4a^2a'+4a'a''^2=n$; $-a^4-a''^4+a'^4+2a^2a''^2-4aa'^2a''=p$. Se pertanto ſi opererà, come ſi è fatto al num. 643, ſi avrà una equazione data per $a$, la ſeconda data per $a'$, e la terza data per $a''$, colle quali ſi otterranno i valori di queſti coefficienti indeterminati, e conſeguentemente nel modo già detto ſi avranno le radici cercate.

685. Queſto modo di determinare tutte le radici di una data equazione ſuppone, che eſſa abbia una ſola radice reale, ſe è di grado impari, e due quando è di grado pari; ciò poi non ſarà ſempre vero, mentre e potrà averne di più, ed averle anche tutte reali.

## METODO VI.

*In cui ſi ſuppone la radice reale, che ha ſempre un' equazione di grado impari eſpreſſa da* n, *ſia della forma* $p\sqrt[n]{u}+q\sqrt[n]{u^2}\ldots+t\sqrt[n]{u^{n-1}}$

686. BRevemente io qui darò un'idea di queſto metodo più a rifleſſo di erudizione, che a motivo di proporne la pratica. Egli è parto del celebre Sig. Eulero, il quale ha penſato, che relativamente alla forma delle radici immaginarie delle equazioni di terzo grado, che è $x=b\sqrt[3]{m}+i\sqrt[3]{n}$, $x=i\sqrt[3]{m}+b\sqrt[3]{n}$ (ſuppoſte $b$, $i$ le radici cubiche immaginarie dell'unità), la radice reale eziandio per le equazioni di terzo grado ſia $x=p\sqrt[3]{u}+q\sqrt[3]{u^2}$; così la radice reale per le equazioni di quinto grado ſia $x=p\sqrt[5]{u}+q\sqrt[5]{u^2}+r\sqrt[5]{u^3}+s\sqrt[5]{u^4}$, per quelle del ſettimo $x=p\sqrt[7]{u}+q\sqrt[7]{u^2}+r\sqrt[7]{u^3}$ ec. Le altre radici poi di queſte equazioni ſaranno queſta ſteſ-

ſteſſa radice moltiplicata nelle radici immaginarie dell'unità dello ſteſſo grado. In queſta formola generale $p\sqrt[n]{u}+q\sqrt[n]{u^2}+r\sqrt[n]{u^3}$ ec. le lettere $p$, $q$, $u$, $r$ ec. ſono quantità indeterminate da determinarſi poſcia col calcolo.

687. Il metodo pertanto conſiſte in ſupporre, che la radice reale dell'equazione da riſolverſi ſia $x=p\sqrt[n]{u}+q\sqrt[n]{u^2}$ ec. L'uno, e l'altro membro di queſta equazione deveſi elevare alla poteſta $n$, e alle altre poreſtà inferiori, cui nella propoſta equazione aſcende la $x$, indi nella equazione data in luogo di $x$, e delle ſue poteſtà ſoſtituire i ſuoi valori pur ora trovati; lo che fatto ſi prendano i rapporti, che naſcono dal ſupporſi verificata l'equazione, e quali ſaranno queſti rapporti, altrettante ſaranno le equazioni, che dovranno ſervire alla eliminazione delle indeterminate $u$, $p$, $q$ ec., e nel tempo ſteſſo a ſcuoprirne ſeparatamente i loro valori. Siccome poi il numero delle equazioni ſarà ſempre minore di una unità del numero delle indeterminate, così una di queſte reſterà ſempre da aſſumerſi ad arbitrio.

688. Debbaſi trovare la radice reale dell'equazione $x^3+mx+n=0$. Si ſuppon-ga, che eſſa ſia $x=p\sqrt[3]{u}+q\sqrt[3]{u^2}$. Si inalzi al cubo l'uno, e l'altro membro di queſta equazione, e ſi avrà $x^3=p^3u+3p^2qu\sqrt[3]{u}+3pq^2u\sqrt[3]{u^2}+q^3u^2$. Nell'equazione $x^3+mx+n=0$ ſi ſoſtituiſcano queſti valori di $x$, $x^3$, ed ella ſi cambierà nella ſeguente, $p^3u+3p^2qu\sqrt[3]{u}+3pq^2u\sqrt[3]{u^2}+q^3u^2+mp\sqrt[3]{u}+mq\sqrt[3]{u^2}+n=0$. Ora eſſendo $p\sqrt[3]{u}+q\sqrt[3]{u^2}$ radice dell'equazione propoſta, dovrà eſſa farla verificare, conſeguentemente dovranno vicendevolmente diſtruggerſi tutti i termini dell'equazione nata dalla precedente ſoſtituzione. Ciò poi ſuccede ogniqualvolta ſia $m=-3pqu$, ed $n=-p^3u-q^3u^2$. Qui pertanto ſi hanno due equazioni con tre indeterminate, che ſono $p$, $q$, $u$, delle quali una ſi determini ad arbitrio, e ſia per Eſempio $p=1$, con che le due precedenti equazioni diverranno $m=-3qu$, $n=-u-q^3u^2$. Dalla prima ſi ha $q=-\frac{m}{3u}$, il di cui cubo ſoſtituito nella ſeconda in luogo di $q^3$ la rende $n=-u+\frac{m^3}{27u}$, cioè $u^2+nu-\frac{m^3}{27}=0$, dalla quale ſi ottiene $u=-\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}$, e queſto valore ſoſtituito in luogo di $u$ nell'equazione $q=-\frac{m}{3u}$ ci dà il valore di $q$, che trovaſi eſſere $q=\frac{-m}{3X-\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$. Eſſendoſi trovati i valori delle tre indeterminate $p$, $q$, $u$, reſta ancora determinato il valore della radice $x=p\sqrt[3]{u}+q\sqrt[3]{u^2}$, dalla di cui moltiplicazione nelle due radici cubiche immaginarie dell'unità, ſi hanno le altre due radici ancora della propoſta equazione.

689. Nel mentre che ſtavano per iſtamparſi i fogli contenenti il preſente metodo mi fu traſmeſſo dal dottiſſimo Sig. Giovanni de' Malfatti, della cui pregiabiliſ-

ſima amicizia da molto tempo ho l'onore di godere, un ſuo Opuſcolo inſerito nel IV. Tomo degli Atti dell'Accademia di Siena, nel quale prende ad eſaminare la riſoluzione delle equazioni di quinto grado mediante il ſupporne le radici di queſta forma $x+m\sqrt[5]{f^4}+p\sqrt[5]{f^3}+q\sqrt[5]{f^2}+n\sqrt[5]{f}=0$. Egli conduce tutto il ſuo calcolo ad una equazione di ſeſto grado, colla quale ottiene la bramata ſoluzione ogniqualvolta eſſa ſia diviſibile per qualche diviſore o di primo, o di ſecondo, o di terzo grado, i di cui termini ſiano razionali, o anche miſti di radicali quadratici. Comincia pertanto dal far ſparire i radicali dalla formola $(\Omega)\ x+m\sqrt[5]{f^4}+p\sqrt[5]{f^3}+q\sqrt[5]{f^2}+n\sqrt[5]{f}=0$, con che ſi ritrova la ſeguente equazione

$$\left.\begin{array}{l} x^5-5mnx^3+5m^2qx^2-5m^2px+\overline{5mn-5pq}\times\overline{mp^2+nq^2-m^2q-n^2p} \\ \quad -5pqx^3+5n^2px^2-5n^2qx \qquad +m^5 \\ \qquad +5mp^2x^2-5mq^2x \qquad +n^5 \\ \qquad +5nq^2x^2-5np^2x \qquad +p^5 \\ \qquad\qquad +5m^2n^2x \qquad +q^5 \\ \qquad\qquad -5mnpqx \\ \qquad\qquad +5p^2q^2x \end{array}\right\}=0$$

Per abbreviare il calcolo ſi faccia $(\beta)\ mn=q$; $(\delta)\ pq=u$; $(\epsilon)\ m^2q+n^2p=r$; $(\varphi)\ mp^2+nq^2=t$; Se ſi moltiplicherà l'equazione $(\epsilon)$ coll'equazione $(\varphi)$, ſi avrà $m^3p^2q+mn^2p^2+m^2nq^2+n^3pq^2=rt$, cioè $m^3p^2q+n^3pq^2=rt-mn^2p^2-m^2nq^2$, vale a dire $(\lambda)\ m^3p+n^3q=\frac{rt-y\sqrt{mq^3+np^3}}{u}$. Si moltiplichi l'uno, e l'altro membro di queſta equazione per $mq^3+np^3$, e ſi avrà $\overline{m^3p+n^3q}\times\overline{mq^3+np^3}=m^4pq^3+mn^3q^4+m^3np^3+n^4p^3q$: ma queſto ſecondo membro è uguale al quadrato di $(\epsilon)$ moltiplicato in $(\delta)$, più il quadrato di $(\varphi)$ moltiplicato in $(\beta)$, la qual ſomma ſia diminuita di $4m^3n^3p^3q^3=4u^3y^3$, però ſarà $(\mu)\ \overline{m^3p+n^3q}\times\overline{mq^3+np^3}=r^2u+t^2y-4u^3y^2$. Di queſta equazione ſi moltiplichi l'uno, e l'altro membro per $-4uy$, e vi ſi aggiunga $r^2t^2$, lo che darà $\overline{m^3p+n^3q}\times\overline{mq^3+np^3}\times\overline{-4uy}+r^2t^2=r^2t^2-4r^2u^2y-4t^2uy^2+16u^3y^3$. Ma $\overline{m^3p+n^3q}\times\overline{mq^3+np^3}\times\overline{-4uy}+r^2t^2=\overline{2um^3p+2un^3q-rt}^2$, per lo che ſoſtituendoſi nel primo membro della precedente equazione queſto ſuo valore, indi eſtraendo da ambi i membri la radice quadrata, ſi avrà

$$(A)\ m^3p+n^3q=\frac{rt+\sqrt{r^2t^2-4r^2u^2y-4t^2uy^2+16u^3y^3}}{2u}.$$ Parimente di una maniera conſimile ſi troverà $(B)\ mq^3+np^3=\frac{rt-\sqrt{r^2t^2-4r^2u^2y-4t^2uy^2+16u^3y^3}}{2y}$. In oltre ſi moltiplichi l'equazione (A) per l'equazione $(\epsilon)$, e ne verrà

$$\overline{m^5+n^5}\times pq+m^2n^2\times\overline{mp^2+nq^2}=\frac{r^2t+r\sqrt{r^2t^2-4r^2u^2y-4t^2uy^2+16u^3y^3}}{2u},$$ cioè

(C)

(C) $m^3+n^3=\frac{r^2t-2tuy^2+r\sqrt{r^2t^2-4r^2uy-4t^2uy+16u^2y^2}}{2u^2}$. Così pure con moltiplicare l'equazione (B) per l'equazione (φ) si avrà

(D) $p^3+q^3=\frac{rt^2-2ru^2y-t\sqrt{r^2t^2-4r^2uy-4t^2uy^2+16u^2y^2}}{2y^2}$.

L'equazione data da risolversi sia $x^3-3ax^2+3bx^2+3cx+d=0$. Si paragonino i coefficienti di questa equazione coi coefficienti dell'equazione provenuta dalla supposta radice (Ω), con che si avranno le seguenti equazioni I. $y+u=a$; II. $r+t=b$; III. $-m^3p-n^3q-mq^3-np^3+m^2n^2-mnpq+p^2q^2=c$, cioè

$$-\frac{rt\times\sqrt{r+u}+\sqrt{u-y}\times\sqrt{rt-4r^2u-4t^2uy+16u^2y^2}}{2uy}+y^2-uy+u^2=c;$$

IV. $m^3+n^3+p^3+q^3+\sqrt{5y-5u}\times\sqrt{t-r}=d$, cioè

V. $\frac{r^2ty^2+rt^2u^2-2ty^4u-2ryu^4+ry^3-tu^2\times\sqrt{r^2t^2-4r^2u^2y-4t^2uy^2+16u^2y^2}}{2uy^2}$

$+\sqrt{5y-5u}\times\sqrt{t-r}=d$ dall'equazione III. si ricava (E) $\sqrt{r^2t^2-4r^2u^2y-4t^2uy^2+16u^2y^2}$

$=\frac{rt\times\sqrt{y+u}-2uy^3+2u^2y^2-2u^3y+2uy}{u-y}$. Ora se l'equazione I si disporrà così $y-a=-u$, poscia si moltiplichi per $y$, indi si risolva al modo delle quadratiche affette, si avrà (π) $y=\frac{a+\sqrt{a^2-4uy}}{2}$; ed essendo $u=a-y$, col sostituire il ritrovato valore di $y$, sarà (π) $u=\frac{a-\sqrt{a^2-4uy}}{2}$. Se pertanto si inalzerà al quadrato l'equazione (E), e vi si sostituirà in luogo di $t$ il suo valore $b-r$ preso dall'equazione II, e in luogo di $u$, $y$ i loro valori presi dalle equazioni (π. π), e per ultimo dopo averla espurgata si ordinerà secondo le dimensioni della lettera $r$, si avrà finalmente l'equazione (F) $r^4-2br^3-\sqrt{7auy+2a^3-ac+b^2}\times r^2$

$+\sqrt{7abuy-2a^3b+abc+4buy-ab}\times\sqrt{a^2-4uy}\times r+25u^3y^3-10a^2u^2y^2+6cu^2y^2+a^4uy$

$-2a^2cuy+c^2uy+2ab^2uy+\frac{a^3b^2}{2}-2b^3uy+\frac{a^2b^2}{2}\times\sqrt{a^2-4uy}=0$. Parimente se nell'equazione V. si sostituirà in vece della quantità radicale il suo valore razionale preso dall'equazione (E), indi si faccia quanto si è praticato nel trovare la precedente equazione, si giugnerà all'equazione seguente (G)

$ar^3$

$$ar^3-3ab+b\sqrt{a^2-4uy}\times r^2+50u^2y^2-20a^2uy+2cuy+2a^4-ac^2+\frac{\overline{ab^2-b^2}}{2}\times\sqrt{a^2-4uy}\times r$$

$$+25bu^2y^2+10a^2buy-bcuy-a^4b+\frac{a^2bc}{2}-\frac{\overline{2duy-abc}}{2}\times\sqrt{a^2-4uy}=0.$$

Mediante queſte due equazioni (F, G) ſi facciano ſparire tutte le potenze ſuperiori della lettera $r$, a riſerva della prima, a fine di avere il valore di $r$, che troverafſi eſſere (H) $r=\frac{b}{2}+\sqrt{a^2-4uy}\times\frac{\overline{625u^2y^2ab\times ab-2d}-}{-02500uy^3+}$ ec. (ommetto gli altri ſeguenti termini di queſta frazione per eſſere aſſai lunga): Se pertanto ſi farà uguale ad $b$ queſta frazione, che moltiplica la quantità $\sqrt{a^2-4uy}$, ſarà $(\gamma)\ r=\frac{b}{2}+b\sqrt{a^2-4uy}$; onde nell'equazion II. $t=b-r$ ſoſtituendo queſto ritrovato valore di $r$, ſi avrà ancora il valore di $t$, che è $(\xi)\ t=\frac{b}{2}-b\sqrt{a^2-4uy}$. Finalmente coll'ajuto delle due equazioni (F, G) eliminando affatto col metodo dato di eliminazione la lettera $r$, ſi giungerà ad una equazione di ſeſto grado, nella quale entreranno le ſole quantità $a$, $b$, $c$, $d$, $uy$, eſſendo $uy$ la ſola incognita. Se pertanto i coefficienti $a$, $b$, $c$, $d$ dell'equazione propoſta da riſolverſi avranno fra loro tale relazione, che la ritrovata equazione di ſeſto grado ſtante la loro ſoſtituzione ammetta un diviſore o lineare, o di ſecondo, o di terzo grado, e queſto o affatto razionale, o miſto di radicali quadratici, ſiccome queſti diviſori ci forniranno il valore dell'incognita $uy$, così pure ſi otterrà la riſoluzione della detta equazione di ſeſto grado: Per lo che eſſendo cognito il valore di $uy$, mediante la di lui ſoſtituzione nelle equazioni (C, D, H), ſi faranno cogniti i valori di $r$, $t$, $m^5+n^5$, $p^5+q^5$.

Poichè le equazioni (C, D) con fare $uy=0$, cioè $u$, ovvero $y=0$ danno o la frazione $\frac{0}{0}$, o una quantità infinita, perciò biſogna ritrovare altre eſpreſſioni dei valori di $m^5+n^5$, $p^5+q^5$, che ſiano libere da queſto incomodo. Nelle equazioni $(\pi, \tau)$ ſi faccia per maggiore brevità $a^2-4uy=z$, con che ſi cambieranno in $(\theta)$ $y=\frac{a+\sqrt{z}}{2}$, $u=\frac{a-\sqrt{z}}{2}$, e così pure le equazioni $(\gamma, \xi)$ diverranno $r=\frac{b}{2}+b\sqrt{z}$, $t=\frac{b}{2}-b\sqrt{z}$. Soſtituendoſi nell'equazione IV. queſti valori di $y$, $u$, $r$, $t$, ſi cambierà nella ſeguente (M) $m^5+n^5+p^5+q^5-5\times 2bz=d$. Si moltiplichi l'equazione (A) per $2ur$, indi in luogo della quantità radicale vi ſi ſoſtituiſca il ſuo valore preſo dall'equazione (C), e ne verrà $m^3p+n^3q=\frac{u\times\overline{m^5+n^5+y^2t}}{r}=$

$\frac{\sqrt{4a-4\sqrt{z}}\times\sqrt{m^5+n^5}+\sqrt{a+\sqrt{z}^2}\times\sqrt{b-2b\sqrt{z}}}{4\times\sqrt{b+2b\sqrt{z}}}$. Analogamente operando, cioè moltiplicando l'equazione (B) per $2yt$, e ſoſtituendo il valore della quantità radicale preſo dall'equazione (D), ſi avrà $mq^3+np^3=\frac{y\times\sqrt{p^5+q^5}+u^2r}{t}=$

$\frac{\sqrt{4a+4\sqrt{z}}\times\sqrt{p^5+q^5}+\sqrt{a-\sqrt{z}^2}\times\sqrt{b+2b\sqrt{z}}}{4\times\sqrt{b-2b\sqrt{z}}}$. Si ſoſtituiſcano queſti valori di $mq^3+np^3$, $m^3p+n^3q$ nell'equazione III, con che eſſa ſi cambierà nella ſeguente

$-4ab-8bz\times\sqrt{m^5+n^5+p^5+q^5}+4b\sqrt{z}+8ab\sqrt{z}\times\sqrt{m^5+n^5-p^5-q^5}-20b^2z^2-12a^2b^2z+16cb^2z+16abbz+b^2z-a^2b^2-4b^2c=0$. Per mezzo di queſta equazione, e dell'equazione (M) ſi troveranno le due ſeguenti

$$m^5+n^5=\frac{10bz+d}{2}+$$
$$+\sqrt{z}\times\frac{\sqrt{100b^2z^2+12a^2b^2z-16cb^2z+24abbz+8dbz-b^2z+a^2b^2+4b^2c+4abd}}{8z\times\sqrt{2ab+b}}$$

$$p^5+q^5=\frac{10bz+d}{2}-$$
$$-\sqrt{z}\times\frac{\sqrt{100b^2z^2+12a^2b^2z-16cb\ z+24abbz+8dbz-b\ z+a^2b^2+4b^2c+4abd}}{8z\times\sqrt{2ab+b}}$$

Per rendere più brevi queſte formole ſi faccia $\frac{10bz+d}{2}=A$, ed eguale a B la quantità, che moltiplica il radicale $\sqrt{z}$, e ſi avrà (N), $m^5+n^5=A+B\sqrt{z}$ (P), $p^5+q^5=A-B\sqrt{z}$. Queſte quantità A, B ſono cognite, poichè ſono funzioni di $a$, $b$, $c$, $d$, e della quantità $uy$, che ſuppongo già trovata mediante l'anzidetta equazione di ſeſto grado. Ciò poſto eſſendo (θ) $y=mn=\frac{a+\sqrt{z}}{2}$, ſarà $n^5=\frac{\sqrt{a+\sqrt{z}^5}}{32m^5}$, il qual valore ſoſtituito nell'equazione (N) la cambia in $m^{10}-m^5\times\sqrt{A+B\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{a+\sqrt{z}^5}}{32}=0$ dalla quale ſi ricava $m^5=\frac{A+B\sqrt{z}}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{A+B\sqrt{z}^2}}{4}-\frac{\sqrt{a+\sqrt{z}^2}}{32}}$, e però

$m=$

$m = \sqrt[5]{\frac{A+B\sqrt{z}}{2} + \sqrt{\frac{A+B\sqrt{z}}{4} - \frac{a+\sqrt{z}}{32}}}$. Egualmente operando si troverà

$n = \sqrt[5]{\frac{A+B\sqrt{z}}{2} - \sqrt{\frac{A+B\sqrt{z}}{4} - \frac{a+\sqrt{z}}{32}}}$,

$p = \sqrt[5]{\frac{A-B\sqrt{z}}{2} + \sqrt{\frac{A-B\sqrt{z}}{4} - \frac{a-\sqrt{z}}{32}}}$

$q = \sqrt[5]{\frac{A-B\sqrt{z}}{2} - \sqrt{\frac{A-B\sqrt{z}}{4} - \frac{a-\sqrt{z}}{32}}}$. Ora questi valori uniti in una somma danno la cercata radice della proposta equazione di quinto grado. Per avere le altre radici dell' equazione bisognerà moltiplicare ciascuno di questi ritrovati valori di $m$, $n$, $p$, $q$ nelle cinque radici quinte dell' unità, che sono 1;

$\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$;

$\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$, e di questi prodotti quelli varranno, che salvano i prodotti $mn+pq$, $m^2q+n^2p+mp^2+nq^2$.

Le altre cose, che succedono alla risoluzione del dotto Autore, non hanno qui luogo.

## ARTICOLO IX.

*Metodo generale, e facile di trovare tutte le radici di qualsivoglia equazione.*

690. I Metodi, che nel precedente Articolo ho esposti, o procedono tentando, come il primo; o non sono generali per qualunque equazione, come il terzo; o non servono in qualunque caso, come il quarto, il quale non ha luogo quando le radici sono immaginarie; o pure quanto sono piani, e facili per le equazioni di terzo, ed anche di quarto grado, come gli altri, de' quali per queste non abbiamo di bisogno, altrettanto sono laborioſi, e impraticabili quando si tratta delle equazioni superiori, in grazia delle quali sono stati dai loro Autori meditati. Siccome però in tutte le cose deve si preferire la semplicità, e agevolezza, con cui si ottiene il fine bramato, perciò mi sembra, che il seguente metodo debba per questo titolo meritamente godere il vantaggio d' essere preferito agli altri. Ci fu egli comunicato fino dall'anno 1728 dal Sig. Maier nel Tomo III. de' Commentarj di Pietroburgo, ma d' indi in poi è stato comunemente negletto, nè io trovo, che alcuno lo abbia nemmeno indicato, non che abbia pensato a farne uso, se si eccettua il celebre Sig. de la Grange, che ne ha brevemente parlato nel Tomo 23.

del-

della Reale Accademia di Berlino. Un metodo così piano, facile, e universale non meritava certamente d' essere fino ad ora trascurato: Che però ho io procurato di darci tutta quella estensione, di cui l'ho giudicato suscettibile, lo che farò molto più in seguito nel IV. Tomo, che comprenderà l' Algebra applicata alla Geometria, ove me ne prevalerò per la costruzione generale di qualsivoglia equazione determinata; per la descrizione delle curve; pe' massimi, e minimi; pe' punti moltiplici ec.

691. Abbiamo veduto al num. 1335. del I. Tomo, che dall' innalzarsi ad una qualche potestà i numeri della serie naturale ne nasce una serie di quantità, le di cui differenze formano una seconda serie inferiore, e le differenze dei termini di questa serie danno una terza serie inferiore, e così in poi, finchè si giunge ad una serie, che è una progressione aritmetica, dei cui termini le differenze sono una quantità costante. Il numero di queste serie, compresavi quella delle quantità costanti viene espresso da $n+1$ (supposto, che $n$ sia l' esponente della potestà). La quantità costante è sempre uguale al prodotto dell'esponente della potestà proposta in tutti gli esponenti delle potestà inferiori fino all'unità, cioè a dire sarà uguale ad $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \ldots 1$. Tutto ciò si comprende sotto questa semplicissima espressione $x^n$, in cui supponendosi $n=2$, $n=3$, $n=4$ ec., essa si cambierà in $x^2$, $x^3$, $x^4$, $x^5$ ec. In ciascuna di queste poi col supporsi successivamente in vece di $x$ i numeri della serie naturale, si avranno le seguenti serie.

Esempio primo, in cui è proposta l'espressione $x^2$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri delle suppos. fatte per $x$ | | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| Serie delle quantità costanti | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| Progressione Aritmetica | ec. | — 7 | — 5 | — 3 | — 1 | + 1 | + 3 | + 5 | ec. |
| Serie nata da $x^2$ | | + 9 | + 4 | + 1 | 0 | + 1 | + 4 | + 9 | |

Esempio secondo, in cui è proposta l'espressione $x^3$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri delle suppos. fatte per $x$ | | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| Serie delle quantità costanti | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | |
| Progressione Aritmetica | ec. | — 24 | — 18 | — 12 | — 6 | 0 | + 6 | + 12 | ec. |
| Prima serie generata | | + 37 | + 19 | + 7 | + 1 | + 1 | + 7 | + 19 | |
| Serie nata da $x^3$ | | — 27 | — 8 | — 1 | 0 | + 1 | + 8 | + 27 | |

Esempio terzo, in cui è proposta l'espressione $x^4$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri delle suppos. fatte per $x$ | | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| Serie delle quantità costanti | | 24 | 24 | 24 | 42 | 24 | 24 | 24 | |
| Progressione Aritmetica | | — 108 | — 84 | — 60 | — 36 | — 12 | + 12 | + 36 | |
| Seconda serie generata | ec. | + 194 | + 110 | + 50 | + 14 | + 2 | + 14 | + 50 | ec. |
| Prima serie generata | | — 175 | — 65 | — 15 | — 1 | + 1 | + 15 | + 65 | |
| Serie nata da $x^4$ | | + 81 | + 16 | + 1 | 0 | + 1 | + 16 | + 81 | |

692. Che poi la quantità costante in queste serie sia sempre uguale al prodotto dell'esponente della potestà in tutti gli esponenti delle potestà inferiori, si può osservare nei precedenti esempj, mentre quando la potestà proposta è il quadrato, la

quantità costante è $=2\times1$: Quando è il cubo, ella è $=3\times2\times1$: Quando è il quadrato-quadrato, essa è $=4\times3\times2\times1$: Quando è la quinta potestà, essa è $=5\times4\times3\times2\times1$ ec.

693. Quanto ho osservato circa l'espressione generale $x^m$, vale ancora per qualsivoglia equazione, mentre qualunque equazione non è altro, che $x^m$ accresciuta, o diminuita di alcune altre quantità, le quali secondo le diverse supposizioni fatte pel valore di $x^m$ crescono, e calano relativamente all'aumento, e diminuzione, che subisce la stessa $x^m$. Ciò si può intanto osservare nei due seguenti Esempj.

Esempio primo, in cui è proposta l'equazione $x^2-9x-36=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri delle supposizioni fatte per $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| Serie delle quantità costanti | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| Progressione Aritmetica | $-16$ | $-14$ | $-12$ | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ |
| Serie nata dall'equaz. $x^2-9x-36=0$ | $0$ | $-14$ | $-26$ | $-36$ | $-44$ | $-50$ | $-54$ |

Esempio secondo, in cui è proposta l'equazione $x^3-2x^2-5x+10=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri delle supposizioni fatte per $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| Serie delle quantità costanti | $6$ | $6$ | $6$ | $6$ | $6$ | $6$ | $6$ |
| Progressione Aritmetica | $-28$ | $-22$ | $-16$ | $-10$ | $-4$ | $+2$ | $+8$ |
| Prima serie generata | $+46$ | $+24$ | $+8$ | $-2$ | $-6$ | $-4$ | $+4$ |
| Serie nata dall'equaz. $x^3-2x^2-5x+10=0$ | $-20$ | $+4$ | $+12$ | $+10$ | $+4$ | $0$ | $+4$ |

694. La serie, che nasce dall'equazione proposta col supporsi $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ ec. è quella, che propriamente io chiamo serie dell'equazione. Ora questa serie è quella appunto, che dà le cercate radici dell'equazione, come dimostrerò in appresso: Essa poi nascendo dalle successive supposizioni di $x=0$, $x=1$, $x=2$ ec., ognuno vede, che se i termini di questa serie si dovessero trovare mediante l'attuale sostituzione nell'equazione dei supposti valori di $x$, l'operazione riuscirebbe talmente lunga, e nojosa da stancare qualunque più paziente Analista. Il metodo adunque, che io quì sono per dare tutto si ristringe a trovare con facilità, e speditezza questa serie, la qual deve somministrare le radici dell'equazione.

695. Ella pertanto si ottiene così. Primieramente devesi supporre $x=0$, $x=1$, $x=2$ ec., e mediante l'attuale sostituzione di questi valori in luogo di $x$ ritrovare gli aggregati de' termini dell'equazione, che nascono da queste supposizioni, mentre essi saranno altrettanti termini della serie. Tanti poi di questi termini colle attuali sostituzioni si devono trovare, quanti ne mostra il grado dell'equazione accresciuto di una unità, cioè quanti ne indica $n+1$ (supposto che sia $n$ il massimo esponente dell'equazione). Ritrovato questo numero $n+1$ di termini della serie corrispondenti alle fatte supposizioni pel valore di $x$, si sottragga da ciascuno di loro il suo antecedente, quello cioè, che è nato dalla prossima minore supposizione, o sia che gli sta a sinistra, e se ne scriva il residuo sopra il termine, da cui si è fatta la sottrazione, con che si verrà a formare sopra questa prima serie un'altra serie d'ordine prossimamente minore; e colla stessa maniera operando sopra questa seconda serie se ne formi una terza, indi una quarta ec., finchè si giunga alla differenza costante: Siccome poi fa di mestieri il ritrovare colle attuali sostituzioni tanti termini della serie dell'equazione, quanti ne mostra $n+1$, così sarà $n+1$ il numero delle serie ori-

orizzontali da trovarsi, inchiusavi però quella (che per altro non è propriamente serie), la quale ha per termini la differenza costante. Fatto ciò col solo sommare, o sottrarre un termine dall'altro secondo i loro segni, si continueranno a piacere tanto a destra, come a sinistra tutte queste serie, e però con somma facilità si otterrà la serie dell'equazione. L'esempio renderà ancor più chiaro, e facile il metodo.

*696.* Si debba ritrovare la serie, che nasce dall'equazione $x^2-x3-10=0$, onde poterne determinare le sue radici. Poichè l'esponente di questa equazione è 2, il numero de'termini da ritrovarsi colla materiale somma sarà $2+1=3$; e così pure saranno $2+1=3$ le serie orizzontali da formarsi compresavi la serie delle quantità costanti. Si supponga pertanto in primo luogo $x=0$ (se ne veda l'esempio quì sotto), quale zero si collochi in (A), poscia sotto a questo zero in una distanza tale, che vi possano cadere tre serie orizzontali, come in (B) si collochi la somma di tutti i termini dell'equazione, la quale nasce dall'ipotesi di $x=0$, e che sarà $=-10$. Dopo ciò si supponga $x=1$, e questa unità si scriva dopo il zero nella fila orizzontale (R, C,) e perchè da questa supposizione si ha $-12$ per la somma di tutti i termini dell'equazione, questa somma $-12$ si collochi in (H) dopo il $-10$ nella fila orizzontale (T, D). Finalmente si supponga $x=2$, e questo 2 si metta dopo l'1 nella fila orizzontale (R, C), nella qual fila avranno luogo i numeri naturali, positivi, e negativi, che si vanno supponendo pel valore d'$x$, e fra'quali perciò si troveranno le cercate radici; e poichè dal supporsi $x=2$, si ha $-12$ per la somma di tutti i termini dell'equazione, questa somma $-12$ si ponga in (M) dopo l'altra $-12$ nella fila orizzontale (T, D), e questa serie, continuata che sia, sarà la cercata serie dell'equazione.

*697.* Ora, che coll'attuale sostituzione de'numeri 0, 1, 2 della serie naturale in luogo di $x$ si sono trovate tante somme dell'equazione proposta $x^2-3x-10=0$, quante ne indica $2+1$, dalla somma $-12$ (H) si sottragga la precedente $-10$ (B), e il residuo $-2$ si scriva sopra il $-12$ (H); indi dalla terza $-12$ (M) si sottragga la precedente $-12$ (H), e il residuo zero si scriva sopra il $-12$ (M), nel qual modo si saranno trovati due termini della serie orizzontale (S, E). Che se da questo secondo termine zero si sottrerà il precedente $-2$, il residuo (che sarà la differenza costante) sarà $+2$, il quale dovrassi scrivere sopra il zero. Questa differenza costante occupa la fila orizzontale (V, G) al di sotto della serie naturale. I termini poi finora trovati, per ciascuna serie ci somministrano quanto basta per continuare colla sola somma, e sottrazione tutte le serie tanto a destra, quanto a sinistra; poichè sotto a ciascun numero naturale scrivendosi la ritrovata differenza costante, se si sommerà l'ultimo trovato termine zero della fila orizzontale (S, E) colla differenza costante, la somma $+2$ sarà il susseguente termine della stessa fila orizzontale (S, E); che se questo termine $+2$ si sommerà di nuovo colla differenza costante, si avrà il susseguente termine $+4$, e in questo modo replicando l'operazione si continuerà a destra la fila orizzontale (S, E). Se poi questa fila si vorrà continuare a sinistra, dal primo termine trovato $-2$ si sottragga la differenza costante, e il residuo $-4$ si scriva dopo il $-2$; indi dal $-4$ sottraendo di nuovo la differenza costante si avrà di residuo $-6$ da scriversi dopo il $-4$, col qual metodo continuando, si avranno quanti si vogliono termini nella fila orizzontale (S, E) verso la parte sinistra.

*698.* Questa fila orizzontale (S, E) come si vede è una progressione aritmetica, il di cui esponente è segnato nella fila orizzontale (V, G).

699. Reſta adeſſo da continuarſi tanto a deſtra, come a ſiniſtra la ſerie (T, D) dell'equazione, che è lo ſcopo principale, e in grazia della quale ſi ſono determinate le precedenti file orizzontali. Il modo però di ritrovare tutti i di lei termini non è punto differente dalla maniera, che ſi è tenuta per continuare la fila orizzontale (S, E); mentre ſe ſi ſommerà l'ultimo trovato termine —12 (M) col +2, che nella fila (S, E) ſta immediatamente ſopra al ſuſſeguente termine da trovarſi, ſi avrà lo ſteſſo ſuſſeguente termine, che è —10 ſcritto in (F); poſcia ſommando il —10 col +4, ſi ha il —6 (X), e in queſto modo operando ſi continuerà a deſtra la ſerie dell'equazione. Per continuarla poſcia a ſiniſtra ſi farà così: Dal termine —10 (B) ſi ſottragga il —4, che gli ſta ſopra nella fila orizzontale (S, E), e il reſiduo —6 ſi ſcriva in (P) dopo il —10; indi da queſto —6 (P) ſi ſottragga il —6, che gli ſta ſopra, e il reſiduo zero ſi ſcriva in (Q) dopo il —6, e in queſto modo ſi potrà continuare a ſiniſtra quanto porta il biſogno la ſerie dell'equazione.

700. Ognuno vede, che in tanto colla materiale ſomma ſi ſono trovati tanti termini della ſerie dell'equazione quanti ne indica $2+1$, per potere arrivare alla differenza coſtante, per giugnere alla quale biſogna paſſare per tante ſerie orizzontali, quante ne indica $n+1$ compreſavi però la ſteſſa ſerie coſtante.

701. Nè ſembri ſtrano, che quì ſi preſcriva di giungere alla differenza coſtante quando per altro ella ſi ſa immediatamente trovare (giuſta il num. 692,), poichè ciò ſerve per ritrovare i neceſſarj termini delle ſerie intermedie, e per iſcoprire, ſe nelle operazioni è accaduto alcuno sbaglio, mentre ſapendoſi per l'accennato numero quale debba eſſere la differenza coſtante, ſe il termine trovato nella fila orizzontale $n+1$, non ſarà qual deve eſſere la differenza coſtante, ciò ſarà ſegno evidente, che in qualcuna delle fatte operazioni ſi è commeſſo errore.

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $x^2-3x-10=0$

| | | | | | A | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | — | 2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | C |
| V | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | G |
| S | —18 | —6 | — 4 | — 2 | 0 | + 2 | + 4 | +6 | | E |
| T | 0 | —6 | —10 | —12 | —12 | —10 | — 6 | 0 | | D |
| | Q | P | B | H | M | F | X | | | |

702. Due coſe ſi devono quì oſſervare di paſſaggio circa la differenza coſtante; la prima, che ella ſarà poſitiva qualora il maſſimo termine dell'incognita ſarà poſitivo; ma ſe egli ſarà negativo, ancora la differenza coſtante ſarà affetta da ſegno negativo, come ſi può vedere nel ſeguente eſempio, in cui è propoſta l'equazione

$$-x^3+39x-90=0$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| — | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| + | 24 | 18 | 12 | 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| + | 2 | 20 | 32 | 38 | 38 | 32 | 20 | 2 | 22 |
| — | 180 | 160 | 128 | 90 | 52 | 20 | 0 | 2 | 20 |

La ſeconda ſi è, che ſe il maſſimo termine dell' equazione avrà coefficiente, la differenza coſtanre trovara nel modo detto dovrà eſſere moltiplicata in queſto coefficiente: come ſe l' equazione propoſta foſſe $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}$ ec., la differenza coſtanre ſarebbe $a\times\overline{n}\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}$ ec., come ſi può vedere nel ſeguente eſempio, in cui la differenza coſtante è $1\times1\times2$

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $15x^3-109x+182=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| — | 154 | 124 | 94 | 64 | 34 | 4 | 26 |
| + | 306 | 182 | 88 | 24 | 10 | 14 | 12 |

703. Lo ſteſſo modo di operare, che ſi è pur ora accennato ſi oſſervi nelle altre equazioni di grado più alto, le quali avranno bensì più file orizzontali a miſura, che il grado dell'equazione è maggiore; ma queſto maggior numero di file, quantunque prolunghi un poco l'operazione non altererà punto la maniera di giugnere a determinare la ſerie dell' equazione, come ſi può vedere negli eſempj della Tavola V.

704. Eſpoſto il modo di ritrovare la ſerie dell'equazione, vediamo ora come eſſa ce ne dia le radici, le quali (poichè fin'ora abbiamo ſuppoſta l'equazione libera dalle frazioni a riſerva dell'eſ. precedente) ſaranno o razionali intere, o irrazionali, o immaginarie. Dico pertanto, che ſe le radici ſaranno razionali, eſſe ci verranno indicate da quei termini della ſerie, che ſono zero, e in tal caſo le radici dell' equazione ſaranno quei numeri della ſerie naturale, dalla di cui ſuppoſizione pel valore di $x$ ſono nati queſti zeri. Le radici irrazionali ci verranno indicate dal cambiamenro di ſegno, da cui ſaranno affetti due termini conſecutivi, e allora le radici irrazionali cadranno fra i due numeri della ſerie naturale corriſpondenti ai due termini della ſerie dell' equazione affetti da ſegno contrario. Le radici immaginarie ci verranno indicate dalla ſerie, qualora andrà ella conrinuando a deſtra, e a ſiniſtra con termini creſcenti all'infinito, onde non ci ſia ſperanza di paſſaggio pel zero, o pure dal poſitivo al negativo, e *vice verſa*, come ſi può vedere nel ſeguente eſempio, in cui la ſerie dopo averci data una radice $=2$, procede con termini ſempre creſcenti a deſtra, e a ſiniſtra all'infinito. Si conoſcerà poi eſſere vana la ſperanza di paſſaggio pel zero, o da ſegno poſitivo a negativo, e *vice verſa*, ma che i termini a deſtra anderanno continuamente creſcendo all' infinito, ogniqualvolta tutti i termini di una colonna verticale ſono poſitivi, ſe la differenza coſtante è poſitiva;

o

tutti negativi, se la differenza costante è negativa, poichè i termini della serie dell' equazione risultando dalla somma de' corrispondenti termini dell' altre serie, se questi termini saranno tutti positivi, le loro somme andranno continuamente crescendo, e così cresceranno i termini della serie dell' equazione: Dalla parte sinistra poi andranno pure crescendo all' infinito i termini della serie, ogniqualvolta i termini verticali saranno affetti da segni alternanti, del che la ragione si è, perchè ciascun termine risultando dal sottrarre dal suo precedente il termine, che gli sta di sopra, e col sottrarsi da una quantità positiva una negativa, si accresce ( pel num. 54. ) la positiva nella sua posizione, siccome sottraendosi da una negativa una positiva, si accresce la negativa nella sua negazione, essendo per ipotesi i termini delle serie orizzontali affetti da segni alternanti, dovranno continuamente crescere tanto le serie risultanti da termini negativi, come le serie risultanti da termini positivi.

Esempio, in cui è proposta l'equazione $x^3-8=0$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| —18 | —12 | —6 | 0 | +6 | +12 | +18 |
| +19 | + 7 | +1 | +1 | +7 | +19 | +37 |
| —16 | — 9 | —8 | —7 | 0 | +19 | +56 |

705. Se pertanto la data equazione avrà radici parte reali, e parte immaginarie, la serie dell' equazione dopo avere esibito le radici reali procederà tosto crescendo a destra, e a sinistra col segno pur ora accennato; lo che pure farà dopo avere dato tutte le radici reali qualora tali siano tutte le di lei radici. Se poi l'equazione avrà sole radici immaginarie, in tal caso la serie, dal termine nato dalla supposizione di $x=0$ andrà tosto crescendo da una parte, e dall' altra all' infinito, facendosi immediatamente vedere il poc' anzi indicato carattere, come si può osservare nel seguente

Esempio, in cui è proposta l'equazione $x^3+2x+7=0$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — 3 | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| — 5 | —3 | —1 | +1 | + 3 | + 5 | + 7 |
| +10 | +7 | +6 | +7 | +10 | +15 | +22 |

706. Debbo adesso far vedere, che con gli esposti indizj la serie ci esibisce le radici dell' equazione proposta. E primieramente che i zeri della serie indichino per radice dell' equazione il corrispondente numero della serie naturale, s' intende abbastanza dal num. 318., poichè solamente col sostituirsi in luogo di $x$ nell' equazione una di lei radice l' aggregato de' termini va a zero; siccome adunque il zero della serie nasce dal sostituirsi nell' equazione in luogo di $x$ il corrispondente numero naturale, quindi è, che egli deve essere radice dell' equazione, e deve essere indicato dal zero della serie. In secondo luogo che le radici irrazionali siano indicate da cambiamento di segno, ogniqualvolta l' equazione è immune da frazioni, costa dal num. 470; per lo che qualora s' incontreranno nella serie due termini affetti da se-

ſegno contrario, ciò vorrà dire, che quì cade una radice irrazionale, i di cui limiti ſono i numeri della ſerie naturale, dalle di cui ſuppoſizioni pel valore di $x$ ſono nati queſti due termini affetti da ſegno contrario. Di fatto, che il valore intermedio ai due termini della ſerie affetti da ſegno contrario corriſponda ad un valore di $x$ intermedio ai due corriſpondenti numeri della ſerie naturale, è queſta una legge, che accompagna la mutazione dei valori dell'equazione relativamente alla mutazione dei valori di $x$, la quale eſſendo continua, cioè facendoſi ſenza ſalto per tutti i gradi della quantità, continua pure per tutti i corriſpondenti gradi deve eſſere anche quella. Finalmente, che la ſerie dopo averci dato alcune radici, ſe l'equazione ne ha di reali, col procedere creſcendo a deſtra, e a ſiniſtra all'infinito, ci moſtri, che le rimanenti radici ſono immaginarie, ſi raccoglie dal num. 471. poichè le radici immaginarie non potendo far cambiare l'aggregato de' termini dell'equazione da poſitivo a negativo, o *vice verſa*, deve perciò la ſerie dopo aver dato le radici reali procedere collo ſteſſo ſegno creſcendo all'infinito.

707. Vengo ora ad applicare il preſente metodo all'equazione, che ſi è trovata nel riſolvere il problema propoſto al num. 779. Se ne veda pertanto la ſoluzione nella Tavola V. all'Eſempio I. Parimente all'eſempio II. della ſteſſa Tavola ſi veda applicato il metodo all'equazione provenuta dalla ſoluzione del Problema dato al num. 612.

708. Ho detto, che quando la ſerie, dopo avere o date, o indicate alcune radici, procederà a deſtra, e a ſiniſtra col carattere indicato al num. 704, ciò ſarà ſegno, che le rimanenti radici ſono immaginarie. Tale dottrina però deveſi intendere con limitazione, mentre non ſempre, che la ſerie ci eſibirà minor numero di radici di quello porti il grado dell'equazione dovraſſi precipitoſamente conchiudere, che le rimanenti radici ſono immaginarie; poichè potrà ſuccedere, che ciò naſca o dall'avere le equazioni delle radici eguali in numero pari, oppure dall'avere delle radici irrazionali parimente in numero pari o eguali, o compreſe fra i medeſimi limiti, ne' quali due caſi lo ſteſſo carattere indicherà più d'una radice.

709. Per conoſcere poi ad un tratto queſte radici eguali in numero pari, ſi oſſervi, che qualora l'equazione avrà più radici reali ineguali, ſe ſi porrà in luogo di $x$ un valore poſitivo aſſai grande, il valore della formola ſarà pure poſitivo, e aſſai grande, indi continuamente andrà decreſcendo fino all'appulſo del valore di $x$ alla prima radice, dopo di che il valore della formola paſſerà in negativo, e andrà creſcendo finchè neceſſariamente dovrà mutare l'incremento in decremento, dovendo dopo l'appulſo alla ſeconda radice paſſare di nuovo in poſitivo, e così ſucceſſivamente: Ma ſe i valori di due radici ſi accoſteranno vicendevolmente ſi diminuirà l'intervallo, in cui il valore della formola tra una radice, e l'altra da prima creſce, e poi cala, e però unendoſi le due radici così che l'equazione abbia due radici eguali, quell'intervallo ſi elide totalmente; e in caſo, che l'equazione abbia due radici irrazionali compreſe tra due numeri naturali ſuppoſti pel valore di $x$, quantunque quell'intervallo non ſia nullo in ſe ſteſſo, compariſce nullo relativamente ai due numeri naturali. E però nel primo caſo di un numero pari di radici uguali il valore della formola nell'appulſo di $x$ alle radici eguali non paſſa il zero, ma dal zero ritorna addietro affetto dal medeſimo ſegno, e le radici eguali eſſendo irrazionali, il valore della formola non paſſa da un ſegno all'altro, ma continua collo ſteſſo ſegno, lo che pure oſſervaſi quando le radici irrazionali in numero pari ſono compreſe fra due numeri naturali conſecutivi. Che ſe ſaranno tre le

ra-

radici razionali, o le irrazionali eguali, o le irrazionali compreſe fra due numeri naturali conſecutivi, nel primo caſo il valore della formola paſſerà pel zero, e muterà ſegno; nel ſecondo, e terzo caſo non ſi farà zero, perchè non può, ma muterà ſegno. E generalmente ſe le radici eguali, o le irrazionali compreſe fra due numeri naturali conſecutivi ſaranno in numero pari, nel valor della formola ſi avrà regreſſo; ſe ſaranno in numero impari, ſi avrà tranſito.

710. Ciò premeſſo, ſe nella ſerie tanto il termine, che precede, quanto quello, che ſegue qualche zero ſarà affetto dallo ſteſſo ſegno, ciò ſarà argomento ſicuro, che quel zero ci dà uno, o più paja di radici razionali eguali, lo che ſi veda nel ſeguente eſempio, la di cui equazione ha quattro radici, due eguali a —3, e due eguali a 2

Eſempio, in cui è propoſta l'Equazione $x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 4 | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 |
| —120 | — 96 | —72 | —48 | —24 | 0 | +24 | +48 |
| +220 | +124 | +52 | + 4 | —20 | —20 | + 4 | +52 |
| —160 | — 36 | +16 | +20 | 0 | —20 | —16 | +36 |
| + 36 | 0 | +16 | +36 | +36 | +16 | 0 | +36 |

711. L'indizio poi per conoſcere, che l'equazione ha radici irrazionali eguali in numero pari, o compreſe tra due numeri naturali conſecutivi ( ſuppoſto, che ſianvi queſte ſole nell'equazione, al qual termine deveſi giungere finalmente ) ſarà, che la ſerie andrà creſcendo, e calando, e ſolamente dopo un certo numero di termini vedraſſi comparire il ſegnale additato al num. 704., quando ( giuſta il num. 705. ) egli dovrebbeſi toſto far vedere, ſe le radici foſſero immaginarie: Queſte radici irrazionali poi cadranno vicino ai numeri naturali, dalla ſuppoſizione dei quali pel valore di $x$ naſcono i termini minimi della ſerie. Ciò ſi oſſervi nell'eſempio ſeguente, la di cui equazione ha quattro radici irrazionali, delle quali due cadono fra 3, e 4, l'altre due fra —3, e —4

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $x^4-25x^2+154=0$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 5 | — 4 | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 |
| —150 | —132 | —108 | — 84 | — 60 | — 36 | — 12 | +12 | +36 | +60 | + 84 |
| +374 | +242 | +144 | +60 | 0 | — 36 | — 48 | —36 | 0 | +60 | +144 |
| —386 | —144 | 0 | +60 | + 60 | + 24 | — 24 | —60 | —60 | 0 | +144 |
| +154 | + 10 | + 10 | +70 | +130 | +154 | +130 | +70 | +10 | +10 | +154 |

712. Da queſti due indizj pertanto ſi potrà prender norma in caſo, che le accennate radici ſiano in numero pari, onde ſicuramente affermare ſe ſiano reali, o immaginarie le radici, che mancano. Che ſe tali radici ſaranno in numero impari, in tal caſo poichè ſi dà tranſito da un ſegno all'altro, non avranno luogo i due indicati indizj; per altro dal numero delle radici, che mancano, e dal ſapere, che le ra-

radici immaginarie non poſſono eſſere, che in numero pari, ſarà facile il determinare, ſe le radici, che mancano, ſiano, o non ſiano immaginarie.

713. Ogniqualvolta adunque s'abbiano indizj, oppure s'abbia ſolamente ſoſpetto, che vi ſiano radici eguali, oppure radici irrazionali compreſe tra due numeri naturali conſecutivi, la regola generale da uſarſi ſi è, che dopo avere applicato alla data equazione il metodo, ed averne ritrovate alcune radici, ſi divida tale equazione pel prodotto di queſte radici, indi all' equazione reſidua ſi applichi nuovamente il metodo, mentre le radici, che non apparivano nella ſerie o per eſſere eguali, o per eſſere irrazionali compreſe fra due numeri naturali conſecutivi, ſaranno rappreſentate dalla nuova ſerie. Se ne veda l' eſempio III. della Tavola V., in cui è propoſta l' equazione $x^5 + x^3 - 22x^4 - 18x^3 + 109x^2 + 5x - 100 = 0$.

714. Ora per queſt'equazione la ſerie mi dà due radici, che ſono $-1$, e $4$; e perchè dopo il zero nato dalla ſuppoſizione di $-1$ non ho toſto il ſegnale del num. 704., come lo dovrei avere giuſta il num. 705.; però ſono ſicuro, che l' equazione ha qualche altra radice. Divido pertanto tale equazione per $\overline{x+1} \times \overline{x-4}$, e mi viene di quoziente l'equazione $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 20x + 25 = 0$, alla quale applico il metodo per indagarne le radici, come ſegue

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $x^4+4x^3-6x^2-20x+25=0$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
| 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 |
| −108 | −84 | −60 | −36 | −12 | +12 | +36 |
| +170 | +86 | +26 | −10 | −22 | −10 | +26 |
| −91 | −5 | +21 | +11 | −11 | −21 | +5 |
| +9 | +4 | +25 | +36 | +25 | +4 | +9 |

Scorgo pertanto, che ella ha quattro radici irrazionali, le quali cadono vicino ai numeri naturali, dai quali ſono nati i due termini della ſerie $+4$, e $+4$.

715. Si avrà poi il proſſimo vero valore di queſte radici irrazionali, giacchè avere non ſi poſſono altrimente, con ricercare i più riſtretti limiti, fra i quali cadono, nella maniera, che eſporrò in appreſſo, o pure giuſta il num. 675, o 676.

716. Intanto ſi oſſervi, riſpetto alle radici irrazionali, che ſupponendo per $x$ valori infinitamente piccoli, quando ſi giungerà a quella ſuppoſizione, che è infinitamente proſſima alla vera radice, il corriſpondente termine della ſerie differirà dal zero di una quantità infinitamente piccola: Se poi vi ſaranno più radici irrazionali compreſe fra due numeri naturali conſecutivi, col fare le poc' anzi accennate ſuppoſizioni, ogni qual volta ſi arriverà ai proſſimi valori delle radici, ſi avrà nei corriſpondenti termini della ſerie cambiamento di ſegno, poichè col ſoſtituirſi nell'equazione in luogo dell' incognita due numeri, de' quali uno ſia maggiore, e l' altro minore di una delle di lei radici reali, e nel tempo ſteſſo queſti due numeri differiſcano l'uno dall'altro di una quantità minore della differenza, che paſſa fra queſta, e ciaſcuna dell' altre radici reali dell' equazione, queſte due ſoſtituzioni danno neceſſariamente due riſultati affetti da ſegni contrarj, come or ora dimoſtrerò: Ma per ipoteſi i valori ſoſtituiti in luogo di $x$ ſono quantità infinitamente piccole, e conſeguen-

temente la loro differenza è minore della differenza, che paſſa tra la radice in queſtione, e qualunque altra delle radici reali dell'equazione; dunque i riſultati delle ſoſtituzioni de' ſuddetti due numeri in luogo di $x$ devono eſſere affetti da ſegni contrarj. Che poi col ſoſtituirſi due numeri uno maggiore, e l'altro minore di una radice dell'equazione, e de' quali la differenza ſia minore della differenza, che paſſa tra queſta radice, e tutte le altre dell'equazione, ne debbano riſultare due numeri affetti da ſegni contrarj, la coſa è bene evidente; mentre ſia $m$ una radice dell'equazione, della quale ſia $a$ maggiore, e $b$ minore, cioè $a>m$, $b<m$, e le altre radici dell'equazione ſiano $n$, $p$ ec.. Sia $\beta$ la più piccola delle differenze, che paſſano fra la radice $m$, e ciaſcuna delle altre radici $n$, $p$ ec.. Eſſendo per ipoteſi $a-b<\beta$, ciaſcuna delle quantità $a-n$, $a-p$ ec. ſarà affetta dallo ſteſſo ſegno, che la ſua corriſpondente $b-n$, $b-p$, e ſolamente le quantità $a-m$, $b-m$ ſaranno affette da' ſegni contrarj, perchè ſe $a-n$, $a-p$ ec., e $b-n$, $b-p$ ec. aveſſero diverſo ſegno, biſognerebbe, che la quantità $n$, o la quantità $p$ foſſe compreſa tra $a$, $b$, che non la può eſſere ſtante la fatta ipoteſi di $a-b<\beta$. Le due quantità adunque

$$\overline{a-m}\times\overline{a-n}\times\overline{a-p}\text{ ec.}$$
$$\overline{b-m}\times\overline{b-n}\times\overline{b-p}\text{ ec.}$$

devono eſſere affette da diverſo ſegno.

717. Prima di paſſare avanti ſtimo neceſſario di ſciogliere una difficoltà, che potrebb'eſſer moſſa, ed è, che dovendoſi riſolvere equazioni, le di cui radici ſiano numeri molto alti, dovrebbeſi in tal caſo per determinar tali radici protrarre a lungo per moltiſſimi termini la ſerie, e però l'operazione riuſcirebbe ſoverchiamente lunga, e nojoſa. Adunque ogni qual volta s'abbia a trattare un'equazione, che abbia radici molto alte, lo che ſi ſcorgerà facilmente dall'ultimo termine dell'equazione, come pure dall'andamento de'termini della ſerie, ſi abbrevierà l'operazione cercando prima in qual migliajo, in qual centinajo, in quale decina de'valori di $x$ cadano le radici, che ſi cercano, e ciò ſi otterrà trasformando prima l'equazione propoſta con ſupporre $x=10y$; $x=100y$, $x=1000y$ ec., indi applicando il metodo all'equazione così trasformata: Vale a dire, che avendo per eſempio un'equazione, le di cui radici cadano tra 1000, e 10000, biſognerà primieramente trasformare l'equazione data con ſupporre $x=1000y$; poi aſſoggettando al metodo l'equazione trasformata, ſi oſſervi dove o la ſerie ſi fa zero, o muta ſegno: ſe la ſerie ſi farà zero per eſempio nel 4, ciò indicherà, che una radice è 4000 (quello, che dico d'una radice s'intenda delle altre); ma ſe la ſerie dopo il 4 de'numeri naturali muterà ſegno, ciò darà a vedere, che la radice cade tra il 4000, e il 5000: Si trasformi adunque di nuovo la da prima propoſta equazione con porre $x=4000+100z$, e alla trasformata ſi applichi il metodo, onde potere ſcorgere in qual centinajo tra il 4000, e il 5000 cade queſta radice, e trovandoſi per eſempio, che al 7 de'numeri naturali il corriſpondente termine della ſerie ſi fa zero, ciò vorrà dire, che la radice cercata è 4700: Se in vece di farſi zero ſi mutaſſe il ſegno da poſitivo a negativo, o *vice verſa*, ciò ſarebbe indizio, che la radice cade tra il 4700, e il 4800: Si trasformi pertanto nuovamente l'equazione già data facendo $x=4700+10u$, e colla ſteſſa maniera ſi proſegua l'operazione. L'eſempio ne farà vedere la facilità: Si debbano determinare le radici dell'equazione $x^3-467x+2310=0$, di cui le radici, come ſi ſcorge dall'ultimo termine ſono molto alte. La trasformo pertanto

pri-

primieramente con porre $x=10y$, con che ſi ha l'equazione $1000y^3-4670y+231=0$, a cui applico il metodo come quì ſi vede.

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $1000y^3-4670y+231=0$

| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 2000 | 2000 | 2000 | 2000 | 2000 |
| −5670 | −3670 | −1670 | +330 | +2330 | +4330 |
| +231 | −3439 | −5109 | −4779 | −2449 | +1881 |

Ritrovo adunque che una radice ſola cade tra il 100, e il 1000, ed è 400 più qualche coſa; l'altra cade tra il 0, e il 100; mi appiglio pertanto a ritrovar la prima determinando in qual decina tra il 400, e il 500 ella cade, e a queſt'effetto trasformo l'equazione $x^3-467x+2310=0$ con porre $x=400+10z$, e mi viene $10z^3+333z-2449=0$, alla quale applicando il metodo, come ſi vede nel ſeguente

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $10z^3+333z-2449=0$

| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| +323 | +343 | +363 | +383 | +403 | +423 | +443 | +463 |
| −2449 | −2106 | −1743 | −1360 | −957 | −534 | −91 | +369 |

trovo, che la radice cade tra il 60, e il 70, e però ella è 460 più qualche coſa.

718. Per ſapere finalmente coſa ſia queſto di più, trasformo per ultimo l'equazione $x^3-467x+2310=0$ facendo $x=460+u$, e mi viene $u^3+453u-910=0$, che aſſoggetto al metodo, come quì ſi vede:

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $u^3+453u-910=0$

| 0. | 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|---|
| 2. | 2. | 2. | 2. |
| +452 | +454 | +456 | +458 |
| −910 | −456 | 0 | +458 |

Onde vengo in fine a ſcoprire che queſta radice è 462. Se dividerò pertanto la data equazione $x^3-467x+2310=0$ per $x-462$, troverò l'altra radice, che è 5.

719. Il modo di operare, che in quest'eſempio abbiamo oſſervato per le equazioni di ſecondo grado, vale egualmente con pari facilità nelle altre equazioni più alte.

720. Queſto metodo ſteſſo ſomminiſtra il modo di approſſimarſi al vero valore delle radici. Eſſendoſi pertanto ritrovati i limiti fra' quali cadono le irrazionali, come ſarebbe nel ſeguente

Esempio, in cui è proposta l'equazione $x^3+2x-5=0$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| —4. | —3. | —2. | —1. | 0. | 1. | 2. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| —7 | —5 | —3 | —1 | +1 | +3 | +5 |
| +3 | —2 | —5 | —6 | —5 | —2 | +3 |

In cui una radice cade fra 1, e 2, l'altra tra —3, e —4, si trasformi la data equazione facendo $x=a+\frac{y}{10}$ (intendo per $a$ uno dei limiti della radice cercata, quello cioè, che ne è il minore), onde si avrà

$$x^3=a^3+\frac{2ay}{10}+\frac{y^2}{100}$$
$$2x=2a+\frac{2y}{10}$$
$$-5=-5$$

$$+100a^2+20ay+y^2$$
$$+200a+20y$$
$$-500$$

E sostituendo in luogo di $a$ il suo valore, che è 1 (supposto, che si voglia approssimare alla vera radice, che cade fra 1, e 2), l'equazione sarà $y^2+40y-200=0$ quale si assoggetti al metodo, e si avrà

Esempio, in cui è proposta l'equazione $y^2+40y-200=0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4 | 5. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| +39 | +41 | +43 | +45 | +47 | +49 |
| —200 | —159 | —116 | —71 | —24 | +25 |

che dà $\frac{4}{10}$, e però questa radice sarà 1. 4.

721. Che se nella precedente trasformata si sostituirà in vece di $a$ il —3 limite dell'altra radice, essa diverrà $y^2-40y-200=0$, a cui applico in metodo come qui si vede.

Esem-

Esempio, in cui è proposta l'equazione $y^2-40y-200=0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −5. | −4. | −3. | −2. | −1. | 0. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| −51 | −49 | −47 | −45 | −43 | −41 |
| +25 | −24 | −71 | −116 | −159 | −200 |

e ne ricavo $\frac{4}{10}$, e però l'altra radice è 3. 4.

722. Si accosterà anche di più ai veri cercati valori trasformando di nuovo quest' equazione $y^2+40y-200=0$ con fare $y=a+\frac{\gamma}{10}$, mentre nella formola $x=a+\frac{y}{10}$ posto in luogo di $a$ il limite della radice minore, e formata in seguito l'equazione di $y$, se si prolungherà la serie quanto porta il bisogno verranssi a determinare i limiti più ristretti di tutte le radici irrazionali; ma il più delle volte sarà necessario prolungare molto la serie, lo che può esser nojoso.

723. Per avere il più prossimo valore delle vere radici, si poteva fare a dirittura $x=a+\frac{y}{1000}$ ec.: ma siccome in tal caso o bisognerebbe assoggettarsi a un' operazione molto lunga, o pure farebbe di mestieri determinar prima (giusta il num. 717.) fra quali decine, centinaja ec. cade il valore cercato, però torna più comodo il ripetere le operazioni, supponendo $x=a+\frac{y}{10}$.

724. Per altro si potrà accostare più speditamente al vero valore delle cercate radici come si è accennato al num. 715.

725. Fin'ora ho supposto le equazioni libere da frazioni, e però ho considerato solamente le equazioni, che hanno radici intere. Il metodo per altro è applicabile ancora alle equazioni fratte, come si può vedere nella seguente equazione, le di cui radici sono $2\frac{3}{5}$, $4\frac{2}{3}$

Esem-

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $x^2 - \frac{109}{15}x + \frac{182}{15} = 0$

| —1. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{30}{15}$ | $\frac{30}{15}$ | $\frac{30}{15}$ | $\frac{30}{15}$ | $\frac{30}{15}$ | $\frac{30}{15}$ | $\frac{30}{15}$ |
| $-\frac{154}{15}$ | $-\frac{124}{15}$ | $-\frac{94}{15}$ | $-\frac{64}{15}$ | $-\frac{34}{15}$ | $-\frac{4}{15}$ | $+\frac{26}{15}$ |
| $+\frac{306}{15}$ | $+\frac{182}{15}$ | $+\frac{88}{15}$ | $+\frac{24}{15}$ | $-\frac{10}{15}$ | $-\frac{14}{15}$ | $+\frac{12}{15}$ |

726. Con ridurre poi l'equazione a queſta forma $15x^2 - 109x + 182 = 0$ ſi avrà la medeſima ſerie, ma ſenza frazioni, e però più facile da calcolarſi, come quì ſi vede

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $15x^2 - 109x + 182 = 0$

| —1. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| —154 | —124 | — 94 | — 64 | — 34 | — 4 | + 26 |
| +306 | + 182 | + 88 | + 24 | — 10 | — 14 | + 12 |

Poichè in queſti caſi, ne' quali l'equazione ha frazioni, o pure il di lei maſſimo termine ha coefficiente, la ſerie indica due numeri della ſerie naturale per limiti di ciaſcuna radice, ſiccome fa pure quando le radici ſono irrazionali, però potrebbe naſcer dubbio, ſe le di lei radici ſiano puramente fratte, ovver anche irrazionali. Per togliere queſto dubbio ſi trasformi l'equazione in un' altra, che, eſſendo immune da frazioni, abbia il maſſimo termine libero da coefficiente, Alla trasformata ſi applichi il metodo, e ſe la ſerie darà le radici razionali, ciò ſarà ſegno, che le radici della prima equazione ſono numeri fratti: Se poi dà i limiti, ciò baſta per iſcorgere, che le radici della prima equazione ſono irrazionali. Prendiamone l'eſempio da queſta precedente equazione $15x^2 - 109x + 182 = 0$. Per trasformarla in un'altra, il di cui maſſimo termine abbia la ſola unità per coefficiente, faccio (giuſta il num. 537.) $x = \frac{y}{15}$, e fatte le debite ſoſtituzioni, mi naſce l'equazione $y^2 - 109y + 2730 = 0$. Poichè l'ultimo termine è un numero alto, m'accorgo, che le radici di queſta equazione ſaranno parimente numeri alti, però determino prima (giuſta il num. 717.) fra quali decine cadono queſte radici, e trovo, che una cade fra 30, e 40, e l'altra è 70. Per ritrovare la prima applico il metodo a queſta equazione, cominciando le ſuppoſizioni dal numero 30, come ſegue

Equa-

Equazione propoſta $y^3-109y+2730=0$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30. | 31. | 32. | 33. | 34. | 35. | 36. | 37. | 38. | 39. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| −50 | −48 | −46 | −44 | −42 | −40 | −38 | −36 | −34 | −32 |
| +360 | +312 | +266 | +222 | +180 | +140 | +102 | +66 | +32 | 0 |

Una radice adunque è 39, e l'altra è 70. Reſtano ora a determinarſi le radici dell' equazione da prima propoſta: Ma ſiccome per trasformare tale equazione ſi è fatto $x=\frac{y}{15}$, lo che rende le radici dell'equazione trasformata uguali alle radici dell' equazione propoſta moltiplicate per 15, quindi per avere tali radici baſterà dividere per 15 le ritrovate radici dell' equazione trasformata. Le radici adunque dell' equazione $15x^2-109x+182=0$ ſono $\frac{39}{15}$, e $\frac{70}{15}$, cioè $2\frac{3}{5}$, e $4\frac{2}{3}$.

727. In qualſivoglia equazione il termine cognito è una quantità coſtante indipendente da $x$, e però i ſoli termini, ne'quali entra l'incognita $x$ formano la funzione, che è il termine generale della ſerie, come ſi può vedere nel ſeguente eſempio, in cui ſi conſiderano i ſoli primi termini dell'equazione $x^3-12x^2+44x-48=0$ in cui entra la $x$, e ne naſce una ſerie dello ſteſſo ordine, che viene indicato dal maſſimo eſponente dell'incognita

Eſempio, in cui è propoſta l'equazione $x^3-12x^2+44x=48$, al di cui primo membro ſoltanto ſi applica il metodo

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
| 6. | 6. | 6. | 6. | 6. | 6. | 6. | 6. | 6. |
| −36 | −30 | −24 | −18 | −12 | −6 | 0 | 6 | +12 |
| +87 | +57 | +33 | +15 | +3 | −3 | −3 | +3 | +15 |
| −57 | 0 | +33 | +48 | +51 | +48 | +45 | +48 | +63 |

728. Due coſe poi devonſi oſſervare in queſta ſerie; la prima ſi è, che ella dà le radici dell'equazione $x^3-12x^2+44x$, della quale una è zero, e l'altre due ſono le radici dell'equazione $x^2-12x+44=0$: la ſeconda è, che i termini della ſerie, i quali corriſpondono ai numeri naturali, ch'erano le radici dell'equazione non privata del termine cognito, riſultano eguali allo ſteſſo termine cognito, e ciò naſce dall'eguaglianza de'due membri, quale eguaglianza non ha luogo ſe non in caſo, che in luogo di $x$ ſi pongano le radici dell' equazione.

729. Tutto ciò avrà luogo, ancorchè con un fattore del termine cognito ſi divida l'uno, e l' altro membro, poi ſi applichi il metodo al primo membro, come quì ſi vede

Eſem-

Esempio, in cui è proposta l'equazione $\frac{x^3-12x^2+44x}{3}=16$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —1. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
| 2 | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| —12 | —10 | —8 | —6 | —4 | —2 | 0 | +2 | +4 |
| +29 | +19 | +11 | +5 | +1 | —1 | —1 | +1 | +5 |
| —19 | 0 | +11 | +16 | +17 | +16 | +15 | +16 | +21 |

In questo caso poi la differenza costante è il quoziente, che nasce dal dividersi la differenza costante, che compete all'equazione (giusta il num.692.) per quella quantità, che divide la formola, come qui il 3.

730. Si vede pertanto, che un'equazione qualunque ella sia non ha radici, che col presente metodo non siano determinabili. Per rendere più facili le operazioni nel ritrovare colla materiale somma i necessarj termini della serie dell'equazione, tornerà comodo servirsi della Tavola delle potestà data al num. 1000. del primo Tomo.

Quantunque a varie equazioni abbia applicato il presente metodo, onde se ne possa veder l'uso, soggiugnerò nulladimeno un Problema dalla di cui risoluzione ne nasce un'equazione di decimo grado, le di cui radici col presente metodo facilmente si determineranno. Egli è il seguente.

731. Prob. Avvi una vasca, che getta acqua per un numero $n$ di luci di differenti diametri cogniti, e delle quali è data la posizione al di sotto della superficie dell'acqua. Cercasi la posizione, che devesi dare ad una nuova luce, la di cui distanza dalla superficie dell'acqua stia al suo diametro, come $a:b$, cosicchè l'acqua, che esce da questa luce stia all'acqua, che esce dalle altre luci, come $p:q$.

Ris. Il numero $n$ delle luci cognite sia $=4$. Il raggio della prima delle predette luci sia $=d$, l'altezza della superficie dell'acqua sopra il di lei centro sia $=e$. Giusta il Guglielmini alla prop. 10. del lib. 2. della misura delle acque correnti la quantità d'acqua, che sortirà da questa luce, verrà determinata dal prodotto, che nasce con moltiplicarsi la velocità media nel quadrato del di lei diametro. La velocità media poi per la prop. 8. dello stesso lib. viene espressa da due terzi della differenza, che passa tra il prodotto dell'altezza dell'acqua sopra l'infimo punto della luce nella radice quadrata di tale altezza, e il prodotto dell'altezza dell'acqua sopra il punto superiore della luce nella radice quadrata di quest'altezza, la quale quantità deve essere divisa pel diametro della luce; che però giusta le fatte denominazioni del diametro della luce, e dell'altezza, la velocità media di questa luce verrà espressa dalla seguente formola $\frac{\frac{2}{3}\times\sqrt{e+d}\,\sqrt{e+d}-\frac{2}{3}\times\sqrt{e-d}\,\sqrt{e-d}}{2d}$, vale a dire da $\frac{2}{6d}\times\sqrt{\sqrt{e+d^3}-\sqrt{e-d^3}}$. Se adunque si moltiplicherà questa velocità media per $4d^2$ quadrato del diametro di questa luce, si avrà la quantità d'acqua, che sorte dalla prima luce, cioè $\frac{4}{3}d\times\sqrt{\sqrt{e+d^3}-\sqrt{e-d^3}}$. Il raggio della seconda

lu-

luce ſia $=c$, e l'altezza $=b$; la velocità media della ſeconda luce ſarà $\frac{2}{6c}\times\sqrt{\overline{b+c}^3}-\sqrt{\overline{b-c}^3}$, e però $\frac{4}{3}c\times\sqrt{\overline{b+c}^3}-\sqrt{\overline{b-c}^3}$ ſarà la quantità d'acqua, che ſorte da queſta ſeconda luce. Per la terza luce il raggio ſia $=m$, e l'altezza $=n$; la velocità media pertanto ſarà $\frac{2}{6m}\times\sqrt{\overline{n+m}^3}-\sqrt{\overline{n-m}^3}$, e l'acqua, che eſce da queſta luce ſarà eſpreſſa da $\frac{4}{3}m\times\sqrt{\overline{n+m}^3}-\sqrt{\overline{n-m}^3}$. Finalmente il raggio della quarta luce ſia $=l$, e l'altezza $=k$; la velocità media perciò ſarà $\frac{2}{6l}\times\sqrt{\overline{k+l}^3}-\sqrt{\overline{k-l}^3}$, conſeguentemente $\frac{4}{3}l\times\sqrt{\overline{k+l}^3}-\sqrt{\overline{k-l}^3}$ la quantità d'acqua, che eſcirà da queſta luce. Se ſi ſupporrà dunque, che il raggio della luce, che deve farſi ſia $=y$, e l'altezza $=x$; la velocità media ſarà $\frac{2}{6y}\times\sqrt{\overline{x+y}^3}-\sqrt{\overline{x-y}^3}$, e l'acqua, che ſortirà da queſta nuova luce dovrà eſſere $\frac{4}{3}y\times\sqrt{\overline{x+y}^3}-\sqrt{\overline{x-y}^3}$. Ma l'altezza della ſuperficie dell'acqua ſopra il centro della luce deve ſtare al ſuo diametro come $a:b$: Dunque $x:2y::a:b$. L'acqua poi, che deve uſcire da queſta luce ſta all'acqua, che eſce dalle luci date come $p:q$ Dunque $\frac{4}{3}y\times\sqrt{\overline{x+y}^3}-\sqrt{\overline{x-y}^3}:\frac{4}{3}d\times\sqrt{\overline{e+d}^3}-\sqrt{\overline{e-d}^3}$ $+\frac{4}{3}c\times\sqrt{\overline{b+c}^3}-\sqrt{\overline{b-c}^3}+\frac{4}{3}m\times\sqrt{\overline{n+m}^3}+\sqrt{\overline{n-m}^3}$ $+\frac{4}{3}l\times\sqrt{\overline{k+l}^3}-\sqrt{\overline{k-l}^3}::p:q$; e moltiplicando fra loro gli eſtremi, e i medj, e dividendo per $\frac{4}{3}qy$, naſcerà la ſeguente equazione $\sqrt{\overline{x+y}^3}-\sqrt{\overline{x-y}^3}=$ $\frac{p}{qy}\times d\times\sqrt{\overline{e+d}^3}-\sqrt{\overline{e-d}^3}+c\times\sqrt{\overline{b+c}^3}-\sqrt{\overline{b-c}^3}+m\times\sqrt{\overline{n+m}^3}-\sqrt{\overline{n-m}^3}$ $+l\times\sqrt{\overline{k+l}^3}-\sqrt{\overline{k-l}^3}$. Si determinino ora le indeterminate $a,b,p,q,c,d,b,c,n,m,k,l,$

così $a=2$, $b=1$, $p=1$, $q=4$, $e=10$, $d=6$, $b=17$, $c=8$, $n=26$, $m=10$, $k=37$, $l=12$, i quali valori ſoſtituiti nell' equazione la cambiano nella ſeguente

$$\sqrt{\overline{x+y}^3}-\sqrt{\overline{x-y}^3}=\frac{1}{4y}\times 6\times 56+8\times 98+10\times 152+12\times 218=\frac{1}{4y}\times 5256.$$

Si inalzi al quadrato queſt' equazione $\sqrt{\overline{x+y}^3}-\sqrt{\overline{x-y}^3}=\frac{5256}{4y}$, onde togliere i radicali, e ſi avrà $\overline{x+y}^3-2\sqrt{\overline{x+y}^3\times\overline{x-y}^3}+\overline{x-y}^3=\frac{27625536}{16y^4}$, vale a dire, inalzando al cubo le quantità $x+y$, e $x-y$, traſportandole nel ſecondo membro, e dividendo per 2, $x^3+3xy^2-\frac{13812768}{16y^2}=\sqrt{\overline{x+y}^3\times\overline{x-y}^3}$. Si inalzi di nuovo queſt' ultima equazione al quadrato, e ſi avrà la ſeguente libera dai radicali

$$x^6+6x^4y^2-\frac{27625536}{16y^2}x^4+9x^2y^4-\frac{82876608}{16y^2}xy^2+\frac{190792559821824}{256y^4}=$$

$\overline{x+y}^3\times\overline{x-y}^3=x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$, la quale eguagliata a zero, e tolte le frazioni ſi riduce a

$$256y^{10}+1536x^2y^8+2304x^4y^6-44200876x^6y^4-132602572\,8x^8y^2+190792559821824=0$$

che diviſa per 256 diventa

$$y^{10}+6x^2y^8+9x^4y^6-172659\,6x^6y^4-5179788x^8y^2+74528343920\,5=0.$$

Si ſoſtituiſca ora in queſt' equazione il valore di $x$, dato dalla proporzione $x:2y::2:1$; cioè $x=4y$, e ſi avrà un'equazione di decimo grado, che conterrà la ſola $y$; cioè $2401y^{10}-13122129\,6y^8+74528343920\,5=0$, riſoluta la quale giuſta il preſente metodo, come ſi vede nella Tavola V all' Eſempio IV, ſi trova, che eſſa ha due ſole radici reali, ma delle quali una cade fra 5, e 6, e l' altra fra 8, e 9. Ritrovato così il valore di $y$ cioè il diametro, ſi troverà quello di $x$, cioè l'altezza della ſuperficie dell' acqua ſopra il centro di queſta nuova luce prendendo il quadruplo del trovato diametro, come indica l' equazione $x=4y$. Mediante la formola del num. 676. ſi accoſterà al vero valore delle ritrovate radici. La ſerie di queſta equazione trovata nel IV. eſempio ha per termini de' numeri aſſai alti a motivo, che tale è pure il termine cognito dell'equazione. Volendo rendere l' operazione più facile biſognerebbe traſformare giuſta il num. 530. la propoſta equazione in modo, che il di lei ultimo termine cognito foſſe un numero più baſſo, nel qual caſo più baſſi pure riſulterebbero i termini della ſerie, e tanto più, quanto più baſſo foſſe il termine cognito dell' equazione.

732. Prima di terminare queſto articolo darò il modo di far paſſaggio dalle ſerie già trattate alle equazioni, dalle quali eſſe ſono nate. Per ottenere ciò non è neceſſario, che ſia data tutta la ſerie: baſta che ne ſiano dati tanti termini, quanti ne moſtra il numero delle file orizzonrali fino alla fila delle differenze coſtanri eſcluſivamente; in oltre devono eſſere dati i numeri della ſerie naturale, dalla di

cui

cui ſuppoſizione pel valore di $x$ ſono nati queſti termini, e deve eſſere cognita pure la differenza coſtante della ſerie. Con queſti dati ſi proceda alla riſoluzione del preſente problema così. Si aſſuma una equazione indeterminata, e da determinarſi col calcolo, per eſempio $A+Bx+Cx^2+Dx^3 \ldots + M^n x^n$. Abbiamo veduto al num. 691., che la differenza coſtante è ſempre eguale al prodotto di tanti termini della ſerie naturale principiante dall' unità, quanti ne moſtra il maſſimo eſponente $n$ dell' equazione moltiplicato nel coefficiente del maſſimo termine; che però la ſerie, che naſcerebbe dalla precedente equazione generale avrebbe per differenza coſtante $M^n \times 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$; dunque poichè per Ipoteſi è data la differenza coſtante, ſe eſſa ſi chiamerà $=X$, ſarà $X=M^n \times 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$, conſeguentemente ſarà $\frac{X}{1 \times 2 \times 3 \ldots \times n}=M^n$, ed ecco, che ſi è già determinato il coefficiente del maſſimo termine dell' aſſunta equazione indeterminata. Reſtano a determinarſi gli altri coefficienti A, B, C ec. I termini dati della ſerie ſiano $\Gamma$, $\Delta$, $\Theta$, $\Lambda$, $\Xi$, ec., e i corriſpondenti numeri della ſerie naturale ſiano eſpreſſi da $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ ec. Per mezzo di queſte quantità ſi formino le ſeguenti equazioni, che ſono tante, quanti ſono i coefficienti indeterminati A, B, C ec., e però quante baſtano per poterli eliminare.

$$A+aB+a^2C+a^3D \ldots + \frac{X}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times n} a^n = \Gamma$$

$$A+bB+b^2C+b^3D \ldots + \frac{X}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times n} b^n = \Delta$$

$$A+cB+c^2C+c^3D \ldots + \frac{X}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times n} c^n = \Theta$$

$$A+dB+d^2C+d^3D \ldots + \frac{X}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times n} d^n = \Lambda \text{ ec.}$$

Con queſte equazioni ſi ritrovino i valori de' coefficienti indeterminati A, B, C ec., i quali valori ſoſtituiti nell'aſſunta equazione generale $A+Bx+Cx^2+$ ec., daranno finalmente l'equazione cercata. Facilmente poi ſi avranno i valori di A, B, C, ec. mediante la ſottrazione di una equazione dall' altra, come ſi vede praticato nei ſeguenti eſempj

## *ESEMPIO I.*

Eſſendo dati i due termini $+24$, $+12$, il primo de' quali corriſponde al 2 il ſecondo al 5 della ſerie naturale, che ſono due termini della ſerie trovata al num. 726. la quale ha le ſeconde differenze coſtanti uguali a 30, cercaſi l'equazione, da cui è nata queſta ſerie. Si prendano le due ſeguenti equazioni

$$A+2B+\frac{30}{1.2}\times 2^2=24 \qquad A+2B+60=24$$

cioè

$$A+5B+\frac{30}{1.2}\times 5^2=12 \qquad A+5B+375=12$$

Si ſottragga la prima dalla ſeconda, e ſi avrà $3B+315=-12$, cioè $B=-\frac{327}{3}=-109$. Si ſoſtituiſca queſto valore di B nella prima equazione, che la cambierà in $A-218+60=24$, cioè $A=180$. Ma $\frac{30}{1.2}=15$ è il coefficiente del maſſimo termine dell' equazione cercata, B è il coefficiente del ſecondo termine, e la quantità A eſprime il termine cognito. Dunque l' equazione, che ſi cerca è $15x^2-109x+182=0$.

*E S E M P I O II.*

Della ſerie trovata al num. 727, che ha le terze differenze coſtanti uguali a 6 eſſendo dati i tre ſeguenti termini +33, +48, +63, al primo de' quali corriſponde 1, al ſecondo 4, al terzo 7 della ſerie naturale, cercaſi l'equazione, dalla quale è nata tale ſerie. Si prendano le tre ſeguenti equazioni

$$A+B+C+\frac{6}{1.2.3}=33 \qquad A+B+C+1=33$$

$$A+4B+4^2C+\frac{6}{1.2.3}\times 4^3=48 \quad \text{cioè} \quad A+4B+16C+64=48$$

$$A+7B+7^2C+\frac{6}{1.2.3}\times 7^3=63 \qquad A+7B+49C+343=63$$

Si ſottragga la prima dalla ſeconda, e ſi avrà (Π) $3B+15C+63=15$. Si ſottragga la ſeconda dalla terza, e ne verrà (Σ) $3B+33C+279=15$. Si ſottragga ora l'equazione (Π) dall' equazione (Σ), con che ſi otterrà $18C+216=0$, e però $C=-12$. Si ſoſtituiſca queſto valore di C nell' equazione (Π), e ſi avrà $3B-180+63=15$, cioè $B=44$. Finalmente ſi avrà il valore di A con ſoſtituire nella prima equazione $A+B+C+1=33$ i ritrovati valori di B, C, così $A+44-12+1=33$, cioè $A=0$. La cercata equazione adunque, da cui naſce la ſerie del num. 727. è $x^3-12x^2+44x=0$.

*E S E M P I O III.*

Della ſerie trovata al num. 711, che ha le quarte differenze coſtanti uguali a 24, eſſendo dati i quattro ſeguenti termini +154, +70, +130, +10, al primo de' quali corriſponde −5, al ſecondo −2, al terzo 1, e al quarto 4 della ſerie naturale, cercaſi l'equazione, dalla quale è nata tale ſerie. Si formino le ſeguenti quattro equazioni

A—

$A-5B+5^2C-5^1D+\frac{24}{1.2.3.4}\times 5^4=154$ $\quad A-5B+25C-125D+625=154$

$A-2B+2^2C-2^3D+\frac{24}{1.2.3.4}\times 2^4=70$ $\quad A-2B+4C-8D+16=70$

cioè

$A+B+C+D+\frac{24}{1.2.3.4}\times 1=130$ $\quad A+B+C+D+1=130$

$A+4B+4^2C+4^3D+\frac{24}{1.2.3.4}\times 4^4=10$ $\quad A+4B+16C+64D+256=10$

Si ſottragga la prima dalla ſeconda, poi la ſeconda dalla terza, indi la terza dalla quarta, e ſi avranno le tre ſeguenti equazioni

$$(\Phi)\qquad \begin{array}{l} 3B-21C+117D-609=-84 \\ 3B-3C+9D-15=60 \\ 3B+15C+63D+255=-120 \end{array}$$

Si ſottragga la prima di queſte tre trovate equazioni dalla ſeconda, poſcia la ſeconda dalla terza, e ne verranno le due ſeguenti equazioni

$$(\Omega)\qquad \begin{array}{l} 18C-108D+594=144 \\ 18C+54D+270=-180 \end{array}$$

Di nuovo ſi ſottragga la prima di queſte due dalla ſeconda, e ſi avrà $162D-324=-324$, cioè $D=0$. Si ſoſtituiſca queſto valore di D in una delle precedenti equazioni ſegnate $(\Omega)$, per eſempio nella prima, e ne verrà $18C+594=144$, e però $C=-25$. Queſti due trovati valori di C, D ſi ſoſtituiſcano in una delle equazioni ſegnate $(\Phi)$ per eſempio nella prima, e ſi avrà $3B+525C-609=-84$, conſeguentemente $B=0$. Finalmente ſi ſoſtituiſcano queſti valori di B, C, D in una delle aſſunte equazioni, per eſempio nella prima, con che ſi otterrà $A-625+625=154$, cioè $A=154$. L'equazione adunque cercata è $x^4-25x^2+154=0$.

Dovrei per ultimo render ragione del perchè ſi debbano aſſumere le equazioni indeterminate $A+aB+a^2C+a^3D..+\frac{X}{1.2.3...n}a^n=(\Gamma)$, ma la coſa è tanto chiara, che ſembra ſuperfluo farne parola, poichè mentre ho l'equazione per eſempio $-100+5x+109x^2-18x^3-22x^4+x^5+x^6$, in cui i coefficienti numerici $-100, +5, +109$ ec. corriſpondono ai coefficienti indeterminati A, B, C ec. per avere un termine $(\Gamma)$ della ſerie, il quale naſce dalla ſuppoſizione di un numero $=a$ della ſerie naturale, biſogna che ſoſtituiſca $a$, e le ſue ſucceſſive poteſtà nell'equazione in luogo di $x$, e delle ſue poteſtà, facendo $-100+5a+109a^2-18a^3-22a^4+a^5+a^6$, vale a dire (mediante i coefficienti indeterminati) $A+aB+a^2C+a^3D+a^4E+a^5F+a^6G$, come appunto abbiamo ſempre ſuppoſto.

AR-

## ARTICOLO X.

*Modo di trovare di qualsivoglia equazione la massima radice positiva, e la massima radice negativa.*

733. NEl mentre che si rivedevano gli scritti per consegnarli allo Stampatore, riflettendo l'Editore alla natura delle equazioni, osservò poterne ottenere la risoluzione col seguente metodo, il quale non può essere più facile, e semplice, essendo egli appoggiato alla sola regola dell'estrazione delle radici. Veramente le formole sotto cui cade sembrano a prima vista intralciate, e laboriose, ma il caso pratico ne toglie tutto il difficile, e l'uso ne appiana. Comincierò dalle equazioni di secondo grado, e con pochi esempj l'esporrò insieme, e ne mostrerò la generalità.

Debbasi trovare la massima radice positiva dell'equazione $x^2-ax-b=0$. Si disponga l'equazione così $x^2=ax+b$: si estragga da un membro, e dall'altro la radice quadrata, e si avrà $x=\sqrt{ax+b}$: In luogo della $x$, che è sotto al vincolo si sostituisca il suo ritrovato valore, lo che darà $x=\sqrt{a\sqrt{ax+b}+b}$: Di nuovo si sostituisca in luogo della $x$, che è sotto al vincolo questo suo ultimo valore, e si avrà $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{ax+b}+b}+b}+b}$, e così in poi. Riflettendo a questa formola si scorge primieramente, che sotto a molti vincoli restando la $x$ assai piccola, si può supporre il suo valore $=1$, onde avere la seguente espressione $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a+b}+b}+b}+b}$: In secondo luogo, che dalla somma del coefficiente del secondo termine coll'ultimo, cioè da $a+b$ devesi estrarre la prossima radice quadrata, poscia questa radice devesi moltiplicare in $a$ coefficiente del secondo termine, e al prodotto aggiungervi l'ultimo termine $b$, e da questo aggregato estrarne la prossima radice quadrata, e colla stessa regola devesi continuare l'operazione fin tanto, che si arrivi ad una quantità, che moltiplicata nel coefficiente del secondo termine dia un tale prodotto, che accresciuto dell'ultimo termine sia un quadrato perfetto, la di cui radice sarà la ricercata radice massima dell'equazione, purchè sia la medesima che la quantità ultimamente sostituita in luogo di $x$. Le indicate estrazioni delle radici prossime devonsi fare alternativamente delle radici prossime minori; e delle radici prossime maggiori. Si debba trovare per esempio la radice prossima maggiore dell'equazione $x^2-2x-8=0$: Si disponga essa così $x^2=2x+8$, indi si estragga da ambi i membri la radice quadrata, che è $x=\sqrt{2x+8}$. Si supponga $=1$ la $x$, che è sotto al vincolo, e si avrà $x=\sqrt{2+8}=\sqrt{10}$, la di cui radice prossima minore è 3, quale si sostituisca in luogo di $x$ nell'espressione $\sqrt{2x+8}$, e si avrà $\sqrt{6+8}=\sqrt{14}$. Di questo radicale $\sqrt{14}$ si prenda la radice prossima maggiore $=4$. Si sostituisca questo 4 in luogo di $x$ nell'espressione $\sqrt{2x+8}$, e ne verrà $\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$, e però la radice cercata è 4.

Pri-

Prima di paſſare all' altre equazioni voglio avvertire, che l' operazione riuſcirà più breve, ſe ſi aſſumeranno le equazioni libere dal ſecondo termine. La formola pertanto per le equazioni di terzo grado di queſta forma

$x^3-ax-b=0$ è $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{ax+b}+b}+b}+b}$, che deveſi continuare ſecondo il biſogno. Per le equazioni di quarto grado di queſta forma $x^4-ax^2-bx-c=0$ ſi determinano i valori di $x$, e di $x^2$ così

$x=\sqrt[4]{ax^2+bx+c}$, e $x^2=\sqrt[4]{ax^2+bx+c^2}$, onde la formola ſarà $x=$

$$\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{ax^2+bx+c}+b\sqrt[4]{ax^2+bx+c}+c}+b\sqrt[4]{a\sqrt[4]{ax^2+bx+c}+b\sqrt[4]{ax^2+bx+c}+c}+c}$$

Fatta $x=1$ deveſi eſtrarre da $a+b+c$ la radice quarta, e moltiplicarla in $b$, indi dal quadrato di $a+b+c$ ſi deve eſtrarre la radice quarta, e moltiplicarla in $a$; dal quadrato della ſomma di queſti due prodotti più $c$ ſi ha da eſtrarre la radice quarta, e moltiplicarla in $b$. Queſto prodotto lo chiamo $=A$. Poſcia da $a+b+c$ ſi eſtragga la radice quarta, che ſi moltiplichi in $b$; quindi dal quadrato di $a+b+c$ ſi eſtragga la radice quarta, e ſi moltiplichi in $a$: dal quadrato della ſomma di queſti due prodotti più $c$ ſi eſtragga la radice quarta, che ſi moltiplichi in $a$, e queſto prodotto ſia $=B$. Finalmente da $A+B+c$ ſi eſtragga la radice quarta. In queſto modo ſi continuino le eſtrazioni fintanto che ſi giunga ad una quantità, che ſia un quadrato-quadrato perfetto, la di cui radice ſarà la cercata radice maſſima dell' equazione, quando la medeſima non ſia diverſa dal valore ſoſtituito in luogo di $x$.

Per le equazioni di quinto grado biſognerà prima determinare i valori di $x$, $x^2$, $x^3$, indi farne le debite ſoſtituzioni ſotto al vincolo; come eſſendo l'equazione $x^5-ax^3-bx^2-cx-d=0$, ſarà $x=\sqrt[5]{ax^3+bx^2+cx+d}$, $x^2=\sqrt[5]{ax^3+bx^2+cx+d^2}$, $x^3=\sqrt[5]{ax^3+bx^2+cx+d^3}$ valori da ſoſtituirſi in luogo di $x$ nel ſecondo membro della ſeguente equazione $x=\sqrt[5]{ax^3+bx^2+cx+d}$. Ma quanto ho detto fin' ora moſtra abbaſtanza il progreſſo del metodo.

Queſto metodo eſige, che tutti i termini dell' equazione, eccettuatone il primo, ſiano affetti dal ſegno — nelle equazioni di grado pari, quando però la ſomma dei coefficienti dei termini poſitivi tanto nella prima, che nelle ſuſſeguenti ſoſtituzioni dei valori di $x$, non ſia maggiore della ſomma dei coefficienti dei termini negativi, lo che non ſuccedendo, ſiccome ſotto al vincolo d' eſponente pari reſterebbe una quantità negativa, e perciò l' eſpreſſione riſulterebbe immaginaria, biſognerà trasformare prima l'equazione in un'altra, che abbia i termini dotati delle neceſſarie indicate condizioni.

Ognuno poi vede abbaſtanza il ſempliciſſimo principio, che regola il preſente metodo, quale ſi è, che il primo termine $x^n$ di una qualunque equazione figurando una poteſtà perfetta, tale pure deve eſſere l' aggregato di tutti gli altri termini.

Baſterà un ſolo eſempio, che prenderò dall' equazione $x^4-11x^2-18x-8=0$, cioè

cioè $x^4=11x^2+18x+8$, e però $x=\sqrt[4]{11x^2+18x+8}$. Si faccia la $x$, che è ſotto al vincolo $=1$, e ſi avrà $x=\sqrt[4]{37}$, la di cui radice quadrato-quadrata proſſima minore è 2. Si ſoſtituiſca in luogo di $x^2$, e di $x$ queſto ſuo ritrovato valore 2 nell' eſpreſſione $\sqrt[4]{11x^2+18x+8}$, e verrà $x=\sqrt[4]{88}$, la di cui radice quadrato-quadrata proſſima maggiore è 4. Si ſoſtituiſca nell' eſpreſſione $\sqrt[4]{11x^2+18x+8}$ in luogo di $x^2$, e di $x$ queſto ſuo valore 4, e ſi avrà $x=\sqrt[4]{256}$, e perchè queſto è un quadrato-quadrato perfetto, la di cui radice è 4, eccoci giunti a ciò, che ſi bramava, e però il 4 è la maſſima radice poſitiva della propoſta equazione $x^4-11x^2-18x-8=0$.

Certamente non ſi ſaprebbe con altro metodo trovare più ſpeditamente quello che ſi cerca. Giacchè adunque nel caſo particolare ſi ottiene con tanta facilità la maſſima radice di una propoſta equazione, atteniamoci allo ſpirito del metodo, o ſia alla legge, che egli preſcrive, e omettiamo le date formole, le quali hanno ſervito a darne un proſpetto.

La ſteſſa è la maniera per trovare la maſſima radice negativa, ſe non che dopo avere eſtratta da una data eſpreſſione la proſſima radice, ella deveſi ſoſtituire nella ſteſſa eſpreſſione in luogo di $x$ affetta dal ſegno — il valore poi cercato, che ne riſulterà, ſarà di queſta forma $\pm\sqrt[n]{a^n}$, eſſendo $n$ un numero parì, in cui deve valere il ſegno inferiore; e ſarà di queſta forma $\sqrt[n]{-a^n}$, eſſendo $n$ un numero impari. Riſpetto all'equazione $x^2-ax-b=0$ l'eſpreſſione della maſſima radice negativa ſarà $x=\sqrt{-a\sqrt{-a\sqrt{-a+b}+b}+b}$. Si debba per eſempio trovare la maſſima radice negativa dell' equazione $x^3-19x-30=0$. Si faccia $x=\sqrt[3]{19x+30}$, indi ſi ſupponga $x=-1$, e fattane la ſoſtituzione ſi avra $x=\sqrt[3]{11}$, la di cui radice cuba proſſima minore è 2. Nell' eſpreſſione $\sqrt[3]{19x+30}$ ſi ſoſtituiſca $-2$ in luogo di $x$, e ne verrà $x=\sqrt[3]{-8}=-2$, e però $-2$ è la ricercata maſſima radice negativa della propoſta equazione $x^3-19x-30=0$.

Queſto metodo pertanto ſerve a trovare tutte le radici di qualſivoglia equazione, o ſia a riſolvere qualunque equazione; poichè dopo eſſerſi trovata la maſſima radice poſitiva, e negativa di una equazione, ſi divida eſſa pel loro prodotto, poſcia al quoziente ſi applichi il metodo, e così ſi continui finchè ſi ſiano trovate tutte le radici.

Fin' ora ho parlato delle radici razionali, ora dirò brevemente quanto baſta per le irrazionali. Qualora dopo varie ſoſtituzioni non caderà ſotto al vincolo una poteſtà perfetta del dì lui eſponente, ciò ſarà ſegno, che la maſſima radice dell' equazione è irrazionale, della quale dopo varie ſoſtituzioni ſi avranno i limiti con prendere i due valori, che per quante ſoſtituzioni ſi facciano ritorneranno ſempre gli ſteſſi, de' quali uno ſarà maggiore, e l'altro minore del giuſto, e differiranno di una ſola unità. Quantunque la dottrina abbia tutta l'evidenza dalle coſe dette, ne fa-

farò non oſtante l'applicazione ad un'eſempio. Si debba trovare la maſſima radice poſitiva dell' equazione $x^5-14x^3-32x^2-27x-8=0$, che diſpongo così $x^5=14x^3+32x^2+27x+8$, da cui ſi ha $x=\sqrt[5]{14x^3+32x^2+27x+8}$. Soſtituiſco 1 in vece di $x$, e ne ho $x=\sqrt[5]{85}$, la di cui radice quinta proſſima minore è 2. Nell'eſpreſſione $\sqrt[5]{14x^3+32x^2+27x+8}$ ſoſtituiſco in luogo di $x^3$, $x^2$, e $x$ queſto ſuo ritrovato valore 2, e ne naſce $\sqrt[5]{302}$, la di cui radice quinta proſſima maggiore è 4. Nella ſteſſa eſpreſſione ſoſtituiſco queſto 4 in luogo di $x$, e ſue poteſtà, con che ritrovo $\sqrt[5]{1524}$, la di cui radice quinta proſſima minore è 4. Soſtituiſco di nuovo queſto 4 in vece di $x$, e ritorna $\sqrt[5]{1524}$, la di cui radice proſſima maggiore è 5, e perchè continuando le ſoſtituzioni ritornerebbero ſempre gli ſteſſi valori 4, 5, però eſſi ſono i limiti della cercata maſſima radice della propoſta equazione. La ſteſſa maniera d'operare ſi oſſervi per trovare i limiti della maſſima radice negativa. Se poi trovati queſti limiti ſi vorrà accoſtare di più al vero valore ſi opererà giuſta il num. 675, o pure ſi farà uſo della formola data al num. 676.

## ARTICOLO XI.

*Modo di eſtrarre da qualſivoglia radicale compleſſo una qualunque radice.*

734. DOpo aver data la Teoria delle equazioni, e la loro riſoluzione, reſta a parlare della maniera di eſtrarre una qualſivoglia radice dai radicali compleſſi (per radicale compleſſo intendo un aggregato di quantità o puramente radicali, o miſte di radicali, e razionali) lo che viene il più delle volte al biſogno per potere sbarazzare dalle formole radicali le radici provenute dalla riſoluzione delle equazioni. Siccome pertanto queſti radicali naſcono dalla riſoluzione delle equazioni, o ſia non altro ſono, che la radice di una equazione, io qui ſuppongo cognita l'equazione, dalla di cui riſoluzione ſi è avuto il propoſto radicale; Che ſe foſſe dato il radicale, e non foſſe cognita l'equazione da cui è nato, baſterà per iſcuoprirla prendere una equazione a coefficienti indeterminati dello ſteſſo grado del radicale dato, indi paragonare (come or ora moſtrerò coll'eſempio) la formola radicale di queſta equazione indeterminata col propoſto radicale a fine di venire in cognizione dei valori corriſpondenti ai coefficienti indeterminati, con che ſi otterrà la bramata equazione.

735. Eſſendo $=x$ il radicale, di cui ſi vuole la radice $n$, ſia $=y$ queſta radice, ſarà adunque $y=\sqrt[n]{x}$, e però $y^n=x$: ed eſſendo $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}\ldots+A=0$ l'equazione, dalla di cui riſoluzione è venuto il radicale $=x$, ſe in queſta equazione ſi ſoſtituirà $y^n$ in luogo di $x$, ſi avrà la nuova equazione $y^{mn}+ay^{mn-1}+by^{mn-2}+cy^{mn-3}\ldots+A=0$, le di cui radici ſomminiſtreranno le cercate radici del propoſto radicale. Ma per facilitare la riſoluzione di queſta equazione; e nel tempo ſteſſo poter determinare i valori di $y$ nella ſteſſa forma, che quelli di $x$, biſognerà riſolvere l'equazione $y^{mn}+ay^{mn-1}+by^{mn-2}$ ec. in altrettante equazioni del grado $m$, quante unità contiene l'eſponente $n$; ciò poi ſi effettuerà facilmente come ſegue: Poichè in queſta

ſta equazione $y^{mn} + ay^{mn-1} + by^{mn-2}$ ec. tutti gli eſponenti di $y$ ſono diviſibili per $n$, ſe $y$ è radice di queſta equazione, ſaranno pure radice della medeſima anche tutti i valori contenuti in $\sqrt[n]{y^n}$, ma i valori di $\sqrt[n]{y^n}$ ſi hanno, come già ſi è detto di ſopra, con moltiplicarli $y$ in tutte le radici dell' equazione $z^n - 1 = 0$, vale a dire in tutte le radici $n$ dell'unità, dunque ſe una delle ricercate equazioni, in cui ſi riſolve la precedente è per Eſempio $y^m + py^{m-1} + qy^{m-2} + ry^{m-3}$ ec., che per ora è indeterminata, le altre ſaranno queſta ſteſſa, i di cui coefficienti ſiano moltiplicati nelle radici $n$ dell'unità. Ritrovato queſto numero $n$ di equazioni del grado $m$, ſi moltiplichino fra loro, e dell'equazione, che ne verrà ſi paragonino i coefficienti coi coefficienti dell'equazione cognità $y^{mn} + ay^{mn-1} + by^{mn-2}$ ec. a motivo di ritrovare i valori delle indeterminate $p$, $q$, $r$ ec, e così d' indeterminata rendere determinata l'equazione $y^m + py^{m-1} + qy^{m-2}$ ec., dalla di cui riſoluzione ſi ha una parte delle cercate radici di $x$, di cui le altre ſi ricavano dalle rimanenti equazioni di grado $m$. Queſto metodo chiaro per ſe ſteſſo ſarà reſo anche più chiaro dalle ſeguenti applicazioni. Comincierò dai binomj quadrati.

736. Si debba eſtrarre la radice quadrata dal binomio $3 \pm \sqrt{8}$. Poichè non mi è data l'equazione, da cui è provenuto queſto binomio, ſuppongo che egli ſi abbia da queſta equazione dello ſteſſo di lui grado a coefficienti indeterminati $x^2 + ax + b = 0$, le di cui radici ſono $x = -\frac{a \pm \sqrt{-4b+a^2}}{2}$. Di queſto radicale pertanto paragono la parte razionale colla razionale, e la radicale colla radicale del binomio dato $3 \pm \sqrt{8}$, con che ho $-\frac{a}{2} = 3$, cioè $a = -6$, e $\sqrt{8} = \frac{\sqrt{-4b+a^2}}{2}$ e però $2\sqrt{8} = \sqrt{-4b+a^2}$, ed elevando l'uno, e l'altro membro al quadrato, ne viene $32 = -4b + a^2$, che col rimettere in luogo di $a^2$ il ſuo valore diviene $32 = -4b + 36$, da cui ſi ricava il valore di $b$, che è $b = \frac{36-32}{4}$, cioè $b = 1$. Si ſoſtituiſcano queſti ritrovati valori di $a$, $b$, nell'equazione $x^2 + ax + b = 0$, con che ella diverrà (A) $x^2 - 6x + 1 = 0$, che è quella appunto, dalla di cui riſoluzione naſce il dato binomio $3 \pm \sqrt{8}$. Dovendoſi eſtrarre la radice quadrata da queſto binomio $3 \pm \sqrt{8}$, che ſuppongo $= x$, poichè egli è radice dell'equazione (A), ſia $= y$ la ſua radice quadrata, ſarà $y = \sqrt{x}$, e $y^2 = x$. Si ſoſtituiſca queſto valore di $x$ nell'equazione (A), lo che fatto eſſa ſi cambierà nella ſeguente [B] $y^4 - 6y^2 + 1 = 0$. Queſta equazione [B] ſi riſolva ne' ſuoi due fattori di ſecondo grado, de'quali ſe uno ſi ſupporrà $y^2 + py + q = 0$, l'altro ſarà $y^2 - py + q = 0$, perchè dell'equazione $z^2 - 1 = 0$ le due radici ſono $+1$, e $-1$, delle quali la prima moltiplica il coefficiente del ſecondo termine del primo fattore, e la ſeconda moltiplica il coefficiente del ſecondo termine del ſecondo fattore. Si moltiplichino fra loro queſti due fattori a fine di avere l'equazione da paragonarſi coll' equazione [B], onde poter determinare i coefficienti indeterminati $p$, $q$. Si faccia pertanto.

$y^2$

$$\left.\begin{array}{l} y^2+py+q \\ y^2-py+q \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y^4+py^3+qy^2-pqy+q^2 \\ \quad -py^3-p^2y^2+pqy \\ \qquad +qy^2 \end{array}\right\}=0$$

$$y^4+\overline{2q-p^2}\times y^2+q^2=0$$

Ora paragonando i coefficienti di queſt' equazione coi coefficienti dell'equazione [B] mi viene $2q-p^2=-6$, e $q^2=1$, cioè $q=1$, il qual valore ſoſtituito nella precedente equazione $2q-p^2=-6$ la rende $2-p^2=-6$, da cui ſi ricava il valore di $p$, che è $p=\pm\sqrt{8}$. Si ſoſtituiſcano queſti valori di $p$, $q$ nei due aſſunti fattori indeterminati, ed eſſi diverranno $y^2+\sqrt{8}+1=0$, $y^2-\sqrt{8}+1=0$. Del primo le radici ſono $y=-\frac{\sqrt{8}}{2}\pm\sqrt{-1+\frac{8}{4}}$, cioè $y=-\frac{2\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-4+8}}{2}$, e però $y=\pm 1-\sqrt{2}$, che ſono le due radici del binomio $3-\sqrt{8}$. Il ſecondo fattore ha per radici $y=\frac{\sqrt{8}}{2}\pm\sqrt{-1+\frac{8}{4}}$, cioè $y=\frac{2\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-4+8}}{2}$, e però $y=\pm 1+\sqrt{2}$, che ſono le radici dell'altro binomio $3+\sqrt{8}$. Eſſendoſi adunque dovuto eſtrarre la radice quadrata dal binomio $3\pm\sqrt{8}$ ſi ſono trovate quattro radici, perchè il binomio $3\pm\sqrt{8}$ corriſponde a queſti due $3-\sqrt{8}$, $3+\sqrt{8}$, e da ciaſcuno, ſiccome da qualunque quantità [ pel num. 382. ] ſi eſtrae doppia radice, che perciò debbono eſſere quattro.

737. Il metodo è generale per eſtrarre qualſivoglia radice. Proporrò pertanto un altro eſempio, in cui debbaſi eſtrarre la radice quadrato-quadrata da un binomio radicale quadrato. Sia dato il binomio $376\pm 168\sqrt{5}$, da cui ſi voglia eſtrarre la radice quarta. Non eſſendo data l'equazione, dalla di cui riſoluzione è nato queſto radicale, ſi ſupponga che ella ſia queſta indeterminata $x^2+ax+b=0$, che riſoluta dà $x=\frac{-a\pm\sqrt{-4b+a^2}}{2}$. Per determinare i coefficienti indeterminati $a$, $b$, ſi paragoni la parte razionale colla razionale, e la radicale colla radicale di queſto radicale, e del propoſto binomio, con che ſi avrà $-\frac{a}{2}=376$, e però $a=-752$, poſcia $\frac{\sqrt{-4b+a^2}}{2}=168\sqrt{5}$, cioè $\sqrt{-4b+a^2}=336\sqrt{5}$, ed elevando l'uno, e l'altro membro al quadrato ne verrà $-4b+a^2=564480$, e ſoſtituendo in luogo di $a^2$ il ſuo valore, ſi avrà $-4b+565504=564480$, da cui ſi ricava il valore di $b$, che è $b=256$. Che però ſe ſi ſoſtituiranno queſti ritrovati valori di $a$, $b$ nell'equazione $x^2+ax+b=0$, eſſa diverrà [A] $x^2-752x+256=0$, che è quella appunto, dalla di cui riſoluzione naſce il propoſto radicale $376\pm 168\sqrt{5}$. Di queſto radi-

cale, che è uguale all'incognita $x$ dell'equazione (A), la radice quarta ſia $=y$, ſarà $y=\sqrt[4]{x}$, e però $y^4=x$. Si ſoſtituiſca queſto valore di $x$ nell'equazione (A), ed eſſa ſi cambierà nella ſeguente (B) $y^8-752y^4+256=0$. Queſta equazione ſi deve riſolvere in quattro fattori di ſecondo grado, de' quali, ſuppoſto che il primo ſia queſto indeterminato $y^2+fy+q=0$, gli altri tre ſi formeranno da queſto ſteſſo mediante il moltiplicare il coefficiente del ſecondo termine nelle radici di queſta equazione $z^4-1=0$, che ſono le quattro ſeguenti $+1$, $-1$, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, e però i quattro fattori cercati ſono $y^2+fy+q=0$, $y^2-fy+q=0$, $y^2+f\sqrt{-1}\times y-q=0$, $y^2-f\sqrt{-1}\times y-q=0$. Si moltiplichino fra loro come ſegue

I. $y^2+f\sqrt{-1}\times y-q$
II. $y^2-f\sqrt{-1}\times y-q$ $\Big\}=0$

$$\left.\begin{array}{l} y^4+f\sqrt{-1}\times y^3-qy^2+fq\sqrt{-1}\times y+q^2 \\ -f\sqrt{-1}\times y^3+f^2y^2-fq\sqrt{-1}\times y \\ \qquad -qy^2 \end{array}\right\}=0$$

V. $y^4-\overline{2q+f^2}\times y^2+q^2=0$

III. $y^2+fy+q$
IV. $y^2-fy+q$ $\Big\}=0$

$$\left.\begin{array}{l} y^4+fy^3+qy^2-fqy+q^2 \\ -fy^3-f^2y^2+fqy \\ \qquad +qy^2 \end{array}\right\}=0$$

VI. $y^4+\overline{2q-f^2}\times y^2+q^2=0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{VI. } y^4 + \overline{2q-p^2}\times y^2 + q^2 \\ \text{V. } y^4 - \overline{2q+p^2}\times y^2 + q^2 \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y^8 + \overline{2q-p^2}\times y^6 + q^2y^4 \\ \quad - \overline{2q+p^2}\times y^6 - \overline{4q^2+4p^2q-p^4}\times y^4 + \overline{2q^3-p^2q^2}\times y^2 \\ \qquad + q^2y^4 \\ \qquad\qquad - \overline{2q+p^2}\cdot q^2\times y^2 + q^4 \end{array}\right\} = 0$$

$$y^8 - \overline{2q^3+4p^2q-p^4}\times y^4 + q^4 = 0$$

Paragono adeſſo i coefficienti di queſta equazione coi coefficienti dell'equazione (B), e trovo $-2q^3+4p^2q-p^4=-752$, e $q^4=256$, da cui ſi ha $q=4$, e queſto valore ſoſtituito nella precedente equazione $-2q^3+4p^2q-p^4=-752$ la cambia in $-32+16p^2-p^4=-752$, cioè $p^4-16p^2=720$, le di cui radici ſono $p^2=8\pm\sqrt{784}$, e però $p=\pm\sqrt{8\pm\sqrt{784}}$, e perchè $\sqrt{784}=28$, i quattro valori di $p$ ſono $+6$, $-6$ $+2\sqrt{-5}$, $-2\sqrt{-5}$. Ne' ſopraddetti quattro fattori ſi ſoſtituiſcano queſti ritrovati valori di $p$, $q$, e ſi avrà I. $y^2+6y+4=0$, II. $y^2-6y+4=0$, III. $y^2+2\sqrt{5}\times y-4=0$, IV. $y^2-2\sqrt{5}\times y-4=0$. Del primo le radici ſono I. $y=-3\pm\sqrt{-4+9}$, cioè $y=-3\pm\sqrt{5}$, del ſecondo II. $y=3\pm\sqrt{-4+9}$, cioè $y=3\pm\sqrt{5}$; del terzo ſono III. $y=-\sqrt{5}\pm\sqrt{4+5}$, cioè $y=-\sqrt{5}\pm 3$, e finalmente del quarto ſono IV. $y=\sqrt{5}\pm\sqrt{4+5}$, cioè $y=\sqrt{5}\pm 3$, vale a dire le otto radici dell'equazione (B) ſono $-3+\sqrt{5}$, $-3-\sqrt{5}$, $+3+\sqrt{5}$, $+3-\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}+3$, $-\sqrt{5}-3$, $+\sqrt{5}+3$, $+\sqrt{5}-3$, ma ſiccome le quattro prime non ſono differenti dalle quattro ultime, quindi è che al biſogno ſoddisfanno i due primi fattori. Intanto poi nel voler eſtrarre la radice quarta dal binomio $376\pm 168\sqrt{5}$ ſi ſono trovate otto radici quarte dello ſteſſo binomio, che poſcia ſi ſono ridotte a quattro, perchè il ſuddetto binomio ſi compone da queſti due $376+168\sqrt{5}$, $376-168\sqrt{5}$, da ciaſcun de' quali, mediante l'eſtrazione della radice quarta, devonſi ricavare quattro radici, lo che è manifeſto per le coſe già dette.

738. Nella ſteſſa maniera ſi proceda per eſtrarre qualſivoglia altra radice da un binomio radicale quadrato: Come volendoſi la radice $n$ del binomio $17\pm 3\sqrt{6}$, che naſce dal riſolverſi l'equazione $x^2-33x+235=0$, ſuppoſto $17\pm 3\sqrt{6}=x$, la di cui radice $n$ ſia $y$, ſarà $y=\sqrt[n]{x}$, e però $y^n=x$, ſi ſoſtituiſca queſto valore nella precedente equazione, che la cambierà in $y^{2n}-34y^n+235=0$, che deveſi riſolvere in un numero $n$ di fattori di ſecondo grado: Se pertanto ſi aſſumerà $y^2+py+q=0$ pel primo fattore indeterminato, gli altri fattori riſulteranno da queſto ſteſſo con moltiplicarſi il coefficiente del di lui ſecondo termine nelle radici dell'equazio-

zione $z^n - 1 = 0$. Ritrovati tutti questi fattori si moltiplichino fra loro, e dell'equazione, che ne verrà si paragonino i coefficienti coi coefficienti dell'equazione $y^{2n} - 34y^n + 235 = 0$, e con ciò si determineranno i valori delle assunte indeterminate $p$, $q$. Si sostituiscano per ultimo negli anzidetti fattori, questi valori di $p$, $q$, onde niente altro più si richiederà per avere le ricercate radici, che risolvere questi fattori di secondo grado, lo che non involve alcuna difficoltà.

739. Passiamo adesso ai radicali cubi, e primieramente debbasi estrarre la radice quadrata da un proposto radicale cubo, per esempio $2 + \sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Supposto che non sia cognita l'equazione, dalla di cui risoluzione è provenuto questo radicale, bisognerà in primo luogo accingersi a ritrovarla. Dal modo di risolvere le equazioni cubiche già so, che la quantità razionale 2, che trovasi aggiunta al dato radicale, non è altro che quella quantità, con cui si sono diminuite le radici dell'equazione da risolversi a fine di trasformarla in un' altra mancante del secondo termine: Sicchè per ora si lasci da parte questa quantità 2, e si applichi a trovare l'equazione trasformata, dalla cui soluzione è venuto il dato radicale $\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Si supponga pertanto, che questa equazione sia $x^3 + ax + b = 0$, la di cui radice è $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}}$. Si paragoni questo radicale indeterminato col radicale proposto per poter determinare i valori dei coefficienti indeterminati $a$, $b$. Si faccia adunque $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b + \frac{1}{27}a^3}} = \sqrt[3]{6+4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Si inalzi al cubo l'uno, e l'altro membro di questa equazione come segue: Primieramente inalzo al quadrato il primo membro, e mi viene $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}} \times \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}} - \frac{2}{3}a + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}} \times \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}}$, che di nuovo moltiplico per $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}}$ per avere il cubo cercato, con che ho $-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}$

$$-\frac{2}{3}a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}+$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}\times\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}\times\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}+$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}\times\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}\times\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}-$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}, \text{ cioè } -b-$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}-\frac{1}{3}a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}-$$

$$\frac{1}{3}a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}-\frac{2}{3}a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}, \text{ e con-}$$

seguentemente $-b-a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}$

$$-a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}, \text{ che è il cubo cercato del primo membro}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}.$$ Si prenda adeſſo il cubo del ſecondo membro $\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$, il di cui quadrato è $\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+2+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$, che moltiplicato in $\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$ per avere il cercato cubo, dà per ultimo $7+4\sqrt{3}$

$$+2\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}+$$

$$\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+2\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}+7-4\sqrt{3}, \text{ cioè } 14+$$

$3\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+3\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Ora che ſi è trovato il cubo dell' uno, e dell' altro membro, ſi paragoni la parte razionale colla razionale, e le radicali colle riſpettive corriſpondenti parti radicali, lo che fatto ſi avrà $-b=14$, e però $b=-14$, e

$$-a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}=3\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}};$$

$-a\sqrt[3]{-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}}=3\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Si elevino al cubo queſte due ultime equazioni, e ne verrà dalla prima $-a^3\times-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}=27\times\overline{7+4\sqrt{3}}$, dalla ſeconda $-a^3\times-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}=27\times\overline{7-4\sqrt{3}}$, cioè dalla prima $\frac{1}{2}a^3b-a^3\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}=189+108\sqrt{3}$, e dalla ſeconda $\frac{1}{2}a^3b+a^3\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{27}a^3}=189-108\sqrt{3}$. Si ſommino pertanto queſte due equazioni, e ſi otterrà $a^3b=378$; e perchè ſi è trovato $b=-14$, ſarà $a^3b=-14a^3$, e però $-14a^3=378$, e dividendo l'uno, e l'altro membro per $-14$, ſi ha $a^3=-27$, ed eſtraendo la radice cuba $a=-3$. Si ſoſtituiſcano adeſſo queſti ritrovati valori di $a$, $b$ nell'aſſunta equazione indeterminata $x^3+ax+b=0$, con che eſſa ſi cambierà in $x^3-3x-14=0$, che è l'equazione trasformata da cui è nato il propoſto radicale $\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Ma queſta equazione non baſta; biſogna trovar l'equazione, la di cui radice è $2+\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Siccome poi di ſopra ho oſſervato, che l'equazione trasformata ſi è avuta col diminuirſi le radici dell'equazione da riſolverſi della quantità 2, così per avere queſta equazione farà meſtiere aumentare della quantità 2 le radici della ritrovata equazione trasformata. Si ponga adunque $x=z-2$, e ſi facciano le ſoſtituzioni come ſegue

$$\left.\begin{array}{rrrr} x^3= & z^3 & -6z^2+12z & -8 \\ -3x= & & -3z+6 & \\ -14= & & & -14 \end{array}\right\}=0$$

$$(A)\quad z^3-6z^2+9z-16=0$$

Queſta poi è la ricercata equazione, di cui è radice il dato radicale $2+\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$.

740. Ora di questo radicale, che è uguale a $z$, volendosi la radice quadrata, supponga si che essa sia $=y$, sarà $y=\sqrt{z}$, e però $y^2=z$. Si sostituisca questo valore di $z$ nell' equazione (A), ed essa si cambierà in (B) $y^6-6y^4+9y^2-16=0$, le di cui radici $y$ daranno le radici quadrate delle tre radici dell' equazione (A); e siccome da ogni quantità si può estrarre doppia radice quadrata, essendo tre le radici dell' equazione (A), dovranno esser sei le cercate radici quadrate. Ma per avere più facilmente le radici dell'equazione (B), e averle nel tempo stesso della medesima forma del radicale proposto bisognerà risolvere in due fattori di terzo grado l'equazione (B), lo che si otterrà facilmente con prenderne uno comunque, per esempio $y^3+py^2+qy+r=0$, mentre l' altro giusta la regola più volte data sarà $y^3-py^2+qy-r=0$. Si moltiplichino fra loro questi due fattori, e si avrà

$$\left.\begin{array}{l} y^3+py^2+qy+r \\ y^3-py^2+qy-r \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y^6+py^5+qy^4+ry^3-pry^2+qry-r^2 \\ \quad -py^5-p^2y^4-pqy^3+q^2y^2-qry \\ \quad\quad qy^4+pqy^3-pry^2 \\ \quad\quad\quad -ry^3 \end{array}\right\}=0$$

$$y^6+\overline{2q-p^2}\times y^4+\overline{q^2-2pr}\times y^2-r^2=0$$

Si paragonino i coefficienti di questa equazione coi coefficienti dell'equazione (B) a fine di determinare i valori di $p$, $q$, $r$, e si avrà $2q-p^2=-6$, $q^2-2pr=9$, $-r^2=-16$. Da quest'ultima si ha $r=4$, il qual valore sostituito nella seconda, se dalla medesima si prenderà il valore di $q$, si avrà $q=\sqrt{9+8p}$. Finalmente si metta questo valore di $q$ nella prima, e ne verrà $2\sqrt{9+8p}=p^2-6$, ed elevando l' uno, e l' altro membro al quadrato, si avrà $p^4-12p^2-32p=0$, dalla quale si ha un valore di $p=0$. Posto adunque uguale a zero il valore di $p$ nella prima equazione $2q-p^2=-6$, si avrà $q=-3$; ed ecco ritrovati i valori di $p=0$, di $q=-3$, e di $r=4$, che se si porranno negli assunti due fattori indeterminati, essi diverranno I. $y^3-3y+4=0$, II. $y^3-3y-4=0$. Risolvendoli col metodo delle equazioni cubiche si hanno dal primo le tre seguenti radici

$$\sqrt[3]{-2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}};\quad -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-2+\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}};\quad -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-2+\sqrt{3}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}}$$

Del secondo fattore le tre radici sono $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$;

$$-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\quad -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}};$$

$-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$. E queſte ſono le ſei cercate radici quadrate delle radici dell'equazione (B). Che però quattro di queſte radici eſſendo immaginarie, ſiccome delle tre radici dell'equazione (B) due ſono immaginarie, le due radici quadrate del propoſto radicale $2+\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$ ſono $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{-2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}}$.

741. Si debba in ſecondo luogo eſtrarre la radice cuba da un propoſto radicale cubo. Sia data la radice $x=-10+\sqrt[3]{-3645+729\sqrt{-2}}$ $+\sqrt[3]{-3645-729\sqrt{-2}}$, che ſi ha dall'equazione $x^3+30x^2-429x+1000=0$, e di queſta radice vogliaſi prendere la radice cuba. Sia eſſa pertanto $=y$, farà $y=\sqrt[3]{x}$, e però $y^3=x$. Si ſoſtituiſca queſto valore di $x$ nella precedente equazione, che la cambierà in (A) $y^9+30y^6-429y^3+1000=0$. Si riſolva queſta equazione ne' ſuoi tre fattori di terzo grado, de' quali ſe pel primo ſi prenderà l'indeterminato $y^3+py^2+qy+r=0$, gli altri due (che per le coſe dette devono riſultare da queſto con moltiplicare il coefficiente del ſuo ſecondo, e terzo termine nell'altre due radici dell'equazione $z^3-1=0$) faranno $y^3-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}py^2-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}qy+r=0$, $y^3-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}py^2-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}qy+r=0$. Si moltiplichino inſieme queſti tre fattori, cominciando dai due ultimi come ſegue

$$\left.\begin{array}{l} \text{II. } y^3-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}py^2-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}qy+r \\ \text{III. } y^3-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}py^2-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}qy+r \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y^6-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}py^5-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}qy^4+ry^3 \\ \quad -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}+p^2y^4-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}pqy^3-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}pry^2 \\ \quad -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}qy^4-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}pqy^3+q^2y^2-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}qry \\ \quad +ry^3-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}pry^2-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}qry+r^2 \end{array}\right\}=0$$

IV. $y^6-py^5+\overline{p^2-q}\times y^4+\overline{2r-pq}\times y^3+\overline{q^2-pr}\times y^2-qry+r^2=0$.

Si

Si moltiplichi per ultimo queſta equazione col primo fattore, e ſi avrà

IV. $y^6-py^5+\overline{p^2-q}\times y^4+\overline{2r-pq}\times y^3+\overline{q^2-pr}\times y^2-qry+r^2=0$
$y^3+py^2+qy+r=0$

$$\left.\begin{array}{l} y^9-py^8+\overline{p^2-q}\times y^7+\overline{2r-pq}\times y^6+\overline{q^2-pr}\times y^5-qry^4+r^2y^3 \\ +py^8-p^2y^7+\overline{p^3-pq}\times y^6+\overline{2pr-p^2q}\times y^5+\overline{pq^2-p^2r}\times y^4-pqry^3+pr^2y^2 \\ +qy^7-pqy^6+\overline{p^2q-q^2}\times y^5+\overline{2qr-pq^2}\times y^4+\overline{q^3-pqr}\times y^3-q^2ry^2+qr^2y \\ +ry^6-pry^5+\overline{p^2r-qr}\times y^4+\overline{2r^2-pqr}\times y^3+\overline{q^2r-pr^2}\times y^2-qr^2y+r^3 \end{array}\right\}=0$$

V. $y^9+\overline{p^3-3pq+3r}\times y^6+\overline{q^3-3pqr+3r^2}\times y^3+r^3=0.$

742. Ora paragono i coefficienti di queſta equazione coi coefficienti dell'equazione (A) a fine di ritrovare i valori delle indererminate aſſunte $p$, $q$, $r$, e mi viene $p^3-3pq+3r=30$; $q^3-3pqr+3r^2=-429$; $r^3=1000$. Da queſt'ultima ho $r=10$, dalla prima $q=\frac{p^3+3r-30}{3p}$; e queſto valore di $q$ ſoſtituito nella ſeconda inſieme col valore di $r$ dà $p^9-270p^6-19683p^3=0$, la quale equazione ſomminiſtra $p=0$. Queſto valore di $p$ riduce la ſeconda equazione alla ſeguente $q^3+3r^2=-429$, cioè (con rimettere il valore di $r$) $q^3=-729$, e però $q=-9$. Ecco pertanto ritrovati i valori degli aſſunti coefficienti indererminati, che ſono $p=0$, $q=-9$, $r=10$, conſeguentemente il primo fattore $y^3+py^2+qy+r=0$ ſi cambia in $y^3-9y+10=0$, di cui una radice è $y=\sqrt[3]{-5+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{-5-\sqrt{-2}}$, che è la cercata radice cuba del propoſto radicale cubo. Le altre due radici del primo fattore $y^3-9y+10=0$ ſi prendano nel modo detto al num. 585., e illeſſamente ſi trovino le radici degli altri due fattori $y^3-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}py^2-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}qy+r=0$,

$y^3-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}py^2-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}qy+r=0$ dopo avere ſoſtituito i ritrovati valori di $q$, $r$. Intanto poi ſi ſono trovate nove radici cubiche, perchè l'equazione, il di cui radicale è ſtato propoſto, eſſendo cubica, ha tre radici, da ciaſcuna delle quali per la ſteſſa ragione ſi deve eſtrarre tripla radice. Una radice cubica adunque del propoſto radicale $-10+\sqrt[3]{-3645+729\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{-3645-729\sqrt{-2}}$, e però una radice dell'equazione $y^9+30y^6-429y^3+1000=0$ è

$\sqrt[3]{-5+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{-5-\sqrt{-2}}$, da ciascuna parte del qual binomio si può estrarre la radice cuba, che della prima è $1+\sqrt{-2}$, e $1-\sqrt{-2}$ della seconda, la di cui somma è $=2$: Siccome poi dal proposto radicale si è estratta due volte la radice cuba, con che n'è venuto 2, però il cubo di questo 2, cioè 8 è la radice in questione dell'equazione $x^3+30x^2-429x+1000=0$.

743. Se da un radicale cubo $=x$, che nasce dal risolversi l'equazione $x^3+ax^2+bx+c=0$, si vorrà estrarre la radice quarta, si supponga essa $=y$, sarà $y=\sqrt[4]{x}$. e però $y^4=x$, il qual valore sostituito nella proposta equazione in luogo di $x$ la cambia in $y^{12}+ay^8+by^4+c=0$, la quale devesi risolvere in quattro fattori di terzo grado, che saranno

$$\text{I.}\quad y^3+py^2+qy+r=0,$$
$$\text{II.}\quad y^3-py^2+qy-r=0,$$
$$\text{III.}\quad y^3+\sqrt{-1}\times py^2-qy-\sqrt{-1}\times r=0,$$
$$\text{IV.}\quad y^3-\sqrt{-1}\times py^2-qy+\sqrt{-1}\times r=0,$$

dal prodotto de' quali si ha $y^{12}-\sqrt{p^4+4p^2q-4pr-2q^2}\times y^8+\sqrt{q^4-4pq^2r+4qr^2+2p^2r^2}\times y^4-r^4=0$, di cui paragonando i coefficienti coi coefficienti dell'equazione in $y$, si avrà $-p^4+4p^2q-4pr-2q^2=a$; $q^4-4pq^2r+4qr^2+2p^2r^2=b$; $-r^4=c$, mercè cui si ritroveranno i valori delle assunte indeterminate $p$, $q$, $r$, onde poi si passerà a risolvere ciascuno dei quattro fattori, e così si avranno dodici radici quarte delle tre radici dell'equazione $x^3+ax^2+bx+c=0$, poichè essendo quattro le radici quarte, che da qualunque quantità si possono estrarre, da ognuna delle tre radici della detta equazione si potranno estrarre quattro radici quarte, che però tra tutte sono dodici.

744. Con ugual metodo si proceda per estrarre da un proposto radicale cubo la radice quinta, sesta ec.

745. Niente di più esige il metodo per estrarre qualsivoglia radice da qualunque altro radicale quarto, quinto, sesto, settimo ec. Una cosa soltanto devesi osservare, ed è, che il metodo è bensì universale, ma però per quei radicali soltanto, che ammettono la cercata radice; molti però, anzi moltissimi saranno i radicali, che non avranno una bramata radice, e che perciò non vi si potrà estrarre.

CA-

Esempio I, in

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −19. | −18. | −17. | −16. | −15. | −14. | −13. | −12. | −11. | |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | |
| −80 | −74 | −68 | −62 | −56 | −50 | −44 | −38 | −32 | |
| +334 | +260 | +192 | +130 | +74 | +24 | −20 | −58 | −90 | |
| −260 | 0 | +192 | +322 | +396 | +420 | +400 | +342 | +252 | |

Esempio II, i

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −11 | −10 | −9 | −8 | −7 | −6 |
| 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 |
| −288 | −264 | −240 | −216 | −192 | −168 |
| +1592 | +1328 | +1088 | +872 | +680 | +512 |
| −5368 | −4040 | −2952 | −2080 | −1400 | −888 |
| +4040 | 0 | −2952 | −5032 | −6432 | −7320 |

Esempio III,

| | | |
|---|---|---|
| − | 4 | − 3 |
| | 720 | 720 |
| − | 4560 | − 3840 − |
| + | 11832 | + 7992 + |
| − | 15534 | − 7842 − |
| + | 11000 | + 3224 + |
| − | 3384 | − 160 + |
| + | 216 | + 56 + |

Esempio IV, in cu

| 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| 8712748800 | 8712748800 | 8712748800 | |
| −39207369600 | −30494620800 | −21781872000 | - |
| +72600240000 | +42111619200 | +20329747200 | |
| −71154115200 | −29042496000 | −8712748800 | |
| +39401491440 | +10418995440 | +1706246640 | |
| −27998858520 | −17579863080 | −15873616440 | - |
| +33458377560 | +15878514480 | +4898040 | - |
| −19817602380 | −3939087900 | −3934189860 | - |
| +3939092702 | +4802 | −3934185058 | - |
| −1311223697 | −131218895 | −4005403953 | - |
| +745283439205 | +745152220310 | +741080816357 | + |

# CAPO IV.

## DELLE ESPRESSIONI ALGEBRAICHE DELLE RAGIONI, PROPORZIONI, PROGRESSIONI, LOGARITMI EC., E LORO FORMOLE GENERALI.

### ARTICOLO I.

*Delle ragioni, proporzioni, e progreſſioni.*

746. IO qui ſuppongo la dottrina data nel I. Tomo circa le ragioni, proporzioni, e progreſſioni, e ſoltanto oſſervo breviſſimamente alcune cose circa le loro eſpreſſioni algebraiche, o ſia accenno quali ſiano le loro formole generali. E primieramente quanto alle ragioni aritmetiche, quantunque una ragione aritmetica ſi poſſa eſprimere generalmente con due lettere, così $a.\ b$, torna però più comodo far entrare nell' eſpreſſione generale l'eſponente della ragione: Per lo che ſe ſi ſupporrà l'eſponente di una ragione $=m$, e il minore di lei termine ſi dica $=a$, l'altro termine ſarà $=m+a$, conſeguentemente ella ſi rappreſenterà così $a.\ m+a$: che ſe il maggiore ſi dirà $=a$, il minore ſarà $a-m$. Per la ſteſſa ragione una proporzione, che è il paragone di due ragioni uguali, ſi eſprimerà in queſto modo $a.\ m+a = d.\ m+d$. Se le due ragioni non ſaranno uguali, ſi indicheranno così $a.\ m+a,\ d.\ n+d$. Eſpreſſe in queſto modo le ragioni, e le proporzioni aritmetiche, ſi faranno ſopra di eſſe le operazioni ſpiegate nel I. Tomo all' Art. III. del Capo III.

747. Quanto ho detto delle ragioni, e proporzioni aritmetiche, vale ancora per le ragioni, e proporzioni geometriche. Si può beniſſimo eſprimere generalmente con due lettere una ragione geometrica così $a:b$, ma per altro torna meglio far entrare nell'eſpreſſione della ragione il di lei eſponente; quindi è, che ſe queſto eſponente ſarà $=m$, e il termine minore della ragione ſia $=a$, il termine maggiore ſarà $=am$, cioè eſſa ſarà $a:am$; che ſe il termine maggiore ſarà $=a$, il minore ſarà $= \frac{a}{m}$: Per lo che $a:am$ eſprimerà la ragione di minore inegualità, ed $a:\frac{a}{m}$ la ragione di maggiore inegualità. Siccome poi $a:am$ è uguale ad $1:m$, ed $a:\frac{a}{m}$ è uguale ad $1:\frac{1}{m}$; però la ragione di minore inegualità ſi eſprimerà generalmente così $1:m$, e la ragione di maggiore inegualità così $1:\frac{1}{m}$.

748. Col tentare ſemplicemente diverſe mutazioni, e combinazioni ſulle precedenti eſpreſſioni ecumeniche delle ragioni, e proporzioni, ſi troveranno facilisſima-

men-

mente col nudo calcolo Algebraico i Teoremi, che io ho dimostrato agli Articoli III. IV. V. del Tomo I, lo che io lascio all'esercizio dello studioso.

749 Rispetto alla progressione Aritmetica si raccoglie da quanto ho detto circa l'espressione delle ragioni, e proporzioni aritmetiche, che se il di lei primo termine si dirà $=a$, e l'esponente $=m$, la progressione ascendente si rappresenterà generalmente così

$$a.\ a+m.\ a+2m.\ a+3m.\ a+4m.\ a+5m.\ a+6m \text{ ec.}$$

e la discendente così

$$a.\ a-m.\ a-2m.\ a-3m.\ a-4m.\ a-5m.\ a-6m \text{ ec.}$$

e per esprimere nel tempo stesso l'una, e l'altra, sarà

$$a.\ a\pm m.\ a\pm 2m.\ a\pm 3m.\ a\pm 4m.\ a\pm 5m.\ a\pm 6m \text{ ec.}$$

750. Giusta il num. 1012. del I. Tomo la formola generale di un qualsivoglia termine di una progressione aritmetica, il di cui primo termine sia $=a$, l'esponente $=m$, il numero del termine cercato $=b$, e il termine cercato $=x$, sarà $x=a\pm\overline{b-1}\times m$. Se la progressione è ascendente vale il segno superiore $+$, e in tal caso il termine $x$ è il massimo; se è discendente vale l'inferiore $-$, e il termine $x$ è il minimo. Mediante la stessa formola si troverà il minimo termine della progressione ascendente, che è $a=x-\overline{b+1}\times m$, e il massimo della progressione discendente, che è $a=x+\overline{b-1}\times m$. Ciò poi si ottiene colla sola trasposizione de' termini, siccome colla medesima si potrà trovare l'esponente, essendo cognite le altre quantità, delle quali $x$ esprima il massimo termine, $a$ il minimo, $b$ il numero de' termini così $\frac{x-a}{b-1}=m$, o pure si avrà il numero de' termini così $b=\frac{x-a+m}{m}$. Istessamente col solo esponente, e numero de' termini si ottiene l'espressione della differenza, che passa tra il massimo, e il minimo termine così $x-a=\overline{b-1}\times m$.

751. Pel n. 1023. del I. Tom. essendo dato il massimo termine di una progressione $=r$, il minimo $=a$, e il numero de' termini $=b$, si ha la somma della progressione, che chiamo $=s$, così $s=\frac{\overline{x+a}}{2}\times b$, colla quale formola si può trovare il valore dell' altre tre quantità $x$, $a$, $b$, così $x=\frac{2s-ab}{b}$; $a=\frac{2s-bx}{b}$; $b=\frac{2s}{x+a}$. Ora per mezzo di queste due formole $x=a+\overline{b-1}\times m$, ed $s=\frac{\overline{x+a}}{2}\times b$ si scioglie il seguente.

752. Problema. Dei cinque elementi di qualsivoglia progressione, che sono il minimo termine $=a$, il massimo $=x$, l'esponente $=m$, il numero dei termini $=b$, e la somma della progressione $=s$, essendone cogniti tre, si debba trovare ciascuno degli altri due.

753. Risol. Poichè del cinque detti elementi se ne suppongono dati tre, che possono essere quali si siano, essendo dieci le combinazioni, che nascono da cinque cose prese a tre a tre, dieci pure sono i casi, che ammette il presente problema; e siccome in ciascun caso si trovano due incognite, di ognuna delle quali devesi determi-

Digitized by Google

minare il valore, quindi è che il problema riceve venti ſoluzioni, delle quali quatro ſi vedano al num. 750, ed altre quattro al num. 751.. Nella ſeconda formola ſoſtituiſca il valore di $x$ preſo dalla prima, e ſi avranno le ſeguenti quattro

$s = \frac{2ab+b^2m-bm}{2}$; $a = \frac{2s-b^2m+bm}{2b}$

$b = \frac{1}{2} - \frac{a}{m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + \frac{2s-a}{m} + \frac{1}{4}}$; $m = \frac{2s-2ab}{b \times b-1}$. Di nuovo nella ſeconda formola ſi ſoſtituiſca il valore di $a$ preſo dalla prima formola, e ſi avranno le ſeguenti quattro ſoluzioni $s = \frac{2bx-b^2m+bm}{2}$; $x = \frac{2s+b^2m-bm}{2b}$;

$b = +\frac{1}{2} + \frac{x}{m} \pm \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - \frac{2s+x}{m} + \frac{1}{4}}$; $m = \frac{2bx-2s}{b \times b-1}$. In terzo luogo ſi ſoſtituiſca nella ſeconda formola il valore di $b$ preſo dalla prima, con che ſi avranno queſte altre quattro ſoluzioni $s = \frac{x+a}{2} + \frac{x^2-a^2}{2m}$;

$x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{a^2 + 2s - a + \frac{m}{4} \times m}$; $m = \frac{x^2-a^2}{2s-x-a}$;

$a = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{x^2 - 2s + x + \frac{m}{4} \times m}$. Ed ecco trovate le venti cercate ſoluzioni, le quali ſe ſi diſporranno ſecondo ciaſcun terno di elementi cogniti, ſi avrà

Elementi cogniti

I $a, x, m$ $\Big\}$ $b = \frac{x-a+m}{m}$; $s = \frac{x+a}{2} + \frac{x^2-a^2}{2m}$

II $a, x, b$ $\Big\}$ $m = \frac{x-a}{b-1}$; $s = \frac{x+a}{2} \times b$

III $a, x, s$ $\Big\}$ $b = \frac{2s}{x+a}$; $m = \frac{x^2-a^2}{2s-x-a}$

IV $\left.\begin{matrix} a \\ m \\ b \end{matrix}\right\}$ $x = a + \sqrt{b-1} \times m$, $s = \frac{2ab + b^2 m - bm}{2}$

V $\left.\begin{matrix} a \\ m \\ s \end{matrix}\right\}$ $b = \frac{1}{2} - \frac{a}{m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + \frac{2s-a}{m} + \frac{1}{4}}$, $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{a^2 + 2s - a + \frac{m}{4}} \times m$

VI $\left.\begin{matrix} a \\ b \\ s \end{matrix}\right\}$ $x = \frac{2s - ab}{b}$, $m = \frac{2s - 2ab}{b \times \sqrt{b-1}}$

VII $\left.\begin{matrix} x \\ m \\ b \end{matrix}\right\}$ $a = x - \sqrt{b+1} \times m$, $s = \frac{2bx - b^2 m + bm}{2}$

VIII $\left.\begin{matrix} x \\ m \\ s \end{matrix}\right\}$ $b = \frac{1}{2} + \frac{x}{m} \pm \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - \frac{2s-x}{m} + \frac{1}{4}}$, $a = \frac{1}{2} m \pm \sqrt{x^2 - 2s + x + \frac{m}{4}} \times m$

IX $\left.\begin{matrix} x \\ b \\ s \end{matrix}\right\}$ $a = \frac{2s - bx}{b}$, $m = \frac{2bx - 2s}{b \times \sqrt{b-1}}$

X $\left.\begin{matrix} m \\ b \\ s \end{matrix}\right\}$ $a = \frac{2s - b^2 m + bm}{2b}$, $x = \frac{2s + b^2 m - bm}{2b}$

754. Basta riflettere a queste formole per offervare, che ad ogni elemento corrifpondono quattro diverfi valori.

755. Mediante la formola $m = \frac{x-a}{\sqrt{b-1}}$ fi poffono trovare tra due date quantità, delle quali la maggiore fi chiami $= x$, e la minore $= a$ un numero $s$ di medie pro-

por-

porzionali, poichè il numero de' continui proporzionali in tal caſo ſarà $t+2$, il qual valore ſoſtituito nella formola in luogo di $b$, la cambierà nella ſeguente $m=\frac{x-a}{t+1}$, che è l'eſponente, che devono avere queſti continui proporzionali. Quindi è, che avendoſi il primo $x$, e l'eſponente $m$, ſi troveranno immediatamente anche gli altri.

756. L'eſpreſſione delle ragioni, e proporzioni geometriche data al num. 747. fa vedere, che ſe il primo termine di una progreſſione geometrica ſarà $=a$, e l'eſponente $=m$, la progreſſione aſcendente dovrà eſſere $a.\ am.\ am^2.\ am^3.\ am^4.\ am^5$ ec., e la diſcendente $a.\ \frac{a}{m}.\ \frac{a}{m^2}.\ \frac{a}{m^3}.\ \frac{a}{m^4}.\ \frac{a}{m^5}$ ec., quantunque per la progreſſione diſcendente ſi può ritenere ancora la prima $a.\ am.\ am^2.\ am^3.\ am^4$, nel qual caſo la lettera $m$ è uguale ad una frazione.

757. Dato il numero $b$ di un cercato termine $x$ della progreſſione, dato il primo termine $a$, e dato l'eſponente $m$, ſi ha (pel num. 1052. del I. Tomo) $x=am^{b-1}$, mediante la quale formola colla ſola traſpoſizione de' termini ſi ricava $a=\frac{x}{m^{b-1}}$, ed $m=\sqrt[b-1]{\frac{x}{a}}$: Si può ancora ottenere il valore di $b$, ma ciò dipende dall' eſpreſſione logaritmica, di cui parlerò nel ſeguente Articolo; ciò non oſtante dal num. 1202. del I. Tomo coſta, che l'eſpreſſione $\frac{x}{a}=m^{b-1}$ è uguale alla ſeguente (queſta eſpreſſione *l.* vuol dire logaritmo) *l.* di $x-$ *l.* di $a=\overline{b-1}\times$ *l.* di $m$, quindi $\frac{l.\ x-l.\ a}{l.\ m}=b-1$, e finalmente $b=\frac{l.\ x-l.\ a}{l.\ m}+1$.

758. Pel num. poi 1067. del I. Tomo ſi ha la formola generale eſprimente la ſomma $s$ della progreſſione, così $s=\frac{am^b-a}{m-1}$, da cui ricavaſi $a=\frac{ms-s}{m^b-1}$; $b=\frac{l.\ \overline{m-1\times s+a}-l.\ a}{l.\ m}$; e queſta equazione $b=\frac{l.\ \overline{ms-s+a}-l.\ a}{l.\ m}$ ſi ricava da $s=\frac{am^b-a}{m-1}$, che è $\frac{ms-s+a}{a}=m^b$, e paſſando ai logaritmi ſi ha *l.* $\overline{ms-s+a}$ $-l.\ a=b\ l.\ m$, conſeguentemente $b=\frac{l.\ \overline{ms-s+a}-l.\ a}{l.\ m}$; e il valore di $m$, che ſi ha da queſta equazione $m^b-\frac{ms}{a}+\frac{s}{a}-1=0$, dedotta dalla ſteſſa $s=\frac{am^b-a}{m-1}$.

759. Non meno nelle progreſſioni aritmetiche, che nelle geometriche concorrono cinque elementi, cioè il primo termine, che chiamerò $=a$, il maſſimo $=x$, il numero de' termini $=b$, l'eſponente $=m$, e la ſomma della progreſſione $=s$. Di queſti cinque elementi eſſendone cogniti tre quali ſi ſiano, ſe ne trovano gli altri due, e ſiccome dieci ſono i terni, che riſultano dalla combinazione di cinque coſe a tre a tre, dieci perciò ſono i caſi, che riceve il ſeguente

760. Prob. Dei cinque elementi già detti essendone cogniti tre si debbano trovare gli altri due.

761. Risol. Poichè questi cinque elementi si possono combinare dieci volte a tre a tre, e da ognuna di queste combinazioni si ricava il valore di due incognite, quindi è, che questo Problema ammette venti soluzioni. Quattro se ne sono trovate al num. 757., altre quattro al num. 758., ed ora ritroveremo le rimanenti dodici per mezzo delle due formole I. $x = am^{b-1}$; II. $s = \frac{am^b - a}{m-1}$. In questa seconda formola si sostituisca il valore di $a$ preso dalla prima, ed essa si cambierà nella seguente $s = \frac{m^b x - x}{\overline{m-1} \times m^{b-1}}$, da cui si ricava $x = \frac{\overline{ms-s} \times m^{b-1}}{m^b - 1}$; l' equazione $m^b - \frac{s}{s-x} m^{b-1} + \frac{x}{s-x} = 0$, che dà il valore di $m$;

e $b = \frac{l.x + l.m - l.\overline{mx+s-ms}}{l.m}$, che si ricava da $s = \frac{m^b r - r}{\overline{m-1} \times m^{b-1}}$, che è

$\overline{ms-s} \times m^{b-1} = m^b x - x$, o sia $\overline{ms-s} \times m^{b-1} = mx \times m^{b-1} - x$, e però $\overline{mx+s-ms} \times m^{b-1} = x$; quindi $m^{b-1} = \frac{x}{mx+s-ms}$, e passando ai logaritmi

$\overline{b-1} \times l.m = l.x - l.\overline{mx+s-ms}$, e $b-1 = \frac{l.x - l.\overline{mx+s-ms}}{l.m}$, e finalmente

$b = \frac{l.x - l.\overline{mx+s-ms}}{l.m} + 1$, o sia $b = \frac{l.x - l.\overline{mx+s-ms} + l.m}{l.m}$. Parimente col sostituire nella formola II il valore di $m$ preso dalla I si ottengono altre quattro formole, cioè $s = x \frac{\sqrt[b-1]{\frac{x}{a}} - a}{\sqrt[b-1]{\frac{x}{a}} - 1}$, da cui si ricava $x \times \overline{\overline{s-x}^{b-1}} = a \times \overline{\overline{s-a}^{b-1}}$, colla quale equazione si ottiene tanto il valore di $x$, come il valore di $a$; in oltre si ha il valore di $b$, che è $b = \frac{l.x - l.a + l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}{l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}$, e questo si ricavà da

$x \times \overline{\overline{s-x}^{b-1}} = a \times \overline{\overline{s-a}^{b-1}}$, che è $\frac{x}{a} = \left(\frac{s-a}{s-x}\right)^{b-1}$, e passando ai logaritmi si ha $l.x - l.a = \overline{b-1} \times \overline{l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}$, onde $b-1 = \frac{l.x - l.a}{l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}$, e finalmente $b = \frac{l.x - l.a}{l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}} + 1$, o sia $b = \frac{l.x - l.a + l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}{l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}$.

Final-

Finalmente si sostituisca nella formola II il valore di $b$ preso dalla formola I, e si avranno le rimanenti quattro formole, cioè

$$s = a \times \frac{m^{\frac{l.x - l.a}{l.m} + 1} - 1}{m - 1}, \text{ da cui si ricava}$$

$$a = \frac{s \times \overline{m-1}}{m^{\frac{l.x - l.a}{l.m}+1} - 1}; \quad x = \frac{ms - s + a}{m}; \quad m = \sqrt[x]{\frac{s-a}{s-x}}$$

Questa penultima equazione poi $x = \frac{ms-s+a}{m}$ si ricava da $a = \frac{ms-s}{m^{\frac{l.x-l.a+l.m}{l.m}} - 1}$

che è $am^{\frac{l.x-l.a+l.m}{l.m}} - a = ms - s$, e però $m^{\frac{l.x-l.a+l.m}{l.m}} = \frac{ms-s+a}{a}$,

e passando ai logaritmi si ha $\frac{l.x-l.a+l.m}{l.m} l.m = l.\overline{ms-s+a} - l.a$, o sia

$l.x - l.a + l.m = l.\overline{ms-s+a} - l.a$, e dai logaritmi passando ai numeri ne viene $\frac{mx}{a} = \frac{ms-s+a}{a}$, e però $x = \frac{ms-s+a}{m}$, da cui poscia si ottiene l'ultima equazione $m = \sqrt[x]{\frac{s-a}{s-x}}$.

762. Se queste ritrovate formole si disporranno secondo ciascun terno di elementi cogniti, si avrà

| | Elementi cogniti | |
|---|---|---|
| I | $a$ | $b = \frac{l.x - l.a + l.m}{l.m}$ |
| | $x$ | $\frac{l.x-l.a+l.m}{l.m}$ |
| | $m$ | $s = \frac{am^{\frac{l.x-l.a+l.m}{l.m}} - a}{m-1}$ |

II $a$, $x$, $b$

$$m = \sqrt[b-1]{\frac{x}{a}}$$

$$s = \frac{x\sqrt[b-1]{\frac{x}{a}} - a}{\sqrt[b-1]{\frac{x}{a}} - 1}$$

III $a$, $x$, $s$

$$b = \frac{l.x - l.a + l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}{l.\overline{s-a} - l.\overline{s-x}}$$

$$m = \frac{s-a}{s-x}$$

IV $a$, $m$, $b$

$$x = am^{b-1}$$

$$s = \frac{am^b - a}{m-1}$$

V $a$, $m$, $s$

$$b = \frac{\overline{l.m-1} \times s + a - l.a}{l.m}$$

$$x = \frac{ms - s + a}{m}$$

VI $a$, $b$, $s$

$m^b - \frac{ms}{a} + \frac{s}{a} - 1 = o$, dalla quale equaz. fi ha il valore di $m$

$x \sqrt{\overline{s-x}^{b-1}} = a\sqrt{\overline{s-a}^{b-1}}$ dalla quale eq. fi ha il val. di $x$

VII $x$, $m$, $b$

$$a = \frac{x}{m^b - 1}$$

$$s = \frac{m^b x - x}{\overline{m-1} \times m^{b-1}}$$

VIII $x$, $m$, $s$

$$b = \frac{l\,x + l.m - l.\overline{m\,x + s - ms}}{l.m}$$

$$a = \frac{s\sqrt[m-1]{\overline{\phantom{x}}}}{\frac{l\,x - l.a + l.m}{l.m}}$$

$m \qquad -1$

IX

IX $\left.\begin{matrix} x \\ b \\ s \end{matrix}\right\}$ $m^b - \frac{s}{s-x} m^{b-1} + \frac{x}{s-x} = 0$, dalla quale eq. si ha il valore di $m$

$x \sqrt[b-1]{s-x} = a \sqrt[b-1]{s-a}$, dalla quale eq. si ha il val. di $a$

X $\left.\begin{matrix} m \\ b \\ s \end{matrix}\right\}$ $a = \frac{ms-s}{m^b-1}$

$x = \frac{ms-s}{m^b-1} \sqrt[b-1]{m^{b-1}}$

763. Si offervi in primo luogo, che nelle precedenti formole 1, 2, 5, 9, 15, 16 ho avuto in viſta i logaritmi comuni, ne' quali ſi dà il zero per logaritmo all' unità, e perciò vi ho ommeſſa l' eſpreſſione logaritmica dell'unità: in ſecondo luogo, che per ogni elemento ſi ſono trovati quattro diverſi valori.

764. Nella progreſſione geometrica generale $a. am. am^2. am^3. am^4$ ec. ſi può offervare, che ſe l'eſponente $m$ è poſitivo, tutti i termini della progreſſione ſaranno poſitivi, o negativi, ſecondo che la quantità $a$ ſarà poſitiva, ò negativa, ma ſe l' eſponente $m$ ſarà negativo, perchè tutte le poteſtà pari di una quantità negativa ſono poſitive, comunque ſia il ſegno, da cui è affetta la quantità $a$, ne' termini della progreſſione alterneranno i ſegni. In queſto caſo per avere la ſomma della progreſſione biſogna concepirla riſultante da due progreſſioni, delle quali una ſia formata dai termini poſitivi, e l' altra dai termini negativi, indi trovare la ſomma dell' una, e dell' altra, e la differenza di queſte ſomme darà la ſomma della progreſſione propoſta, la quale ſarà affetta dal ſegno dell'ultimo termine ſe la progreſſione è aſcendente, e ſe è diſcendente, dal ſegno del primo. Ognuno poi può accorgerſi, che l'eſponente di ciaſcuna di queſte due progreſſioni dovrà eſſere $m^2$, perchè tra i termini di una cadendo i termini dell'altra, nel qual caſo l'eſponente è $m$, ſe ſi ommetteranno i termini di mezzo l' eſponente dovrà eſſere $m^2$ (pel num. 754 del I. Tomo).

765. Mediante la formola $m = \sqrt[b-1]{\frac{x}{a}}$ ſi ha la maniera di trovare quanti medj proporzionali ſi vogliono tra due quantità date. Il numero de' medj cercati ſia $= t$, le due quantità date ſiano $a$, $x$, dunque il numero di tutti i termini ſarà $t+2$: Quindi ſe nella formola $m = \sqrt[b-1]{\frac{x}{a}}$ ſi ſoſtituirà $t+2$ in luogo di $b$, eſſa ſi cambierà nella ſeguente $m = \sqrt[t+1]{\frac{x}{a}}$, colla quale ſi ha il valore dell'eſponente, e però ſi poſſono trovare i medj cercati (pel num. 1046 del I. Tomo). Si poſſono ancora dare le formole generali per ciaſcun numero di medj proporzionali, come ſi può vedere nella ſeguente Tavola, in cui i numeri romani denotano il numero de' medj proporzionali, che ſi ptendono trà $a, x$.

I $a.\ \sqrt{a\,x}.\ x$

II $a.\ \sqrt[3]{a^2x}.\ \sqrt[3]{ax^2}.\ x.$

III $a.\ \sqrt[4]{a^3x}.\ \sqrt[4]{a^2x^2}.\ \sqrt[4]{ax^3}.\ x.$

IV $a.\ \sqrt[5]{a^4x}.\ \sqrt[5]{a^3x^2}.\ \sqrt[5]{a^2x^3}.\ \sqrt[5]{ax^4}.\ x.$

V $a.\ \sqrt[6]{a^5x}.\ \sqrt[6]{a^4x^2}.\ \sqrt[6]{a^3x^3}.\ \sqrt[6]{a^2x^4}.\ \sqrt[6]{ax^5}.\ x.$ ec.

Queſte formole ſi poſſono continuare a piacere. In ciaſcuna ſerie dal primo medio proporzionale ſi generano tutti gli altri, come ſi può vedere in queſta progreſſione $a.\ x.\ \frac{x^2}{a}.\ \frac{x^3}{a^2}.\ \frac{x^4}{a^3}.\ \frac{x^5}{a^4}$ ec., in cui $x$ è il primo medio, il quale alzato al quadrato, e diviſo pel primo termine $a$, genera il ſecondo medio $\frac{x^2}{a}$, e queſto alzato al quadrato, e diviſo pel precedente termine $x$, genera il terzo $\frac{x^3}{a^2}$ ec. L' invenzione poi del primo medio nelle propoſte formole ſi ricava dal num. 1060. del I. Tomo, poichè eſſendo $a$, $x$ le due quantità date, e $y$ il primo de' medj proporzionali da trovarſi, de' quali il numero ſia $n$, ſi avrà $a^{n+1} : y^{n+1} :: a : x$, da cui ſi ricava $a^{n+1}x = ay^{n+1}$, cioè $a^n x = y^{n+1}$, conſeguentemente $y = \sqrt[n+1]{a^n x}$; quindi il ſecondo ſarà $\sqrt[n+1]{a^{n-1}x^2}$; il terzo $\sqrt[n+1]{a^{n-2}x^3}$; il quarto $\sqrt[n+1]{a^{n-3}x^4}$ ec.

## ARTICOLO II.

### *Delle eſpreſſioni logaritmiche, e delle equazioni eſponenziali.*

766. IN qualſivoglia ſiſtema di logaritmi quel numero, il di cui logaritmo è l'unità, chiamaſi baſe logaritmica: Così pei logaritmi volgari la baſe logaritmica è il 10, a cui corriſponde l'unità per logaritmo. Suppoſto pertanto, che la lettera $a$ rappreſenti la baſe logaritmica, e $y$ eſprima un numero qualunque indeterminato, ſarà $a^x = y$ l'equazione fondamentale. In queſta equazione l'eſponente indeterminato $x$ della baſe logaritmica ſi chiama il logaritmo del numero $y$. Col determinarſi il valore di $x$ reſta ancora determinato il valore di $y$, poichè ſe ſi farà $x = 0$, ſarà $y = a^0$, e perchè $a^0 = 1$, ſarà $y = 1$: Facendoſi $x = 1$, ſarà $y = a$, ſe $x = 2$, ſarà $y = a^2$; ſe $x = 3$, ſi avrà $y = a^3$; ſe $x = -1$, ſarà $y = a^{-1}$, cioè $y = \frac{1}{a}$; ſe $x = -2$, ſarà $y = \frac{1}{a^2}$ ec.

767. Per eſprimere un logaritmo di qualunque ſiſtema egli ſia ſi ſuole uſare la lettera $l$ come ſi è detto al num. 757, la quale non avendo per ſe ſteſſa alcuna determinazione, non gli dà perciò alcun certo, e determinato valore: Onde volendoſi eſprimere il logaritmo di $a$, ſi fa-

si farà $l.\ a$; per esprimere il logaritmo di $ab+ac$, si farà $l.\ \overline{ab+ac}$; così per dinotare il logaritmo di $\frac{a}{c}$, si farà $l.\ \frac{a}{c}$.

768. Quantunque nell'esposta maniera si possa sempre indicare il logaritmo di una data quantità, torna però sovente più comodo, ritenendo l'uso della stessa lettera $l$, prevalersi di certe trasformazioni, che dalle proprietà de' logaritmi ci vengono somministrate. In tre casi possono aver luogo queste trasformazioni: Il primo quando la quantità, di cui si vuole il logaritmo, nasce dalla moltiplicazione di diverse quantità, o pure di una sola più volte in se stessa, cioè a dire quando tale quantità è un prodotto, ovvero una potestà. Il secondo quando la detta quantità è una frazione: Il terzo quando è un radicale. Scorriamo ad uno ad uno questi casi, e mettiamo sotto gli occhi le convenienti espressioni logaritmiche per qualunque sistema di logaritmi.

769. Quanto al primo caso debbasi indicare il logaritmo di una quantità di due dimensioni, come sarebbe $ab$. Ciò si può ottenere facendo $l.\ ab$; ma se si rifletterà, che (pel num. 495. del I. Tomo) essendo $1 : a :: b : ab$, la quantità data perciò è $\frac{ab}{1}$, e che (pel num. 1185. del I. Tomo) il logaritmo, che compete a un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei di lui fattori; il logaritmo poi (pel num. 1191. del I. Tomo) che conviene ad una frazione è uguale alla differenza, che nasce dal sottrarsi il logaritmo del denominatore dal logaritmo del numeratore, si intenderà benissimo, che l'espressione $l.\ \frac{ab}{1}$ è uguale alla seguente $l.a+l.b-l.1$. Per la stessa ragione il logaritmo di $abc$ è $l.a+l.b+l.c-2l.1$, e il logaritmo di $abcd$ è $l.a+l.b+l.c+l.d-3l.\ 1$. Così il logaritmo di $ab-ac$ è $l.\ a+l.\ \overline{b-c}-l.\ 1$ ec. Le dimostrazioni di queste ultime operazioni sono troppo evidenti, onde non v'abbia bisogno di esporle. Generalmente pertanto il logaritmo di una quantità di quante dimensioni si vogliono sarà sempre uguale alla somma dei logaritmi dei di lei fattori diminuita del logaritmo dell'unità preso tante volte, quante sono le dimensioni della proposta quantità una meno.

770. Da ciò, che poc'anzi ho detto circa il modo di indicare il logaritmo di un prodotto, si può abbastanza capire come debbasi esprimere il logaritmo di una potestà: Debbasi per Esempio esprimere il logaritmo di $a^2$: non solo si potrà fare così $l.\ a^2$, ma si farà eziandio così $2\ l.a-l.\ 1$, perchè essendo $1 : a :: a : a^2$, sarà $a^2 = \frac{a^2}{1} = \frac{a \times a}{1}$; ma (pel num. 726.) $l.\ \frac{a \times a}{1} = l.a+l.a-l.1$, cioè $2l.a-l.1$. Ist'essamente il logaritmo di $a^3$ è $3l.a-2\ l.1$; il logaritmo di $a^4$ è $4l.a-3l.1$, e generalmente il logaritmo di $a^m$ è $ml.a-ml.1+l.1$. Così il logaritmo di $\overline{ac-cc}^m$ è $ml.\overline{ac-cc}-ml.1+l.1$, cioè (pel num. 769.) $m \times l.\overline{a-c}+l.c-ml.1+l.1$. Questo modo di esprimere i logaritmi costa ancora dal num. 1198. del I. Tomo. Se la potestà sarà negativa, come se fosse $a^{-m}$, il suo logaritmo sarà $-ml.a+ml.1+l.1$; imperocchè essendo $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, che si risolve in $a^m : 1 :: 1 : \frac{1}{a^m}$, il logaritmo di $\frac{1}{a^m}$ sarà $l.\ 1+l.\ 1-l.\ a^m$; ma si è veduto, che $l.a^m = ml.a-ml.1+l.1$, dunque sarà $l.a^{-m} = l.1+l.1-ml.a+ml.1-l.1 = -ml.a+ml.1+l.1$.

771.

771. Rispetto alle frazioni il modo di operare si deduce dal num. 1191. del I. Tomo. Debbasi esprimere il logaritmo della frazione $\frac{a}{c}$, poichè essa è $=1 \times \frac{a}{c}$, mentre si ha $c : a :: 1 : \frac{a}{c}$, però il logaritmo di $\frac{a}{c}$ si esprimerà non solo così $l.\frac{a}{c}$, ma più comodamente così $l.a+l.1-l.c$; così il logaritmo di $\frac{b^3}{ac}$ sarà $l.b^3+l.1-l.ac$: ma $l.b^3=3l.b-2l.1$, e $l.\ ac=l.a+l.c-l.1$. quindi $l.\ \frac{b^3}{ac}=3l.b-l.a-l.c$: Istessamente il logaritmo $\frac{ac^m}{ex^n}$ è $ml.c+l.a-nl.x-l.$ e $+\overline{n-m}\,l.\,1$.

772. Resta a discorrere del terzo caso, in cui trattasi del logaritmo di una quantità radicale. Debbasi esprimere il logaritmo di $\sqrt{a}$. Poichè si ha $1 : \sqrt{a} :: \sqrt{a} : a$, ben si vede, che $\sqrt{a}=\sqrt{a} \times 1$; ma (pel num. 1202 del I. Tomo il logaritmo, che compete ad una quantità radicale non è altro, che la parte del logaritmo della quantità esistente sotto al vincolo denominata dall' esponente del vincolo, però il logaritmo di $\sqrt{a}$ sarà non solo $l.\sqrt{a}$, ma ancora $\frac{l.a+l.1}{2}$; il logaritmo di $\sqrt[3]{a}$ sarà $\frac{l.a+2l.1}{3}$, e generalmente il logaritmo di $\sqrt[m]{a}$ sarà $\frac{l.a+ml.1-l.1}{m}$. Se si dovrà esprimere il logaritmo di una potestà imperfetta, ma negativa, come di $a^{-\frac{1}{m}}$, si farà $-\frac{l.a+l.1+ml.1}{m}$, perchè $a^{-\frac{1}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$, che si risolve in $\sqrt[m]{a} : 1 :: 1 :$ $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$; quindi $l.\ \frac{1}{\sqrt[m]{a}}=l.1+l.1-l.\sqrt[m]{a}$; ma $l.\ \sqrt[m]{a}=\frac{l.a+ml.1-l.1}{m}$, dunque $l.\ \frac{1}{\sqrt[m]{a}}=l.1+l.1-\frac{l.a-ml.1+l.1}{m}$, cioè col farsi la riduzione allo stesso denominatore si ha $-\frac{l.a+ml.1+l.1}{m}=l.a^{-\frac{1}{m}}$

773. Finora ho dato le espressioni logaritmiche per qualunque sistema di logaritmi, ma se si vorranno usare soltanto i logaritmi volgari, ne' quali per logaritmo all'unità corrisponde il zero, riusciranno assai più spedite, e brevi le espressioni logaritmiche con ommettersi tutti i logaritmi dell' unità, mentre per quante volte si prenda il zero, torna sempre zero. Io quì soggiungerò le precedenti formole pei logaritmi volgari.

$l.ab = l.a + l.b$; $l.abdx = l.a + l.b + l.d + l.x$; $l.a^m = m\,l.a$; $l.\overline{a+b}^m = m\,l.\overline{a+b}$;

$l.\overline{ad-ac}^{-m} = -m\,l.a + m\,l.\overline{d-c}$; $l.\frac{b}{a} = l.b - l.a$;

$l.\left(\frac{ab^2+b^2d}{c^3}\right) = 2\,l.b + l.\overline{a+d} - 3\,l.c$; $l.\sqrt[3]{ax-bd} = \frac{1}{3}\,l.\overline{ax-bd}$;

$l.\overline{ac+ey}^{-\frac{1}{m}} = -\frac{1}{m}\,l.\overline{ac+ey}$.

774. Prima di paſſare avanti ſembrami opportuno di ſciogliere una difficoltà circa i logaritmi delle quantità negative, ſe ſiano cioè reali, e quali ſiano. A riſpondere pertanto con tutta brevità, e chiarezza io oſſervo (giuſta il num. 20.), che le quantità negative in niente altro differiſcono dalle poſitive, ſe non ſe, che ſi prendono in ſenſo contrario, e che i logaritmi non riguardano le relazioni, o oppoſizioni, che poſſono avere fra ſe le quantità, ma ſoltanto riguardano le quantità in ſe ſteſſe, onde è, che tanto di una quantità poſitiva, come di una negativa uguale, il logaritmo deve eſſere lo ſteſſo. Il modo poi di regolarſi in caſo, che ſi tratti di una formola riſultante da quantità poſitive, e negative, quale ſarebbe $a^2b - \frac{cd}{e}$ è queſto: Si faccia $a^2b = m$, $\frac{cd}{e} = n$, i di cui logaritmi ſaranno $l.m = 2\,l.a + l.b$, e $l.n = l.c + l.d - l.e$. Mediante queſti logaritmi ſi trovi tanto l'$m$, quanto l'$n$, indi ſi prenda $m - n$, e ſi avrà quello che ſi cercava.

775. Veniamo adeſſo alle formole, che ſervono per evitare i logaritmi negativi. Il Complemento logaritmico di un numero P ſarà (pel num. 1246 del I. Tomo) C. L. P $= 10 - l.P$, da cui ſi ricava $l.P = 10 - C.L.P$. Il logaritmo arbitrario di P (pel num. 1250 del I. Tomo) è L. A. P $= 10 + l.P$, da cui ſi ricava $l.P = L.A.P - 10$. Il logaritmo arbitrario di una frazione, che abbia l'unità per numeratore, come $\frac{1}{P}$ è (pel num. 1255 del I. Tomo) L. A. $\frac{1}{P} = C.L.P$. Il logaritmo arbitrario di una qualunque poteſtà di un dato numero, come per Eſempio di $P^m$ è L. A. $P^m = 10 - 10m + m\,L.A.P$, poichè (pel num. 1250 del I. Tomo) è $L.A.P^m = 10 + l.P^m$, cioè $= 10 + ml.P$; ora in luogo di $l.P$ ſoſtituendo il ſuo valore preſo dalla formola $l.P = L.A.P - 10$, ſi avrà $L.A.P^m = 10 - 10m + L.A.P$: Quindi ſe la potenza ſarà imperfetta, come $P^{\frac{1}{m}}$, il ſuo logaritmo arbitrario ſarà $L.A.P^{\frac{1}{m}} = 10 - \frac{10}{m} + \frac{1}{m}\,L.A.P = \frac{10m - 10 + L.A.P}{m}$ mediante la riduzione allo ſteſſo denominatore. Queſte ſono le formole, che poſſono baſtare per evitare i logaritmi negativi. Veniamo intanto alle equazioni eſponenziali.

776. Quantità eſponenziale è quella, che trovaſi inalzata ad una potenza, il di cui eſponente è una quantità incognita, o ſia indeterminata.

777. Varj ſono gli ordini delle quantità eſponenziali. Quando l'eſponente è una

ſemplice quantità indeterminata, la quantità a tale poteſtà inalzata diceſi eſponenziale del primo ordine, come $a^x$: Si dice del ſecondo ordine, quando l'eſponente della propoſta quantità è egli ſteſſo un'eſponenziale del primo ordine, come $a^{x^y}$. Sarà del terzo ordine così $a^{x^{y^z}}$. La quantità elevata alla poteſtà d'eſponente indeterminato può eſſere una quantità cognita, e può eſſere ancora una quantità incognita. Per ora io conſidererò ſolamente le quantità cognite elevate ad una poteſtà d'eſponente indeterminato, come $a^x$.

778. Equazioni eſponenziali ſono quelle, in cui entrano quantità eſponenziali, e però tutte le quantità, dalle quali riſultano queſte equazioni, ſono cognite, a riſerva degli eſponenti, che ſono incogniti. Il modo pertanto di riſolvere queſte equazioni conſiſte in ſaper trovare il valore di tali eſponenti indeterminati. Ora ciò ſi ottiene mediante i logaritmi, poichè quando due quantità ſono uguali, uguali ſono pure i loro logaritmi, onde è, che dai numeri eſibitici da tali quantità ſi può paſſare ai logaritmi, e in tal caſo mediante le trasformazioni logaritmiche indicate al numero 773, ſi può ottenere il valore dell'eſponente indeterminato, come ſi può vedere eſeguito nelle formole 1., 5., 9., 16., delle quali mi contenterò rimettendovi il lettore, a fine di non perdere il tempo in nuovi Eſempi. Soltanto ſoggiungerò un Problema dipendente da queſte equazioni, acciò colla pratica ognuno veda come debba regolarſi al biſogno.

779. Prob. Cercaſi in quanti anni una data ſomma $=a$ di denaro acquiſterà un propoſto aumento $b$, coll'aggiungerſi ſempre al capitale $=a$ il frutto di ciaſcun anno.

780. Riſol. Il tempo cercato ſia $=x$; il numero arbitrario, come too, ſu cui ſi regola il frutto ſia $=m$. Il frutto, che ſu queſto numero ſi ricava, ſia $=n$. Il frutto, che rende il Capitale $a$ dopo il primo anno, ſarà $\frac{an}{m}$, perchè come ſtà $m:n$, così ſtà il capitale $a$ al frutto, che rende in un anno. Siccome poi queſto frutto ſi deve continuamente convertire nel capitale, però nel principio del ſecondo anno il capitale ſarà $a+\frac{an}{m}$: Onde facendo come $a:\frac{an}{m}$, così $a+\frac{an}{m}$ al quatto proporzionale, ſi avrà

$\frac{\frac{an}{m}\times\overline{a+\frac{an}{m}}}{a}=a\times\frac{\overline{mn+n^2}}{m^2}$, e queſto è il frutto, che rende il capitale $a+\frac{an}{m}$ nel ſecondo anno. A queſto frutto pertanto $a\times\frac{\overline{mn+n^2}}{m^2}$ ſi aggiunga $a+\frac{an}{m}$ capitale del ſecondo anno, e ſi avrà $a+\frac{an}{m}+a\times\frac{\overline{mn+n^2}}{m^2}=a\times\frac{\overline{m^2+2mn+n^2}}{m^2}$ $=a\times\frac{\overline{m+n}^2}{m^2}$, che è il capitale nel principio del terzo anno. Si faccia di nuo-

vo

vo come $n : \frac{an}{m}$, così questo capitale $a \times \frac{\overline{m+n}^2}{m^2}$ al quarto proporzionale, e si avrà $\frac{\frac{an}{m} \times a \times \frac{\overline{m+n}^2}{m^2}}{a} = an \times \frac{\overline{m+n}^2}{m^3}$, che è il frutto corrispondente al capitale del terzo anno. A questo frutto si aggiunga il capitale del terzo anno, e si avrà il capitale nel principio del quarto anno, che trovati essere

$$a \times \frac{\overline{m+n}^2}{m^2} + an \times \frac{\overline{m+n}^2}{m^3} = \frac{\overline{am+an}}{m^3} \times \overline{m+n}^2 = a \times \overline{m+n} \times \frac{\overline{m+n}^2}{m^3}$$

$= a \times \frac{\overline{m+n}^3}{m^3}$. Nella stessa maniera continuando il calcolo si troverà, che nel principio del quinto anno il Capitale sarà $a \times \frac{\overline{m+n}^4}{m^4}$ : nel principio del sesto anno sarà $a \times \frac{\overline{m+n}^5}{m^5}$ ec. Quindi allora che sarà passato un numero d'anni $= x$ il capitale sarà $a \times \frac{\overline{m+n}^x}{m^x}$. Ma per la condizione proposta nel problema, l'aumento, che deve subire il Capitale dopo un numero d'anni $= x$, è $= b$, dunque al termine di $x$ anni il capitale sarà $= a+b$, che pur ora si è trovato $=$

$a \times \frac{\overline{m+n}^x}{m^x}$ ; che però si ha l'equazione $a \times \frac{\overline{m+n}^x}{m^x} = a+b$, o sia

$a \times \overline{m+n}^x = \overline{a+b} \times m^x$, in cui la quantità incognita tiene luogo di esponente. Devesi dunque ritrovare il valore di questo esponente $x$, per ottenere il quale è mestiere aver ricorso ai logaritmi. Si faccia per tanto uso della trasformazione spiegata al num. 770, e si avrà $x\, l.\, \overline{m+n} + l.\, a = x\, l.\, m + l.\, \overline{a+b}$ (ommetto le espressioni logaritmiche dell'unità, perchè intendo servirmi dei logaritmi volgari), cioè $x\, l.\, \overline{m+n} - x\, l.\, m = l.\, \overline{a+b} - l.\, a$, o sia $x \times l.\, \overline{m+n} - l.\, m = l.\, \overline{a+b} - l.\, a$, conseguentemente $x = \frac{l.\, \overline{a+b} - l.\, a}{l.\, \overline{m+n} - l.\, m}$. Si avrà adunque il cercato numero degli anni con dividere il logaritmo di $a+b$ diminuito del logaritmo di $a$ pel logaritmo di $m+n$ diminuito del logaritmo di $m$.

781. Per ridurre la soluzione generale di questo problema a qualche caso particolare. Sia il capitale $a = 600000$ lire: L'aumento $b$, che dopo un numero $x$ di anni deve acquistare questo capitale sia 94575 lire. Sia il numero arbitrario $m =$ 100, il frutto $n$, che si regola su questo numero 100, sia $= 5$. Fatta la sostituzio-

zione di queſti valori ſi avrà $x = \frac{l.\,694575 - l.\,600000}{l.\,105 - l.\,100}$, e facendo l'uſo attuale de' logaritmi ſi avrà $x = \frac{5.\,841720 - 5.\,778151}{2.\,021189 - 2.\,000000} = \frac{0.\,063569}{0.\,021189} = 3$, e però il cercato numero degli anni è 3, dopo i quali mediante la converſione del frutto in capitale ſi troverà, che col capitale di lire 600000 ſi ſono acquiſtate lire 94575.

782. Può ſuccedere, che per poterſi acquiſtare col capitale $a$ il propoſto aumento $b$ non baſti un numero completo d'anni, ma vi ſi richiegga in oltre una porzione dell'anno ſuſſeguente, nel qual caſo il valore di $\frac{l.\,\overline{a+b} - l.\,a}{l.\,\overline{m+n} - l.\,m}$ ſarà una frazione impropria. Per determinare queſta porzione d'anno ſi potrebbe chiamare in ſuſſidio una nuova formola da rinvenirſi col calcolo: più ſpeditamente però ſi regoli nel ſeguente modo. Si faccia l'attual diviſione di $l.\,\overline{a+b} - l.\,a$ per $l.\,\overline{m+n} - l.\,m$, di cui il quoziente ſia A, ed il reſiduo ſia B; indi s'iſtituiſca queſta analogia A $\times$ $l.\,\overline{m+n} - l.\,m$ : B :: A : al quarto, che ſarà $\frac{B}{l.\,\overline{m+n} - l.\,m}$, e perchè un anno è compoſto di dodici meſi, però la formola, che dà il numero de' meſi, che oltre gli anni trovati ſi richiedono pel cercato aumento è $\frac{12B}{l.\,\overline{m+n} - l.\,m}$. Se queſta diviſione non ſi fa eſattamente, egli è ſegno, che oltre i Meſi vi vogliono ancora de' giorni, per trovare i quali la formola ſarà $\frac{30Q}{l.\,\overline{m+n} - l.\,m}$, perchè 30 giorni fanno un Meſe (ſuppoſto che ſia Q il reſiduo, che riſulta dopo eſſerſi fatta la diviſione di 12B per $l.\,\overline{m+n} - l.\,m$). Se nella frazione $\frac{12B}{l.\,\overline{m+n} - l.\,m}$ il denominatore foſſe maggiore del numeratore, onde non ſi poteſſe fare la diviſione, in tal caſo la porzione del ſeguente anno non ſarebbe di Meſi, ma ſoltanto di giorni, e la formola, che ſomminiſtrerebbe queſti giorni ſarebbe $\frac{365B}{l.\,\overline{m+n} - l.\,m}$, perchè l'anno coſta di 365 giorni. Ma queſte coſe ſono per ſe ſteſſe troppo evidenti; e quindi affatto ſuperfluo il farne l'applicazione.

783. Nella formola trovata $a \times \frac{\overline{m+n}^{x}}{m^{x}} = a+b$ l'incognita era l'eſponente $x$: Potrebbe per altro darſi, che l'incognita foſſe qualunque dell'altre quantità $a$, $b$, $m$, $n$. Soggiungerò pertanto le formole dei loro valori

$a =$

$$a = \frac{bm^x}{\overline{m+n}^x - m^x}$$

$$b = a \times \frac{\overline{m+n}^x}{m^x} - a$$

$$m = \frac{n}{\sqrt[x]{\frac{a+b}{a}} - 1}.$$

perchè $a \times \overline{m+n}^x = am^x + bm^x$, da cui si ricava $\frac{\overline{m+n}^x}{m^x} = \frac{a+b}{a}$, quindi $\frac{m+n}{m} = \sqrt[x]{\frac{a+b}{a}}$, e però $m + n = m\sqrt[x]{\frac{a+b}{a}}$, e finalmente $m = \frac{n}{\sqrt[x]{\frac{a+b}{a}} - 1}$, da cui si ha il valore di $n$, che è $n = m\sqrt[x]{\frac{a+b}{a}} - m$.

784 Se il problema fosse stato proposto nella seguente maniera (cercasi in quanti anni si estinguerà una data somma di denaro $= a$, stante la convenzione di dover pagare ogni anno, oltre il frutto corrispondente a ciò, che costituisce la somma per ciascun anno, una porzione di essa somma; così che l'annua pensione da pagarsi risultante dal conveniente frutto, e da una porzione della somma $a$, sia $= b$), si procederebbe alla risoluzione così. Quì si vede, che i pagamenti da farsi dovendo essere tutti uguali, solo si cerca il numero de' pagamenti da farsi, col cercarsi il numero degli anni, dopo i quali resterà estinta la data somma $a$. Sia come sopra $\frac{an}{m}$ il frutto, che corrisponde alla somma $a$: Poichè questo frutto $\frac{an}{m}$ non basta a pagare la pensione $= b$ nel fine del primo anno, si dovrà dalla somma $a$ sottrarre la quantità $b - \frac{an}{m}$, che rappresenta la porzione da detrarsi dalla somma $a$; onde è, che la somma $a$ nel secondo anno sarà $a - b + \frac{an}{m}$: Quindi per avere il frutto di questa rimanente somma, si faccia $a : \frac{an}{m} :: a - b + \frac{an}{m}$ al quarto proporzionale, che trovasi essere $\frac{anm - bmn + an^2}{m^2}$, e che è il frutto della rimanente somma nel secondo anno. Se pertanto si sottrerà questo frutto dalla pensione $b$ si avrà $b - \frac{amn + bmn - an^2}{m^2}$ cioè $\frac{bm^2 - amn + bmn - an^2}{m^2}$, $=$

$b -$

$b - \frac{an}{m} \times \sqrt{\frac{a + \frac{an}{m}}{a}}$, che è la porzione da detrarsi dalla somma $a - b + \frac{an}{m}$ corrispondente al secondo anno; per lo che fatta questa sottrazione, la somma pel terzo anno sarà $\frac{am^2 - 2bm^2 + 2amn - bmn + an^2}{m^2}$. Si faccia di nuovo

$a : \frac{an}{m} :: \frac{am^2 - 2bm^2 + 2amn - bmn + an^2}{m^2}$ al quarto proporzionale, che trovasi essere $\frac{am^2n - 2bm^2n + 2amn^2 - bmn^2 + an^3}{m^3}$, e chè è il frutto conveniente alla somma esistente nel terzo anno. Se pertanto dalla pensione $b$ si sottrerà questo frutto, si avrà la porzione da detrarsi dalla somma, che trovasi essere

$\frac{bm^3 - am^2n + 2bm^2n - 2amn^2 + bmn^2 - an^3}{m^3} = b - \frac{an}{m} \times \sqrt{\frac{a + \frac{an}{m}}{a^2}}$. Si levi adesso questa quantità dalla somma del terzo anno, e si avrà $\frac{am^2 - 2bm^2 + 2amn - bmn + an^2}{m^2} - \frac{bm^3 + am^2n - 2bm^2n + 2amn^2 - bmn^2 + an^3}{m^3} =$

$\frac{am^3 - 3bm^3 + 3am^2n - 3bm^2n + 3amn^2 - bmn^2 + an^3}{m^3}$, che è la somma corrispondente al quarto anno. Per avere il frutto a questa somma conveniente si faccia $a : \frac{an}{m} :: \frac{am^3 - 3bm^3 + 3am^2n - 3bm^2n + 3amn^2 - bmn^2 + an^3}{m^3}$ al quarto proporzionale, che è $\frac{am^3n - 3bm^3n + 3am^2n^2 - 3bm^2n^2 + 3amn^3 - bmn^3 + an^4}{m^4}$ frutto cercato. Ora per avere la porzione da detrarsi dalla somma si levi questo frutto dalla pensione $b$, e si avrà

$\frac{bm^4 - am^3n + 3bm^3n - 3am^2n^2 + 3bm^2n^2 - 3amn^3 + bmn^3 - an^4}{m^4} =$

$b - \frac{an}{m} \times \sqrt{\frac{a + \frac{an}{m}}{a^3}}$. Collo stesso metodo proseguendo l'operazione si troverà, che siccome la porzione, di cui devesi diminuire la somma $a$ alla fine del primo anno è $b - \frac{an}{m}$; la quantità di cui devesi diminuire la somma corrispondente al secondo anno è $b - \frac{an}{m} \times \sqrt{\frac{a - \frac{an}{m}}{a}}$; pel terzo anno è $b - \frac{an}{m} \times \sqrt{\frac{a - \frac{an}{m}}{a^2}}$; pel quarto è

$b -$

$\sqrt[3]{b-\frac{an}{m}\times\frac{a-\frac{an}{m}}{a^3}}$ ; così pel quinto è $\sqrt[4]{b-\frac{an}{m}\times\frac{a-\frac{an}{m}}{a^4}}$ ; pel ſeſto è $\sqrt[5]{b-\frac{an}{m}\times\frac{a-\frac{an}{m}}{a^5}}$ ec., con che ſi vede che le diminuzioni da farſi ſucceſſivamente alla ſomma corriſpondente a ciaſcun anno ſtanno fra loro in progreſſione geometrica aſcendente, e reciprocamente le diminuzioni della ſomma ſtanno in progreſſione geometrica decreſcente. Quindi è, che la data ſomma $a$ ſi eſtinguerà preciſamente in tanti anni quanti ſono i termini di queſta trovata progreſſione, o ſia quanti ſono i pagamenti da farſi, che devono uguagliare la ſomma $a$. Se pertanto l'incognito numero degli anni, o ſia de' pagamenti, ſi dirà $= x$, la ſomma $a$ ſarà uguale alla ſomma dei termini della predetta progreſſione, di cui, come appariſce dai precedenti termini, il primo termine è $b-\frac{an}{m}$, e l'eſponente è $\frac{a+\frac{an}{m}}{a}$. Queſta ſomma poi ſi avrà facilmente mediante la formola $s=\frac{am^b-a}{m-1}$ trovata al numero 758, con ſoſtituirvi $b-\frac{an}{m}$ in luogo di $a$; $x$ in vece di $b$; ed $\frac{a+\frac{an}{m}}{a}$ in luogo di $m$, per mezzo delle quali ſoſtituzioni eſſa ſi cambia in

$$\frac{\sqrt[x]{b-\frac{an}{m}\times\frac{a+\frac{an}{m}}{a^x}}-b+\frac{an}{m}}{\frac{a+\frac{an}{m}}{a}-1},$$

che è uguale alla ſeguente

$$\frac{\sqrt[x]{b-\frac{an}{m}}\times\sqrt[x]{a+\frac{an}{m}}-a^xb+\frac{na^{x+1}}{m}}{\frac{a^xn}{m}}$$

o ſia

$$\frac{\sqrt[x]{bm-an}\times\sqrt[x]{a+\frac{an}{m}}-a^xbm+na^{x+1}}{a^xn}.$$

Ora queſta quantità, che è là ſomma

del-

della ritrovata progreſſione, deve eſſere uguale ad $a$, per lo che ſi ha l'equazione

$$\frac{\sqrt[x]{bm - an} \times \sqrt[x]{a + \frac{an}{m}} - a^x bm + na^{x+1}}{a^x n} = a$$ dalla quale ſi ricava

$$\sqrt[x]{bm - an} \times \frac{\sqrt[x]{a + \frac{an}{m}}}{a^x} = bm$$ con liberarla dal denominatore $a^x n$, con togliere i due termini $na^{x+1}$, $-na^{x+1}$, che ſi elidono, e con liberare il termine $a^x bm$ dal fattore $a^x$. Poichè nell'equazione trovata l'incognita $x$ tiene luogo di eſponente, perciò a fine di riſolverla è d'uopo ricorrere ai logaritmi: Prevalendoſi adunque delle ſpiegate trasformazioni logaritmiche, l'equazione trovata ſi cambierà nella ſeguente $x\, l.a + \frac{an}{m} + l.\sqrt{bm - an} - x\, l.\, a = l.\, bm$, o ſia

$$x \times l.\, a + \frac{an}{m} - l.\, a = l.\, bm - l.\sqrt{bm - an}$$, e però $x =$

$$\frac{l.\, bm - l.\sqrt{bm - an}}{l.\, a + \frac{an}{m} - l.\, a}$$. Ed ecco ritrovato il ricercato numero $x$ degli anni, in cui ſi eſtinguerà la propoſta ſomma $a$, o ſia ecco ritrovato il numero de'pagamenti da farſi.

785. Se non ſi foſſe cercato il numero de'pagamenti da farſi, ma ſi aveſſe dovuto trovare a che ſomma monterà il primo de'pagamenti uguali, dalla determinazione del quale reſtano determinati ancora gli altri, in tal caſo ſarebbe fiſſato il numero degli anni, e però de'pagamenti, onde la $x$ ſarebbe quantità cognita, e l'incognita diverrebbe la $b$, il di cui valore ſi otterrà mediante la trovata equazione $\sqrt[x]{bm - an} \times \frac{\sqrt[x]{a + \frac{an}{m}}}{a^x} = bm$ così: Queſta equazione è uguale a queſt'altra

$$\sqrt{bm} \times \frac{\sqrt[x]{a + \frac{an}{m}}}{a^x} - bm = an \times \frac{\sqrt[x]{a + \frac{an}{m}}}{a^x}$$, conſeguentemente $b =$

$$\frac{an \times \sqrt[x]{a+\frac{an}{m}}}{m \times \sqrt[x]{a+\frac{an}{m}} - m} = \frac{\sqrt[x]{an \times a+\frac{an}{m}}}{\sqrt[x]{a+\frac{an}{m}} - ma} = \frac{an \times \sqrt[x]{am+an}}{\sqrt[x]{am+an} - m^2a}.$$

Istessamente si potranno trovare i valori dell' altre quantità $a$, $m$, $n$, come si è fatto al num. 758. mediante l'equazione $b = \frac{an \times \sqrt[x]{am+an}}{m \times \sqrt[x]{am+an} - m^2a}$.

786. Se la data somma $a$ non si esaurisse in un numero preciso d' anni, ma vi si richiedesse di più una porzione d'anno, lo che costerà dal ritrovarsi pel valore di $x$ un numero intero più una frazione, in tal caso si regoli nel modo praticato al num. 782. Ommetto di fare l'applicazione di queste soluzioni generali al caso particolare, perchè ciò non involve difficolta alcuna.

## ARTICOLO III.

### *Delle formole ecumeniche risguardanti i numeri figurati.*

787. SUpposte le dottrine esposte al Capo VII. del I. Tomo, comincierò dalla formola con cui si ottiene un qualsivoglia cercato numero poligono, di cui sia dato il lato, e il numero degli angoli, Sia $= x$ il cercato numero poligono; il dato numero degli angoli $= m$, il lato $= n$; sarà ( pel num. 1283. del I. Tomo)

$$\frac{1+\sqrt{m-2 \times n-1}+1}{2} \times n$$

788. Giusta l'Articolo IV. del Capo VII. del I. Tomo si ha la formola generale, la quale dà un qualunque numero piramidale di qualsivoglia ordine nel primo genere. Il piramidale cercato sia $= x$; il numero esprimente il posto di quello piramidale sia $= m$, e l' ordine di tale piramidale sia $= n$; la formola sarà

$m \times \frac{\sqrt{m+1} \times \sqrt{m+2} \times \sqrt{m+3} \ldots \times \sqrt{m+n}}{2. \quad 3. \quad 4. \quad n+1} = x$. Poichè un qualsivoglia piramidale di un qualunque ordine, il di cui posto sia $= m$ è uguale alla somma di un numero $m$ di piramidali dell' ordine prossimamente inferiore, quindi è, che questa stessa formola può servire per trovare la somma di un numero $m$ di piramidali dell' ordine $n$, se non che l' ultimo termine deve essere $\frac{m+n+1}{n+2}$, e però la formola sarà $m \times \frac{\sqrt{m+1} \times \sqrt{m+2} \ldots \times \sqrt{m+n+1}}{2. \quad 3. \quad n+2} = o$

789. Essendo $= a$ il genere de' piramidali da sommarsi; il loro ordine $= n$, il numero de' piramidali da sommarsi $= m$, la somma cercata $= x$, la formola che da-

darà questa somma sarà ( pel num. 1307. del I. Tomo )

$$x = \overline{a-1} \times \frac{\overline{n-1} \times \overline{m} \times \overline{m+1} \ldots \times \overline{m+n}}{2. \quad 3. \quad n+2} + m \times \frac{\overline{m+1} \times \overline{m+2} \ldots \times \overline{m+n+1}}{2. \quad 3. \quad n+2}.$$

790. Finora ho considerati i numeri figurati, le di cui serie generatrici cominciano dall' unità: ora li prenderò a considerare in ipotesi, che le loro serie generatrici non comincino dall unità; e primieramente darò la formola generale inserviente a trovare la somma di un proposto numero di genitori di un qualsivoglia genere, de' quali sia dato il primo termine. La somma cercata sia uguale ad $x$, il genere de' genitori da sommarsi $= a$, il loro primo termine $= b$: il loro numero $= m$, e l'ordine $= n$; sarà ( pel num. 1317. del I. Tomo ) $x = \overline{b-1} \times m +$

$$\overline{a-1} \times \overline{m-1} \times \frac{\overline{m} \times \overline{m+1} \ldots \times \overline{m+n}}{2. \quad 3. \quad n+2} + m \times \frac{\overline{m+1} \times \overline{m+2} \ldots \times \overline{m+n+1}}{2. \quad 3. \quad n+2}.$$

791. Essendo dato il genere $= a$, e l'ordine $= n$ di un numero $= m$ di piramidali, de' quali il primo termine sia $= b$, si avrà (giusta il num. 1327 del I. Tomo) la formola generale, che ne esibisce la somma $= x$, che è la seguente

$$x = \overline{b-1} \times m \times \frac{\overline{m+1} \ldots \times \overline{m+n}}{2. \quad n+1} + \overline{a-1} \times \overline{m-1} \times \frac{\overline{m} \times \overline{m+1} \ldots \times \overline{m+n}}{2. \quad 3. \quad n+2} +$$

$$m \times \frac{\overline{m+1} \times \overline{m+2} \ldots \times \overline{m+n+1}}{2. \quad 3. \quad n+2}.$$

792. Giacchè nel I. Tomo all' Articolo VII. del Capo VII. ho aggiunto alla dottrina de' numeri figurati la maniera di trovare la somma delle potestà, che si possono formare dai termini della serie naturale, ne soggiungerò anche quì per compimento le formole generali, estendendole alla somma di qualsivoglia potestà, quantunque per altro ciò s' inchiuda in quello, che dirò al num. 930, ove le formole risultano più brevi.

793. Devonsi pertanto distinguere le potestà pari dalle impari. Comincierò dal modo di determinare la somma delle potestà impari, quale si ha con sommare tanti ordini di figurati del primo genere, quante unità contiene la metà dell' esponente ( che suppongo $= m$ ) delle potestà da sommarsi accresciuto di una unità, onde il numero degli ordini da sommarsi sarà $\frac{m+1}{2}$. Quali poi debbano essere gli ordini da sommarsi, e quale il numero de' loro termini, eccolo. Sia $n$ il numero delle potestà da sommarsi: Per avere la somma dei cubi si dovrà sommare un numero $= n$ di genitori, e un numero $= n-1$ di piramidali secondi: Per avere la somma delle quinte potestà, bisognerà sommare un numero $= n$ di genitori, un numero $= n-1$ di piramidali secondi, e un numero $= n-2$ di piramidali quarti. Per le settime potestà si dovrà sommare un numero $= n$ di genitori, un numero $= n-1$ di piramidali secondi, un numero $= n-2$ di piramidali quarti, e un numero $= n-3$ di piramidali sesti: Così per le none potestà si dovrà sommare un numero $= n$ di genitori, un numero $= n-1$ di piramidali secondi, un numero $= n-2$ di piramidali quarti, un numero $= n-3$ di piramidali sesti, e un numero $= n-4$ di piramidali ottavi, e così successivamente collo stesso ordine per le altre potestà. La somma in oltre di ciascun ordine deve avere un fattore particolare, il quale varia secondo

che

che variano le potestà da sommarsi. Per determinare quale debba essere il fattore corrispondente a ciascun ordine mi appiglio alla seguente generale espressione, in cui $z$, $y$, $x$, $u$, $t$, $s$ sono i fattori cercari da determinarsi, come farò or ora; $m$ esprime l' esponente delle potestà da sommarsi; i numeri posti in A sono i termini della serie naturale delle cui potestà $m$ cercasi la somma; i numeri posti in B sono i genitori del primo genere; i numeri che moltiplicano la $z$ sono i piramidali secondi; i numeri che moltiplicano la $y$ sono i piramidali quarti; i numeri che moltiplicano la $x$ sono i piramidali sesti; i numeri che moltiplicano la $u$ sono i piramidali ottavi ec.

A B

$1''' = 1$
$2''' = 2 + 1 \times z$
$3''' = 3 + 4 \times z + 1 \times y$
$4''' = 4 + 10 \times z + 6 \times y + 1 \times x$
$5''' = 5 + 20 \times z + 21 \times y + 8 \times x + 1 \times u$
$6''' = 6 + 35 \times z + 56 \times y + 36 \times x + 10 \times u + 1 \times t$
$7''' = 7 + 56 \times z + 126 \times y + 120 \times x + 55 \times u + 12 \times t + 1 \times s$
$8''' =$ ec.

794. Veniamo adesso a determinare il valore di questi fattori $z$, $y$, $x$, $u$ ec. Poichè l'esponente $m$ è dato, dalla seconda equazione $2''' = 2 + 1 \times z$ si ha $z = 2''' - 2$, che suppongo $= P$, il qual valore posto nella terza equazione la cambia in $3''' = 3 + 4P + y$, dalla quale si ottiene il valore di $y$, che è $y = 3''' - 3 - 4P$, che faccio $= Q$; e nella quarta equazione sostituendosi questi valori P, Q in luogo di $z$, $y$, ella diventa $4''' = 4 + 10P + 6Q + x$, dalla quale si ha il valore di $x$, che è $x = 4''' - 4 - 10P - 6Q$, che suppongo $= R$. Questi valori di P, Q, R si pongano in vece di $z$, $y$, $x$ nella quinta equazione, e si avrà $5''' = 5 + 20P + 21Q + 8R + u$, e però $u = 5''' - 5 - 20P - 21Q - 8R$; $6''' =$ ec.

795. Se in vece di P, Q, R ec. si riterranno i proprj valori, si avrà

$z = 2''' - 2$
$y = 3''' - 3 - 4 \times 2''' + 8$
$x = 4''' - 4 - 10 \times 2''' + 20 - 6 \times 3''' + 18 + 24 \times 2''' - 48$
$u = 5''' - 5 - 20 \times 2''' + 40 - 21 \times 3''' + 63 + 84 \times 2''' - 168 - 8 \times 4''' + 32 + 80 \times 2''' - 160 + 48 \times 3''' - 144 - 192 \times 2''' + 384$
$t =$ ec.

Cioè per la terza potestà sarà $z = 6$. Per la quinta potestà sarà $z = 30$; $y = 120$. Per la settima potestà sarà $z = 126$; $y = 1680$; $x = 5040$. Per la nona poresta sarà $z = 510$; $y = 16640$; $x = 157200$; $u = 335880$. Per l' undecima potestà ec.

796. Per lo che supposto $= n$ il numero de' termini della serie naturale, delle cui potestà terze si vuol la somma, ella verrà esibita dalla seguente formola gene-

rale $\frac{n \times \overline{n+1}}{1 \times 2} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 6$. La formola della ſomma delle quinte poteſtà di un numero $n$ di termini della ſerie naturale è

$$\frac{n \times \overline{n+1}}{1 \times 2} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 30 +$$

$$\frac{\overline{n-1} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times 120.$$

La formola generale della ſomma delle ſettime poteſtà di un numero $n$ di termini della ſerie naturale è

$$\frac{n \times \overline{n+1}}{1 \times 2} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 126 +$$

$$\frac{\overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times 1680 +$$

$$\frac{\overline{n-3} \times \overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3} \times \overline{n+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} \times 5040$$

Collo ſteſſo metodo ſi otterranno le formole generali eſprimenti le ſomme delle poteſtà ſuperiori di un dato numero $n$ di termini della ſerie naturale.

797. Si debba per Eſempio trovare la ſomma delle ſettime poteſtà de' primi cento numeri della ſerie naturale. Nella precedente terza formola ſi ſoſtituiſca 100 in luogo di $n$, e ſi avrà $\frac{100 \times \overline{100+1}}{1 \times 2} + \frac{\overline{100-1} \times 100 \times \overline{100+1} \times \overline{100+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 126 +$

$$\frac{\overline{100-2} \times \overline{100-1} \times 100 \times \overline{100+1} \times \overline{100+2} \times \overline{100+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times 1680 +$$

$$\frac{\overline{100-3} \times \overline{100-2} \times \overline{100-1} \times 100 \times \overline{100+1} \times \overline{100+2} \times \overline{100+3} \times \overline{100+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} \times 5040$$

$= 5050 + 53544650 + 24021317624 00 + 12981806369 5200 = 13005833041671 00$; e queſto è il numero, che eſprime la ſomma cercata delle poteſtà ſettime de' primi cento numeri della ſerie naturale.

798. Paſſiamo adeſſo alla maniera di determinare la ſomma di un dato numero di termini della ſerie naturale elevati a poteſtà pari. Queſta ſomma ſi otterrà con prendere la ſomma di tanti ordini di figurati del ſecondo genere, quanti ne eſprime $\frac{m}{2}$ ($m$ è l'eſponente delle poteſtà). Ecco poi quali eſſer debbano queſti ordini da ſommarſi, e quale il numero de' termini da ſommarſi in ciaſcun ordine. Sia $= n$ il nu-

numero delle potestà da sommarsi: Per avere la somma de' quadrati bisognerà sommare un numero $n$ di piramidali primi del secondo genere. Per avere la somma delle quarte potestà si dovrà sommare un numero $=n$ di piramidali primi, e un numero $=n-1$ di piramidali terzi. Per le potestà seste si dovrà sommare un numero $=n$ di piramidali primi, un numero $=n-1$ di piramidali terzi, e un numero $=n-2$ di piramidali quinti. Per le potestà ottave bisognerà sommare un numero $=n$ di piramidali primi, un numero $=n-1$ di piramidali terzi, un numero $=n-2$ di piramidali quinti, e un numero $=n-3$ di piramidali settimi ec.. La somma poi di ciascun ordine deve avere il suo fattore particolare, il quale varia secondo che variano le potestà. Il modo di determinare questi fattori è simile a quello del num. 794. Siano $z$, $y$, $x$, $u$, $t$ i fattori, che devonsi determinare. Sia $m$ l'esponente delle potestà da sommarsi. I numeri posti in A sono i termini della serie naturale, delle cui potestà $m$ cercati la somma. I numeri posti in B sono i piramidali primi del secondo genere; i numeri che moltiplicano la $z$, sono i piramidali terzi; quelli che moltiplicano la $y$ sono i piramidali quinti; quelli che moltiplicano la $x$ sono i piramidali settimi ec.

| A | B |
|---|---|
| $1^m =$ | $1$ |
| $2^m =$ | $4 + 1 \times z$ |
| $3^m =$ | $9 + 6 \times z + 1 \times y$ |
| $4^m =$ | $16 + 20 \times z + 8 \times y + 1 \times x$ |
| $5^m =$ | $25 + 50 \times z + 35 \times y + 10 \times x + 1 \times u$ |
| $6^m =$ | $36 + 105 \times z + 112 \times y + 54 \times x + 12 \times u + 1 \times t.$ |
| $7^m =$ | ec. |

799. Il valore di $z$ si ricava dalla seconda equazione ed è $z = 2^m - 4$, che faccio $= P$. Sostituisco questo valore di P nella terza equazione, e ne ho $3^m = 9 + 6P + y$, e però $y = 3^m - 9 - 6P$, che suppongo $= Q$. Sostituisco nella quarta equazione questi valori P, Q in luogo di $z$, $y$, e mi viene $4^m = 16 + 20P + 8Q + x$; quindi $x = 4^m - 16 - 20P - 8Q$; $5^m =$ ec.. Che se in vece di P, Q ec. si rimetteranno i proprj valori, si avrà

$$z = 2^m - 4$$
$$y = 3^m - 9 - 6 \times 2^m + 24$$
$$x = 4^m - 16 - 20 \times 2^m + 80 - 8 \times 3^m + 72 + 48 \times 2^m - 192$$
$$u = 5^m - 25 - 50 \times 2^m + 200 - 35 \times 3^m + 315 + 210 \times 2^m - 840 - 10 \times 4^m + 160 + 200 \times 2^m - 800 + 80 \times 3^m - 720 - 480 \times 2^m + 1920$$
$$t = \text{ec.}$$

Cioè per la potestà quarta sarà $z = 12$. Per la sesta potestà sarà $z = 60$; $y = 360$. Per la potestà ottava sarà $z = 252$; $y = 5040$; $x = 20160$. Per la decima ec.

800. Supposto pertanto $= n$ il numero de' termini della serie naturale, delle cui potestà seconde si vuole la somma, la formola generale, da cui essa verrà esibita, sarà

farà $\frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1}}{1 \times 2 \times 3}$.

La formola generale eſprimente la ſomma delle poteſtà quarte ſarà

$$\frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1}}{1 \times 2 \times 3} +$$
$$\frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 12.$$

La formola generale per la ſomma delle ſeſte poteſtà è

$$\frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1}}{1 \times 2 \times 3} +$$
$$\frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 60$$
$$+ \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3} \times \overline{n+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} \times 360 +$$
$$\frac{\overline{n-3} \times \overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} \times 360.$$

La formola per la ſomma delle ottave poteſtà farà

$$\frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3} + \frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1}}{1 \times 2 \times 3} +$$
$$\frac{\overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 252 +$$
$$\frac{\overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3} \times \overline{n+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} \times 5040 +$$
$$\frac{\overline{n-3} \times \overline{n-2} \times \overline{n-1} \times n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} \times 5040 +$$

$$\frac{n-3\,\overline{n-2}\,\overline{n-1}\,n\,\overline{n+1}\,\overline{n+2}\,\overline{n+3}\,\overline{n+4}\,\overline{n+5}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}\times 20160+$$

$$\frac{n-4\,\overline{n-3}\,\overline{n-2}\,\overline{n-1}\,n\,\overline{n+1}\,\overline{n+2}\,\overline{n+3}\,\overline{n+4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}\times 20160.$$

801. Nella ſteſſa maniera ſi troveranno le formole generali eſprimenti la ſomma delle poteſtà ſuperiori.

802. Si debba per eſempio ritrovare la ſomma delle ottave poteſtà de' primi dieci numeri della ſerie naturale. Nella precedente ultima formola ſi ſoſtituiſca il numero 10 in luogo di $n$, e ſi avrà

$$\frac{10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}}{1\times 2\times 3}+\frac{\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}}{1\times 2\times 3}+$$

$$\frac{\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}\,\overline{10+3}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\times 252+$$

$$\frac{\overline{10-2}\,\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}\,\overline{10+3}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\times 252+$$

$$\frac{\overline{10-2}\,\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}\,\overline{10+3}\,\overline{10+4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}\times 5040+$$

$$\frac{\overline{10-3}\,\overline{10-2}\,\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}\,\overline{10+3}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}\times 5040$$

$$+\frac{\overline{10-3}\,\overline{10-2}\,\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}\,\overline{10+3}\,\overline{10+4}\,\overline{10+5}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}\times 20160+$$

$$\frac{\overline{10-4}\,\overline{10-3}\,\overline{10-2}\,\overline{10-1}\,10\,\overline{10+1}\,\overline{10+2}\,\overline{10+3}\,\overline{10+4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}\times 20160$$

$=385+523908+25945920+141261120=167731333$, che è la ſomma cercata.

803. Qualora ſi dovranno ſommare le poteſtà d'alcuni termini della ſerie naturale non principianti dall'unità, ſi dovrà prima trovare la ſomma di tutti i numeri della ſerie naturale elevati alla poteſtà propoſta, i quali comincino dall'unità, e vadano a terminare coll'ultimo de' termini dati, indi biſognerà trovare la ſomma delle ſteſſe poteſta dei numeri naturali principianti dall'unità, e terminanti nel primo eſcluſivamente de' termini propoſti, lo che fatto, col ſottrarſi la ſeconda ſomma dalla prima, ſi avrà per reſiduo la ſomma cercata: Come volendoſi la ſomma delle poteſta

ſtà $m$ de' numeri naturali principiando dal 13 fino al 47 incluſivamente, biſognerà trovare la ſomma delle poteſtà $m$ de' numeri naturali da 1 fino a 47, poſcia da queſta ſomma ſottrarre la ſomma delle poteſtà $m$ da 1 fino a 13 eſcluſivamente, e ciò che ne verrà ſarà la ſomma cercata.

## ARTICOLO IV.

*Delle formole generali per le combinazioni, e permutazioni.*

804. Siccome pel num. 1357. del I. Tomo eſſendo $=n$ il numero delle coſe da combinarſi ſecondo l'eſponente 2, la formola generale eſprimente il numero degli ambi è $\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 2}$, e la formola generale, che dà il numero dei terni è (pel num. 1365. del I. Tomo) $\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 3}$; ſiccome è $\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3\times 4}$ la formola generale, che dà il numero delle quaderne; così ſe ſi dovrà combinare un numero di coſe $=n$ ſecondo l'eſponente $m$, la formola generale, che darà il numero di tutte le combinazioni ſarà $\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\ldots\ldots\times\overline{n-m+1}.}{1\times 2\times 3\times 4\ldots\ldots m}$

Queſta formola riſguarda le combinazioni in caſo, che le coſe combinate non cambino poſto, ma ſe li vorrà, che in ciaſcuna combinazione le coſe variino di ſito, ſiccome eſſe poſſono variare ſecondo il numero $1\times2\times3\times4\ldots\ldots m$, quindi è, che per avere le combinazioni variate biſognerà moltiplicare per queſto numero $1\times2\times3\ldots m$ ($m$ è l'eſponente) la formola delle combinazioni non variate, conſeguentemente la formola delle combinazioni variate ſarà

$n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\ldots\ldots n-m+1.$

805. Se poi ſi vorrà la formola generale eſprimente il numero di tutte le combinazioni poſſibili ſecondo ciaſcun eſponente di un dato numero $n$ di coſe, eſſa ſarà (pel num. 1371. del I. Tomo) $\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 2}+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 3}+$

$$\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}$$

$$+\ldots\ldots\ldots

combinarſi, e l' eſponente eſſendo 2, la formola generale, che dà il numero delle loro combinazioni è (pel num. 1388. del I. Tomo) $\frac{n\overline{\times n+1}}{1\times 2}$; ſe l' eſponente ſarà 3, la formola generale ſarà (pel num. 1390. del I. Tomo) $\frac{n\overline{\times n+1}\overline{\times n+2}}{1\times 2\times 3}$; ſarà $\frac{n\overline{\times n+1}\overline{\times n+2}\overline{\times n+3}}{1\times 2\times 3\times 4}$ ſe l' eſponente ſarà 4 ec.; e però eſſendo l' eſponente $=m$, la formola ecumenica, che darà il numero di tutte le combinazioni, ſarà $\frac{n\overline{\times n+1}\overline{\times n+2}\ldots\ldots\overline{\times n+m-1}}{1\times 2\times 3\ldots\ldots m}$. E qui ſi noti, che ſe ſarà $m>n$, ſi potrà dividere la precedente formola per $n\overline{\times n+1}\overline{\times n+2}\ldots m$, con che eſſa diverrà $\frac{\overline{m+1}\times\overline{m+2}\times\overline{m+3}\ldots\ldots\overline{\times m+n-1}}{1\times 2\times 3\ldots\ldots n-1}$.

# CAPO V.

## DELLE SERIE.

### ARTICOLO I.

*Della natura, diſtinzione, e geneſi delle Serie.*

807. COL nome di ſerie non altro intendeſi, che un'unione di quantità, delle quali con una certa legge le une vanſi ſuccedendo alle altre. Se il numero di queſte quantità è finito, la ſerie diceſi finita, ſe è infinito, infinita chiamaſi la ſerie.

808. Qualunque quantità ſi può riſolvere in una ſerie non ſolo finita, ma eziandio infinita, poichè ella ſi può dividere in un numero infinito di parti riſguardantiſi con certo rapporto, ſtante che la diviſione della quantità continua (pel num. 6. del I. Tomo) non riconoſce alcun limite: Se un piede per eſempio ſi dividerà per metà, e una di queſte metà ſi dividerà di nuovo per metà, e lo ſteſſo ſi faccia, o almeno ſi concepiſca in infinito riſpetto alle ſuſſeguenti metà, ne verrà la ſeguente ſerie infinita uguale ad un piede, cioè

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}$ ec. in infinito. La quantità, da cui naſce la ſerie è il di lei vero valore.

809. In tre maniere poſſono procedere le ſerie, o con termini tutti uguali affetti da ſegni alternanti, come queſta $1-1+1-1+1-1$ ec., e le ſerie di queſta fatta chiamanſi paralelle, le quali in qualunque termine diſtano ſempre egualmente dalla quantità, dalla quale naſcono. Di fatto la ſerie precedente (come or ora vedremo) naſce da $\frac{1}{2}$: Ora ſe di queſta ſerie ſi prenderà un numero pari di termini, il loro riſultato ſarà $=0$, (come coſta dall'alternativa de' ſegni) il quale diſta per $\frac{1}{2}$ dal vero valore; ſe ſi prenderà un numero impari di termini, il loro riſultato ſarà $=1$, che parimente diſta per $\frac{1}{2}$ dal vero valore. In ſecondo luogo poſſono procedere le ſerie con termini continuamente creſcenti, e queſte ſerie poichè ſi vanno ſempre più ſcoſtando dal vero valore, ſi chiamano divergenti. Finalmente le ſerie, che procedono con termini decreſcenti all'infinito, ſi dicono convergenti, perchè ſi vanno infinitamente approſſimando al vero valore, e tale è la precedente ſerie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ec. all'infinito, la quale ſi va continuamente accoſtando al valore 1, e allora ſoltanto vi diviene uguale, quando è continuata in infinito. Le ſerie ora procedono con alternanti termini poſitivi, e negativi; ora con termini tut-

ti

ti positivi, ora con infinite negazioni, secondo la varia posizione del primo termine.

810. Nelle serie decrescenti all'infinito l'ultimo termine infinitesimo diventa minore di qualunque quantità assegnabile, conseguentemente svanisce, e diventa uguale a zero, onde è che per la di lui addizione nè si accresce l'unità, nè si diminuisce per la di lui sottrazione.

811. Tre sono i generi principali, ne' quali dividonsi le serie: Al primo genere spettano le serie Aritmetiche; al secondo le Geometriche; al terzo le Aritmetico-Geometriche, le quali si compongono da serie aritmetiche, e geometriche. Nel primo genere hanno luogo non solo tutte le progressioni aritmetiche, ma eziandio tutte le serie, che hanno le differenze $n^{esime}$ costanti (per $n$ intendasi qualunque numero), delle quali ho parlato ai num. 762, 808, 844, 866, 868, e 1335 del I. Tomo, e tali pure sono le serie, mediante le quali ho dato il modo all'Articolo IX. del Cap. III. di ritrovare le radici di qualsivoglia equazione. Tutte le progressioni aritmetiche si chiamano serie aritmetiche di primo ordine; tutte le potenze seconde di una quantità variabile $m$, cioè a dire la serie, che nasce da $m^2$, o pure da $A+Cm^2$ (poichè non si muta la serie con moltiplicare tutti i di lei termini, e nel tempo stesso aggiungerci una quantità costante), dicesi serie aritmetica di secondo ordine; e perchè (giusta il num. 1005. del I. Tomo) col sommarsi insieme i termini di due progressioni aritmetiche ne viene un'altra progressione aritmetica, però la serie aritmetica di secondo ordine sarà rappresentata tanto da $A+Cm^2$, come da $A+Bm+Cm^2$, in cui $Bm$ rappresenta una progressione aritmetica: Parimente le terze potenze di $m$ formano una serie aritmetica di terzo ordine, che però sarà essa rappresentata da $m^3$, o pure da $A+Bm+Cm^2+Dm^1$; e generalmente la formola $A+Bm+Cm^2+Dm^1+Em^4 \ldots . +Vm^n$ rappresenta le serie di tutti gli ordini da 1 fino ad $n$, cioè i due primi termini $A+Bm$ rappresentano le serie aritmetiche di primo ordine, i tre primi quelle del secondo, i quattro primi quelle del terzo ec., le quali cose costano dall' Articolo IX. del Capo III., dove si può vedere, che qualsivoglia equazione rappresenta una serie aritmetica di ordine corrispondente al grado dell'equazione. Queste serie aritmetiche di diverso ordine nascono ancora dal moltiplicarsi rispettivamente i termini di più progressioni aritmetiche, come costa dai num. 1006, 1007 del I. Tomo. Al secondo genere appartengono non solo tutte le progressioni geometriche indicate da $P^m$, o pure da $AP^m$, che chiamansi serie geometriche di primo ordine, ma eziandio le serie geometriche, che nascono dal sommarsi ovvero dal sottrarsi rispettivamente i termini di due, tre, quattro ec. progressioni geometriche, delle quali la formola esprimente sarà $AP^m \pm BQ^m \pm CR^m \pm DS^m \pm$ ec.. Se la serie risulterà dai due primi termini $AP^m \pm BQ^m$, essa sarà di secondo ordine; sarà del terzo ordine, se nascerà dai tre primi termini ec.. Così la seguente serie (H) è del secondo ordine, la serie (I) del terzo, e la serie (K) del quarto.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Progref. geom. | 1. | 2. | 4. | 8. | 16. | 32. | 64. | ec. |
| | 1. | 3. | 9. | 27. | 81. | 243. | 729. | ec. |
| (H) | 2. | 5. | 13. | 35. | 97. | 275. | 793. | ec. |
| Progref. geom. | 1. | 4. | 16. | 64. | 256. | 1024. | ec. | |
| | 1. | 6. | 36. | 216. | 1296. | 7776. | ec. | |
| | 1. | 5. | 25. | 125. | 625. | 3125. | ec. | |
| (I) | 3. | 15. | 77. | 405. | 2177. | 11925. | ec. | |
| Progref. geom. | 1. | 3. | 9. | 27. | 81. | 243. | ec. | |
| | 1. | 5. | 25. | 125. | 625. | 3125. | ec. | |
| | 1. | 7. | 49. | 343. | 2401. | 16807. | ec. | |
| | 1. | 2. | 4. | 8. | 16. | 32. | ec. | |
| (K) | 4. | 17. | 87. | 503. | 3123. | 20207. | ec. | |

Al terzo genere ſi riducono tutte le ſerie, che in qualunque maniera ſi poſſono comporre da ſerie aritmetiche, e geometriche, come ſarebbe dal moltiplicarſi riſpettivamente i termini di una ſerie aritmetica di qualunque ordine eſſa ſia per i termini di una progreſſione geometrica. Queſte ſerie poi non meno, che le altre ſi diſtinguono in ordini, e l' ordine di ciaſcuna viene denominato dalla ſomma degli eſponenti degli ordini delle ſerie componenti.

812 Tutte le ſerie, i di cui termini riſultano da uno, due, tre ec. termini precedenti moltiplicati in date quantità coſtanti, ſi chiamano ſerie ricorrenti. Il loro ordine ſi deſume dal numero de' termini precedenti, da' quali proviene ciaſcuno de' loro termini: Se ciaſcun termine di una propoſta ſerie riſulterà dal termine precedente, eſſa ſarà una ſerie ricorrente del primo ordine, ſe da due termini precedenti, ſarà del ſecondo ordine, ſe da tre, del terzo ec. Tutte le progreſſioni geometriche, nelle quali ciaſcun termine riſulta dal ſuo precedente moltiplicato nel denominatore della progreſſione, ſono ſerie ricorrenti del primo ordine, e le altre ſerie geometriche di qualtivoglia ordine ſono ſerie ricorrenti dello ſteſſo ordine: Le progreſſioni poi aritmetiche ſono ſerie ricorrenti del ſecondo ordine, poichè in queſte progreſſioni qualtivoglia termine riſulta dal doppio dell' ultimo precedente termine meno il termine penultimo (pel num. 409 del I. Tomo); e le altre ſerie aritmetiche d' ordine $n$ danno una ſerie ricorrente d' ordine $n+1$. Conſeguentemente ſono pure ſerie ricorrenti le ſerie, che appartengono al terzo genere. Ecco due eſempi di due ſerie ricorrenti, la prima (A) di ſecondo ordine, della quale ciaſcun termine riſulta dalla ſomma de' due precedenti, il primo moltiplicato in 3, e il ſecondo in 2. La ſeconda (B) di terzo ordine, di cui ciaſcun termine riſulta dai tre precedenti, il primo moltiplicato in —1, il ſecondo in —3, il terzo in 5

(A)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (A) | 1. | 1. | 5. | 13. | 41. | 121. | 365. | ec. |
| (B) | 0. | 1. | 3. | 12. | 50. | 211. | 893. | ec. |

I primi termini della ſerie, che ſervono a ritrovare il ſuſſeguente, ſi prendono ad arbitrio.

813. Si oſſervi che una ſteſſa ſerie ricorrente ſi può riferire a diverſo ordine, in quanto che ciaſcun di lei termine può riſultare da diverſo numero di termini precedenti: Per eſempio la ſerie 1. 2. 4. 8. 16. 32. ec. ſarà di primo ordine ſe ſi conſidererà, che ciaſcun di lei termine naſca dal ſuo precedente moltiplicato in 2; ma ella ſarà di ſecondo ordine ſe i di lei termini ſi riguarderanno come riſultante ognuno dai due immediati termini precedenti, il primo moltiplicato in 3, e il ſecondo in $\frac{1}{2}$, così che eſſa ſia 1. 2. $1\times 3+2\times\frac{1}{2}$. $2\times 3+4\times\frac{1}{2}$. $4\times 3+8\times\frac{1}{2}$ ec.

814. In tre maniere ſoglionſi generare nel calcolo le ſerie: O dalle potenze di un binomio, o dalle frazioni, o dalle quantità radicali. Ne tratterò per ordine, e intanto comincierò dalla prima.

815. Debbati inalzare alla poteſtà $m$ il binomio $1\pm a$ a fine di avere ciò, che viene eſpreſſo da $\overline{1\pm a}^{m}$. Per trovare ſpeditamente i termini della cercata poteſta mi prevalgo della formola Newtoniana data al numero 259, nella quale pongo 1 in luogo di P, e $\pm a$ in vece di Q, fatte le quali ſoſtituzioni mi naſce la ſeguente ſerie (A), che vedeſi corriſpondere alla formola generale data al num. 255 mediante il ſolo cambiamento di $a$ in 1, e di $b$ in $a$. Ecco la ſeconda

$$\overline{1\pm a}^{m} = (A)\,1\pm\frac{m}{1}a+\frac{m\times\overline{m-1}}{1\times 2}a^2\pm\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{1\times 2\times 3}a^3+$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{1\times 2\times 3\times 4}a^4\pm\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}a^5+\text{ec.}$$

816. Queſte ſerie (a riſerva del caſo, in cui ſia $m=\infty$, o pure $m$ eguale a un numero negativo, o a una frazione) non hanno, che un'apparenza d'infinita, e il numero de' loro termini, che è ſempre $=m+1$, reſta limitato, ſubito che viene determinato il numero $m$; che però ſe ſi ſupporrà $m=5$, la ſerie non avrà, che ſei termini, interrompendoſi eſſa nel ſettimo, che anderà a zero inſieme con tutti gli altri, a motivo che ciaſcun di loro ſarà moltiplicato in $m-5$, cioè in $5-5=0$.

817. Se nel dato binomio $1+a$ ſarà $1<a$, i termini della ſerie anderanno continuamente creſcendo, come coſta dal ſolo oſſervare la ſerie; ma ſe ſarà $1>a$, i termini anderanno decreſcendo.

818. Dovendoſi inalzare alla poteſtà $m$ il binomio $a\pm b$, poichè ſi ha $\overline{a\pm b}^{m}=a^m\times\left(1\pm\frac{b}{a}\right)^m$, perciò nella ſerie (A) del num. 815. ſi ponga $\pm\frac{b}{a}$ in luogo di $a$, indi ſi moltiplichino i termini di queſta ſerie per $a^m$, con

che

che si avrà la serie cercata $= \overline{a \pm b}^{m}$.

819. Per discendere dalla generalità al caso particolare sia nel precedente binomio $a=3$, $b=2$, $m=4$, sarà $a^m \times \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = 3^4 \times \left(1 + \frac{2}{3}\right)^4$

$= 3^4 \times 1 + \frac{8}{3} + \frac{24}{9} + \frac{32}{27} + \frac{16}{81} = 625.$

820. Fin' ora ho supposto, che l'esponente $m$ sia un numero intero, e positivo; che se egli sarà un numero intero bensì, ma negativo, la formola $\overline{a \pm b}^{-m}$ si risolverà niente di meno in una serie, la quale però sarà infinita; e nel caso solamente, che sia convergente, cioè a dire che i di lei termini vadano sempre decrescendo, si accosterà essa al vero valore di $\overline{a \pm b}^{-m}$, a cui giungerà allorchè sarà prodotta in infinito. Per inalzare adunque alla potestà $-m$ il binomio $a \pm b$, faccio $\overline{a \pm b}^{-m} = a^{-m} \times \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^{-m}$, indi nella serie (A) del num. 815 pongo $\frac{b}{a}$ in luogo di $a$, e $-m$ in vece di $m$, indi moltiplico tutti i termini della serie, che nasce, per $a^{-m}$, lo che fatto mi viene (B)

$$a^{-m} \times 1 \pm \frac{m}{1} \times \frac{b}{a} - \frac{m \times \overline{-m-1}}{1 \times 2} \times \frac{b^2}{a^2} \mp \frac{m \times \overline{-m-1} \times \overline{-m-2}}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{b^3}{a^3} \text{ ec. in infinito.}$$

821. L'esponente $m$ può essere non solo un numero intero positivo, o negativo, ma può essere eziandio un numero fratto positivo, o negativo, (del qual caso parlerò in appresso), come pure un numero irrazionale, ed anche immaginario tanto positivo, come negativo. Sia in primo luogo $m=\sqrt{3}$, e però $\overline{1+a}^{\sqrt{3}}$: Nella serie (A) del num. 815 si sostituisca $\sqrt{3}$ in luogo di $m$, e si avrà

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{1} \times a + \frac{\overline{3-\sqrt{3}}}{1 \times 2} \times a^2 - \frac{\overline{9+5\sqrt{3}}}{1 \times 2 \times 3} \times a^3 + \frac{\overline{42-24\sqrt{3}}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times a^4 \text{ ec. Essendo}$$

$\overline{1+a}^{-\sqrt{3}}$, la corrispondente serie sarebbe

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{1} \times a + \frac{\overline{3+\sqrt{3}}}{1 \times 2} \times a^2 - \frac{\overline{9-5\sqrt{3}}}{1 \times 2 \times 3} \times a^3 + \frac{\overline{42+24\sqrt{3}}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times a^4 \text{ ec.}$$

Se sarà $m = \sqrt{-3}$, o pure $m = -\sqrt{-3}$, nel primo caso la serie sarà

$$1 + \frac{\sqrt{-3}}{1} a - \frac{\overline{3-\sqrt{-3}}}{1 \times 2} \times a^2 + \frac{\overline{9-\sqrt{-3}}}{1 \times 2 \times 3} \times a^3 - \frac{\overline{24+12\sqrt{-3}}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times a^4 \text{ ec.,}$$

e nel secondo $1 - \frac{\sqrt{-3}}{1} \times a - \frac{\overline{3+\sqrt{-3}}}{1 \times 2} \times a^2 + \frac{\overline{9+\sqrt{-3}}}{1 \times 2 \times 3} \times a^3 -$

$\frac{24-12\sqrt{-3}}{1\times2\times3\times4}\times a^4$ ec. Ma per dedurre opportunamente alcune conſeguenze da queſte ſerie, prendiamo le ſerie, che naſcono dalle due quantità $\overline{1+a}^m$; $\overline{1+a}^{-m}$ conſiderate così generalmente. La ſerie, che al num. 815 ſi è trovata naſcere dalla prima è $\overline{1+a}^m = (P)\, 1 + \frac{m}{1}a + \frac{m\times\overline{m-1}}{1\times2}a^2 + \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{1\times2\times3}a^3 + \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{1\times2\times3\times4}a^4$. ec.; la ſerie, che al num. 820. ſi è trovata naſcere dalla ſeconda è $\overline{1+a}^{-m} = (Q)\, 1 - \frac{m}{1}a - \frac{m\times\overline{-m-1}}{1\times2}a^2 - \frac{m\times\overline{-m-1}\times\overline{-m-2}}{1\times2\times3}a^3 - \frac{m\times\overline{-m-1}\times\overline{-m-2}\times\overline{-m-3}}{1\times2\times3\times4}a^4$ ec., cioè col fare le attuali moltiplicazioni de' coefficienti la prima (P) è

$1 + \frac{ma}{1} + \frac{\overline{m^2-m}}{1\times2}\times a^2 + \frac{\overline{m^3-3m^2+2m}}{1\times2\times3}\times a^3 + \frac{\overline{m^4-6m^3+11m^2-6m}}{1\times2\times3\times4}\times a^4$ ec.,

e la ſeconda (Q) è $1 - \frac{ma}{1} + \frac{\overline{m^2+m}}{1\times2}\times a^2 - \frac{\overline{m^3-3m^2-2m}}{1\times2\times3}\times a^3 + \frac{\overline{m^4+6m^3+11m^2+6m}}{1\times2\times3\times4}\times a^4$ ec. Se adunque la formola data da ridurſi in ſerie ſarà la quantità compleſſa $\overline{1+a}^m + \overline{1+a}^{-m}$, ſi dovranno ridurre in ſerie le di lei due parti, come pur ora ſi è fatto, indi ſommare i corriſpondenti termini di queſte due ſerie, con che ſi avrà una ſerie, ne' di cui termini o non vi ſarà la quantità $m$, o vi ſarà elevata a poteſtà pari. Di fatto naſce la ſerie $2 + m^2a^2 - m^2a^3 + \frac{\overline{m^4+11m^2}}{12}\times a^4$ ec.: Che però, o la quantità $m$ ſia radicale, o immaginaria, nè l'una, nè l'altra comparirà nella ſerie, ma eſſa ſarà interamente, e reale, e razionale; e perchè col dividerſi i termini di queſta ſerie per 2, lo che naſce dalla ſuppoſizione di $\frac{\overline{1+a}^m + \overline{1+a}^{-m}}{2}$, ſi ha $1 + \frac{m^2a^2}{2} - \frac{m^2a^3}{2} + \frac{\overline{m^4+11m^2}}{24}\times a^4$ ec., la qual ſerie riſulta dalla ſerie (P) con levarci i termini, in cui entrano le poteſtà impari di $m$, quindi ſi vede come ſi poſſa avere immediatamente la ſerie, che naſce da $\frac{\overline{1+a}^m + \overline{1+a}^{-m}}{2}$. Se la data quantità compleſſa

ſa-

ſarà $\overline{1+a}^{m} - \overline{1+a}^{-m}$, per avere la ſerie, che da lei naſce, dovranſi ſottrarre i termini della ſerie (Q) dai termini della ſerie (P), nel qual modo ſi avrà una ſerie, i di cui termini inchiuderanno le ſole poteſtà impari di $m$, che è la ſeguente $2ma - ma^2 + \frac{\overline{m^3+2m}}{3} \times a^3 - \frac{\overline{m^3-m}}{2} \times a^4$ ec.; per lo che ſe la quantità $m$ ſarà radicale, o immaginaria, tutti i termini della ſerie ſaranno irrazionali, o immaginarj: Ma ſe la data quantità compleſſa foſſe $\frac{\overline{1+a}^{m} - \overline{1+a}^{-m}}{m}$, poichè in tal caſo biſognerebbe dividere per $m$ ciaſcun termine della ſerie, lo che la cambierebbe nella ſeguente $2a - a^2 + \frac{\overline{m+2}}{3} \times a^3 - \frac{\overline{m^2-1}}{2} \times a^4$ ec., però abbaſtanza ſi vede, come la ſerie, che naſce da $\frac{\overline{1+a}^{m} - \overline{1+a}^{-m}}{m}$, comunque la quantità $m$ ſia o radicale, o immaginaria, la ſerie nulla contiene o di irrazionale, o d'immaginario. Se in oltre la propoſta quantità compleſſa ſarà $\frac{\overline{1+a}^{m} - \overline{1+a}^{-m}}{2m}$, la ſerie, che da lei naſcerà, ſarà uguale a tutti quei termini della ſerie (P) diviſi per $m$, ne' quali la quantità $m$ ſi trova inalzata a poteſta impari. La coſa è chiara per ſe ſteſſa, nulladimeno veniamo all'eſempio. Dovendoſi ridurre in ſerie la quantità compleſſa $\overline{1+a}^{\sqrt{3}} + \overline{1+a}^{-\sqrt{3}}$, ſi avrà $2+3a^2-3a^3+\frac{21}{6}a^4$ ec. Se la quantità da ridurſi in ſerie foſſe $\overline{1+a}^{\sqrt{3}} + \overline{1+a}^{-\sqrt{-3}}$, la ſerie ſarebbe $2-3a^2+3a^3-2a^4$ ec. Parimente dalla quantità $\frac{\overline{1+a}^{\sqrt{3}} - \overline{1+a}^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$ naſce la ſerie $2a - a^2 + \frac{5}{3}a^3 - 2a^4$ ec.; e dalla quantità $\overline{1+a}^{\sqrt{-3}} - \overline{1+a}^{-\sqrt{-3}}$ ſi ottiene la ſerie $2a - a^2 - \frac{1}{3}a^3 + a^4$ ec.

822. Nelle precedenti formole la quantità $a$ può eſſere razionale, o irrazionale, o immaginaria, intera, o fratta, poſitiva, o negativa, ſecondo i quali caſi particolari naſceranno diverſe ſerie razionali, o irrazionali, reali, o immaginarie. E quì ſi oſſervi, che acciò una ſerie ſia immaginaria, baſta che fra i ſuoi termini ve ne ſia un ſolo immaginario, lo che concorda con ciò, che di ſopra ſi è detto delle quantità miſte di reali, e d'immaginarie.

823. Naſcono in ſecondo luogo le ſerie dalle frazioni, quando cioè non ſi può fare una propoſta diviſione eſattamente. In diverſe maniere ſi può ſvolgere in ſerie una data frazione. La prima ſi eſeguiſce mediante l'ordinaria regola della diviſione, con dividere il numeratore della frazione pel denominatore, indi dividere di nuovo il reſiduo collo ſteſſo denominatore, e così di mano in mano, oſſervando

ſempre nelle ſottrazioni, moltiplicazioni, e diviſioni le leggi de' ſegni. Non è poi neceſſario produrre in infinito queſte diviſioni, ma baſta continuarle per tanti termini, finchè ſi ſcuopra la legge, colla quale tendono all'infinito i termini della ſerie, lo che pure ha luogo e nelle ſopra eſpoſte evoluzioni delle potenze di un binomio, e nell' invenzione di qualunque altra ſerie. Debbaſi ſvolgere in una ſerie la frazione $\frac{d}{c+e}$: Comincio a dividere il numeratore $d$ per la prima parte $c$ del denominatore, e il quoziente $\frac{d}{c}$ ſarà il primo termine della ſerie; moltiplico poſcia al ſolito giuſta la regola della diviſione queſto quoziente nel diviſore $c+e$, e ne ſottraggo il prodotto $d+\frac{de}{c}$ dal dividendo $d$, e mi viene di reſiduo $-\frac{de}{c}$, che in ſecondo luogo divido per la prima parte del denominatore $c+e$, lo che fatto naſce di quoziente $-\frac{de}{c^2}$, che deve eſſere il ſecondo termine della ſerie. Si moltiplichi queſto quoziente pel denominatore, o ſia diviſore $c+e$, e il prodotto $-\frac{de}{c}-\frac{de^2}{c^2}$ ſi ſottragga dal reſiduo $-\frac{de}{c}$, e ne verrà di reſiduo $+\frac{de^2}{c^2}$, che deveſi in terzo luogo dividere per la prima parte $c$ del denominatore $c+e$, dalla qual diviſione ſi ha $\frac{de^2}{c^3}$ per quoziente, che ſarà il terzo termine della ſerie. Siccome poi da queſta diviſione naſce un nuovo reſiduo, e così in ſeguito, non potendoſi mai fare la diviſione perfettamente, quindi egli è chiaro, che l'operazione va all'infinito, conſeguentemente il ricercato quoziente ſarà una ſerie infinita, i di cui termini ſono altrettante frazioni, che hanno per numeratore la quantità $d$ moltiplicata nelle poteſtà di $e$, i di cui eſponenti ſono minori di una unità del numero eſprimente il loro poſto, e per denominatore hanno le poteſtà di $c$, i di cui eſponenti ſono uguali al numero denotante il loro poſto. Scoperta eſſendoſi pertanto queſta legge ſi potrà facilmente, ſenza continuare la diviſione, proſeguire la ſerie, che ſarà $\frac{d}{c}-\frac{de}{c^2}+\frac{de^2}{c^3}-\frac{de^3}{c^4}+\frac{de^4}{c^5}-\frac{de^5}{c^6}+$ ec., la qual ſerie ſi eſprimerà anche nel modo ſeguente $\frac{d}{c}\times 1-\frac{e}{c}+\frac{e^2}{c^2}-\frac{e^3}{c^3}+\frac{e^4}{c^4}-\frac{e^5}{c^5}+\frac{e^6}{c^6}$ ec. Ecco il calcolo

Diviſore $c+e$ | Dividendo $d$

$$d+\frac{de}{c}$$

$$-\frac{de}{c}$$

$$-\frac{de}{c}-\frac{de^2}{c^2}$$

$$+\frac{de^2}{c^2}$$

$$+\frac{de^2}{c^2}+\frac{de^3}{c^3}$$

$$-\frac{de^3}{c^3}$$

$$-\frac{de^3}{c^3}+\frac{de^4}{c^4}$$

$$+\frac{de^4}{c^4}$$

$$+\frac{de^4}{c^4}+\frac{de^5}{c^5}$$

$$-\frac{de^5}{c^5}\quad \text{ec.}$$

Quoz. $\frac{d}{c}-\frac{de}{c^2}+\frac{de^2}{c^3}-\frac{de^3}{c^4}+\frac{de^4}{c^5}-\frac{de^5}{c^6}+\frac{de^6}{c^7}$ ec.

824. Se la frazione foſſe ſtata $\frac{d}{c-e}$, ne ſarebbe venuta la ſeguente ſerie $\frac{d}{c}+\frac{de}{c^2}+\frac{de^2}{c^3}+\frac{de^3}{c^4}+\frac{de^4}{c^5}+\frac{de^5}{c^6}$ ec.

825. Nelle frazioni, che ſvolgonſi in ſerie quattro coſe devonſi oſſervare relativamente alle ſerie, che indi ne naſcono: Primieramente che, acciò una frazione ſi poſſa ſvolgere in ſerie, il di lei denominatore deve eſſere diviſo in due parti: In ſecondo luogo, che ſe di queſte due parti la prima ſarà maggiore della ſeconda, cioè $c>e$ riſpetto alla frazione $\frac{d}{c\pm e}$, la ſerie, che ne naſcerà ſarà decreſcente all' infinito, o ſia ſarà convergente, e quanto più la prima parte $c$ ſarà maggiore di $e$, tan-

tanto più la ſerie ſi farà convergente, lo che ſi ſcorge dalla ſerie medeſima, ne' di cui termini i denominatori vanno continuamente creſcendo ſopra i numeratori, mentre il contrario ſuccede quando è $c \prec e$; e però in terzo luogo quando la prima parte del denominatore è minore della ſeconda cioè $c \prec e$, i termini della ſerie anderanno continuamente creſcendo, conſeguentemente eſſa farà divergente, mentre quanto più ſi prolunga la diviſione, ſempre avanza un termine maggiore all' infinito da dividerſi, che è ſempre l' ultimo termine della ſerie. Per altro queſte ſerie, qualora ſi voglia, ſi potranno rendere convergenti, niente altro per ottener ciò richiedendoſi, che mutar luogo alle parti del denominatore della frazione mettendo in primo luogo quella, che era in ſecondo, lo che non altera il valore della frazione. Eſſendo dunque $c \prec e$, la frazione ſi dovrà diſporre così $\frac{d}{e+c}$, da cui naſce la ſerie convergente $\frac{d}{e} - \frac{dc}{e^2} + \frac{dc^2}{e^3} - \frac{dc^3}{e^4} + \frac{dc^4}{e^5}$ — ec. Eſſendo data una ſerie divergente ſi troverà facilmente la frazione, dalla quale eſſa è nata mediante la ſeguente analogia: Come ſta la differenza tra il primo termine, e il ſecondo al primo, così lo ſteſſo primo ſta alla frazione cercata. Per Eſempio eſſendo data la ſerie divergente $\frac{d}{c} - \frac{de}{c^2} + \frac{de^2}{c^3} - \frac{de^3}{c^4}$ ec. ſi avrà la frazione, dalla quale eſſa naſce, con fare $\frac{d}{c} + \frac{de}{c^2} : \frac{d}{c} :: \frac{d}{c}$ al quarto, che è $\frac{\frac{d^2}{c^2}}{\frac{cd+de}{c^2}} = \frac{d^2}{cd+de} = \frac{d}{c+e}$, che è la frazione cercata.

826. Finalmente ſe la prima parte del denominatore della frazione ſarà uguale alla ſeconda, cioè $c = e$, ſi avrà una ſerie d' infiniti termini tutti uguali a $\frac{d}{c}$, vale a dire ſi avrà $\frac{d}{c+c} = \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{d}{c} - \frac{d}{c}$ ec., chè è una ſerie paralella, la quale in qualunque rermine (pel num. 809.) diſta egualmente dal vero valore, la quale loro proprietà ci ſerve di ſcorta a porerle tradurre in qualche maniera ad uſo, mentre la metà di un qualunque loro rermine, che deveſi conſiderare aſſetro dallo ſteſſo ſegno, dal quale è aſſetto il primo termine della ſerie, dà il vero valore della ſerie. Se poi la frazione da ſvolgerſi in ſerie ſarà $\frac{d}{c-c}$, la ſerie, che ne verrà, ſarà $\frac{d}{c} + \frac{d}{c} + \frac{d}{c} + \frac{d}{c}$ ec., i di cui termini ſono tutti uguali, e poſitivi, e perciò la ſerie anderà continuamente creſcendo all' infinito, e ci darà pel valore della propoſta frazione un quoziente infinito, lo che di fatto corriſponde al valore della ſteſſa frazione, che a motivo di $c = c$ è $\frac{d}{0}$, cioè infinito, avvegnachè la diviſione ſia un' eſame di contenenza, e il nulla ſi contenga infinite volte in una quantità finita.

827. Si debba per eſempio ridurre in ſerie la frazione $\frac{1}{3}$: Per poter ciò fare

biſogna (giuſta il num. 825.) dividere in due parti il denominatore, ma ſe ſi farà $\frac{1}{1+2}$, ne verrà una ſerie divergente (giuſta il num. 825.): di fatti ſi ſoſtituiſca nella ſerie $\frac{d}{c}-\frac{de}{c^2}+\frac{de^2}{c^3}-\frac{de^3}{c^4}+\frac{de^4}{c^5}$ ec. del num. 823. 1 in luogo di $d$, 1 in luogo di $c$, e 2 in vece di $e$, con che la ſerie diverrà 1—2+4—8+16—32 ec., nella quale il primo termine 1 ſupera la data frazione $\frac{1}{3}$ di $\frac{2}{3}$; due termini ſono minori della ſteſſa frazione $\frac{1}{3}$ di $\frac{4}{3}$; tre termini la ſuperano di $\frac{8}{3}$, quattro termini gli ſono minori di $\frac{16}{3}$ ec. Dunque queſti aumenti, e decrementi non ſono niente altro, che il ſuſſeguente termine della ſerie diviſo per il denominatore della frazione, conſeguentemente qualora ſi voglia, che la ſerie finiſca in un certo termine, per avere il vero valore, da cui naſce la ſerie, deveſi aggiungere all' ultimo preſo termine della ſerie, ſe egli è negativo, o vi ſi deve levare, ſe è poſitivo, il ſuſſeguente termine diviſo pel denominatore della frazione: Come volendo che la ſerie termini nel quinto termine + 16, per avere il vero valore biſognerà levarci $\frac{32}{3}$, onde ſi abbia $\frac{1}{1+2}=1-2+4-8+16-\frac{32}{3}$. Se la frazione da ſvolgerſi in ſerie foſſe $\frac{1}{1-2}$ col ſoſtituire nella ſerie generale i valori numerici alle lettere ſi avrebbe queſta ſerie 1+2+4+8+16 ec., che è tutt' affatto divergente, e che in niun'altra maniera ſi può correggere, ſe non con cambiare poſto alle parti del denominatore, ſcrivendo la frazione così $\frac{1}{-2+1}$, dalla quale, fatte le debite ſoſtituzioni nella ſerie generale, naſce la ſeguente ſerie $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$ ec. $=\frac{1}{-2+1}$. Parimente acciocchè la ſerie, che naſce dalla frazione $\frac{1}{3}$ ſia convergente, biſogna diſporre la frazione così $\frac{1}{2+1}$, da cui ſi ha la ſerie $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ ec. Dovendoſi ſvolgere in ſerie la frazione $\frac{1}{2}$, e volendoſi ſpezzare il di lei denominatore in numeri interi, non ſi può far altro che così $\frac{1}{1+1}$, da cui naſce queſta ſerie parialella 1—1+1—1+1—1 ec. di cui ho parlato al num. 809. Ma ſe ſi ſpezzerà il denominatore della frazione $\frac{1}{2}$ in due parti fratte, così $\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}$, ſi avrà la ſeguente ſerie convergente $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81}+\frac{2}{243}$ ec.

828. Finora ho conſiderato le frazioni, il di cui denominatore è un binomio, ma

ma egli può eſſere ancora un trinomio, un quadrinomio ec., delle quali parlerò dopo avere dato il ſecondo metodo di ſvolgere in ſerie una frazione.

829. Il ſecondo metodo pertanto di ridurre in ſerie una frazione è il ſeguente. Dovendoſi ſvolgere in ſerie una frazione, ſi faccia eſſa uguale ad una ſerie a coefficienti indeterminati, quale è la ſeguente $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ ec., la quale poſcia ſi moltiplichi pel denominatore della frazione, nel qual modo queſto prodotto ſarà uguale al numeratore. Per avere poi i valori delle aſſunte indeterminate A, B, C, D ec. ſi facciano uguali a zero i coefficienti dei termini del detto prodotto, a riſerva di altrettanti termini della ſerie, quanti ſono i termini del numeratore della propoſta frazione, de' quali hanſi a paragonare i riſpettivamente corriſpondenti. Debbaſi per eſempio ſvolgere in ſerie la frazione $\frac{d}{c+ex}$, ſi faccia $\frac{d}{c+ex} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4+Fx^5+Gx^6$ ec. Si moltiplichi poſcia queſta equazione pel denominatore $c+ex$ della frazione, lo che fatto ſi avrà

$$\begin{aligned} d = {} & Ac+Bcx+Ccx^2+Dcx^3+Ecx^4+Fcx^5+Gcx^6 \text{ ec.} \\ & +Aex+Bex^2+Cex^3+Dex^4+Eex^5+Fex^6 \text{ ec.} \end{aligned}$$

Ora ſi paragoni il primo termine di queſta ſerie col numeratore $d$, poſcia ſi uguaglino a zero i coefficienti degli altri termini, con che ſi avrà $Ac=d$, $Bc+Ae=0$, $Cc+Be=0$, $Dc+Ce=0$, $Ec+De=0$ ec, Dal primo paragone ſi ha $A=\frac{d}{c}$; dal ſecondo $B=-\frac{Ae}{c}$, che col farſi la ſoſtituzione del valore di A è $B=-\frac{de}{c^2}$; dal terzo $C=-\frac{Be}{c}$, cioè $C=+\frac{de^2}{c^3}$; dal quarto $D=-\frac{Ce}{c}$, vale a dire $D=-\frac{de^3}{c^4}$; dal quinto $E=-\frac{De}{c}$, o ſia $E=+\frac{de^4}{c^5}$ ec. La ſerie adunque, che naſce dalla frazione $\frac{d}{c+ex}$ è $\frac{d}{c}-\frac{dex}{c^2}+\frac{de^2x^2}{c^3}-\frac{de^3x^3}{c^4}+\frac{de^4x^4}{c^5}$ ec. Baſta poi oſſervare i rittovati coefficienti $A=\frac{d}{c}$, $B=-\frac{Ae}{c}$, $C=-\frac{Be}{c}$, $D=-\frac{Ce}{c}$, $E=-\frac{De}{c}$ ec. per accorgerſi, che la ritrovata ſerie è una ſerie ricorrente del primo ordine, di cui ciaſcun termine naſce dal precedente moltiplicato in $-\frac{e}{c}$. Se dalla data frazione ſi vorrà ricavare una ſerie, i di cui termini ſiano diviſi per $x$, e per le ſue poteſtà (ciò poi avrà luogo ſolamente in caſo, che ſia $x>\frac{c}{e}$, affinchè la ſerie poſſa eſſere convergente), biſognerà diſporre la frazione, e la ſerie generale così $\frac{d}{ex+c}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{E}{x^5}+\frac{F}{x^6}$ ec., indi moltiplicare la ſerie nel denominatore della frazione, con che ſi avrà

$d=$

$$d = Ae + \frac{Be}{x} + \frac{Ce}{x^2} + \frac{De}{x^3} + \frac{Ee}{x^4} + \frac{Fe}{x^5} \text{ ec.}$$
$$+ \frac{Ac}{x} + \frac{Bc}{x^2} + \frac{Cc}{x^3} + \frac{Dc}{x^4} + \frac{Ec}{x^5} \text{ ec.}$$

e mediante il paragone dei coefficienti dei termini si ricavano i valori delle indeterminate A, B, C, D, come si è fatto di sopra, cioè $A = \frac{d}{e}$, $B = -\frac{Ac}{e}$, $C = -\frac{Bc}{e}$, $D = -\frac{Cc}{e}$, $E = -\frac{Dc}{e}$, $F = -\frac{Ec}{e}$ ec., e rimettendo continuamente i ritrovati valori, si avrà finalmente $\frac{d}{ex+c} = \frac{d}{ex} - \frac{dc}{e^2x^2} + \frac{dc^2}{e^3x^3} - \frac{dc^3}{e^4x^4} + \frac{dc^4}{e^5x^5}$ ec., o sia $\frac{d}{ex+c} = \frac{d}{ex} \times 1 - \frac{c}{ex} + \frac{c^2}{e^2x^2} - \frac{c^3}{e^3x^3} + \frac{c^4}{e^4x^4} - \frac{c^5}{e^5x^5} + \frac{c^6}{e^6x^6}$ ec.

830 Egualmente si opererà se il denominatore della frazione sarà un trinomio, quadrinomio ec. Si debba per esempio ridurre in serie la frazione $\frac{b+dx^2}{a+cx+ex^2+ix^3}$: Si assuma la serie generale $A+Bx+Cx^2+Dx^3$, ec. cui si faccia uguale la data frazione, poscia si moltiplichi l'uno, e l'altro membro di questa equazione pel denominatore della frazione, e si avrà

$$b+dx^2 = Aa+aBx+aCx^2+aDx^3+aEx^4+aFx^5$$
$$+Acx+Bex^2+Cex^3+Dex^4+Eex^5$$
$$+Aex^2+Bex^3+Cex^4+Dex^5 \text{ ec.}$$
$$+Aix^3+Bix^4+Cix^5$$

Ora si faccia il paragone dei termini a fine di avere i valori delle assunte indeterminate A, B, C ec. Si paragoni pertanto il primo termine del numeratore col primo termine della serie, perchè sono tutti due quantità costanti, e ne verrà $A = \frac{b}{a}$. Il secondo termine del numeratore, perchè è moltiplicato in $x^1$, non si può uguagliare, che al coefficiente del terzo termine della serie, che pure è moltiplicato in $x^1$; che però il coefficiente del secondo termine della serie si uguagli a zero, e si avrà $aB+Ac=0$, conseguentemente $B = -\frac{Ac}{a}$: Si paragoni al secondo termine del numeratore il terzo termine della serie, e si avrà $d = aC+Be+Ae$, quindi $C = \frac{d-Be-Ae}{a}$; uguagliando poi a zero i rimanenti termini della serie, si otterrà $aD+Ce+Be+Ai=0$, cioè $D = -\frac{Ce-Be-Ai}{a}$, $aE+De+Ce+Bi=0$, vale a

di-

dire $E=-\frac{De-Ce-Bi}{a}$, $aF+Ec+De+Ci=o$, e però $F=-\frac{Ec-De-Ci}{a}$ ec.: Che se si sostituiranno successivamente i ritrovati valori delle lettere A, B, C ec., si avrà finalmente la ricercata serie, nella quale si svolge la frazione

$$\frac{b+dx^3}{a+cx+ex^2+ix^3}, \text{ che è } \frac{b}{a}-\frac{bcx}{a^2}+\frac{a^2d+bc^2-abc}{a^3}\times x^2$$

$$+\frac{-2ace-a^2cd-a^2ei-bc^3}{a^4}\times x^3+\frac{a^2c^2d+2a^2be+a^4-a^3de-2ac^2e+a^2bc^2}{a^5}\times x^4 \text{ ec.}$$

831. Quando il termine $ix^3$ del denominatore della frazione sia maggiore degli altri, si dovrà disporre la frazione così $\frac{dx^2+b}{ix^3+cx^2+ex+a}$, con che la serie, che se ne avrà sarà della seguente forma $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}$, e così sarà convergente.

832. Osservando i ritrovati coefficienti $A=\frac{b}{a}$, $B=-\frac{Ae}{a}$, $C=\frac{d-Bc-Ae}{a}$ $D=-\frac{Cc-Be-Ai}{a}$, $E=-\frac{De-Ce-Bi}{a}$, $F=-\frac{Ec-De-Ci}{a}$ ec., si scuopre abbastanza, che la ritrovata serie è una serie ricorrente del terzo ordine. Generalmente poi il grado della formola, che serve di denominatore alla frazione darà l'ordine della serie ricorrente, in cui si svolge la stessa frazione. Ma acciò la serie ricorrente cominci immediatamente, e continui collo stesso ordine, fa di mestiere, che la $x$ abbia minor esponente nel numeratore, che nel denominatore, altrimenti se la $x$ avrà uguale, o maggiore esponente nel numeratore, che nel denominatore, si perturberà l'ordine della serie in quel termine, che contiene la $x$ elevata allo stello esponente, che nel numeratore della frazione, dopo il qual termine proseguirà essa ordinatamente: Come se la frazione fosse $\frac{b+dx^4}{a+cx+ex^2}$, dalla quale deve nascere una serie ricorrente del secondo ordine, essa si altererà nel quarto termine, dopo il quale procederà invariatamente, come si potrà vedere facendone il calcolo, con cui si ha la seguente serie $A=\frac{b}{a}$, $B=-\frac{Ac}{a}$, $C=-\frac{Bc-Ac}{a}$, $D=-\frac{Ce-Bc}{a}$, $E=\frac{d-De-Cc}{a}$, $F=-\frac{Fc-De}{a}$, $G=-\frac{Fc-Ee}{a}$ ec., il di cui quinto termine, che deve essere moltiplicato in $x^4$, esce dall'ordine degli altri. In questi casi a fine di avere una serie ricorrente, che collo stello ordine proceda dal primo fino all'ultimo termine, bisogna dividere il numeratore della frazione pel denominatore, finchè ne risulti per residuo una frazione, di cui la $x$ nel numeratore abbia minor esponente, che nel denominatore. Ne prendo l'esempio dalla frazione poc'anzi data $\frac{b+dx^4}{a+cx+ex^2}$, si divida il numeratore pel denominatore, finchè si abbia un tal residuo, che nel numeratore la $x$ abbia minor esponente, che nel denominatore, e si avrà $\frac{dx^2}{e}-$

$\frac{cdx}{e^2} + \frac{c^2d-ade}{e^3} - \frac{\frac{\overline{c^2d+2acde}}{e^3} \times x - \frac{ac^2d+a^2de}{e^3} + b}{ex^2+cx+a}$, indi col metodo esposto si svolga in serie la frazione $-\frac{\frac{\overline{c^2d+2acde}}{e^3} \times x - \frac{ac^2d+a^2de}{e^3} + b}{ex^2+cx+a}$.

833. Lo stesso metodo ha luogo comunque l'esponente di $x$ sia intero, o fratto; in questo secondo caso però devonsi usare alcune precauzioni necessarie per giungere al fine bramato. Quando adunque in una data frazione da svolgersi in serie gli esponenti della $x$ saranno numeri fratti, bisognerà primieramente determinare la progressione aritmetica, la più semplice, che sia possibile, secondo la quale devono procedere gli esponenti fratti da darsi alla $x$ per ciascun termine della serie. Questa progressione poi deve esser tale, che comprenda fra' suoi termini tutti gli esponenti, che affettano i termini tanto del numeratore, come del denominatore della frazione. Se la serie cercata dovrà avere i suoi termini moltiplicati per $x$, la detta progressione aritmetica, i di cui termini devonsi assegnare ordinatamente per esponenti a ciascun termine della serie indeterminata, deve cominciare dal zero; ma se i termini della serie dovranno avere la $x$ per denominatore, in tal caso la progressione aritmetica non dovrà cominciare dal zero, ma dal massimo esponente, che trovasi nel denominatore della frazione. Debbasi per esempio ridurre in serie la frazione seguente $\frac{b+dx^{\frac{1}{4}}}{a+c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x}$. Poichè la progressione aritmetica, che nel denominatore formano gli esponenti è o, $\frac{1}{2}$, 1, nella quale non può cadere l'esponente $\frac{1}{4}$ del numeratore, però si deve ritrovare un'altra progressione, nella quale possano entrar tutti. A questo fine riduco le due frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ allo stesso denominatore, che è 8, poscia dispongo la data frazione così $\frac{b^{\frac{8}{8}}+d^{\frac{8}{8}}x^{\frac{2}{8}}}{a^{\frac{8}{8}}+c^{\frac{4}{8}}x^{\frac{4}{8}}+x^{\frac{8}{8}}}$, i di cui esponenti cadono tutti fra i termini della progressione aritmetica o, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$, e questi saranno gli esponenti, che avrà la $x$ nei termini della serie. In oltre nel denominatore della frazione devonsi supplire i termini, che mancano secondo l'ordine de' precedenti esponenti, moltiplicandoli per altro in zero, nel qual modo la frazione uguagliata alla serie indeterminata sarà

$$\frac{b^{\frac{8}{8}}+d^{\frac{8}{8}}x^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{8}{8}}+\circ\chi x^{\frac{1}{8}}+\circ\chi x^{\frac{2}{8}}+\circ\chi x^{\frac{3}{8}}+c^{\frac{4}{8}}x^{\frac{4}{8}}+\circ\chi x^{\frac{5}{8}}+\circ\chi x^{\frac{6}{8}}+\circ\chi x^{\frac{7}{8}}+\circ\chi x^{\frac{8}{8}}} = A+$$

$Bx^{\frac{2}{8}}+Cx^{\frac{2}{8}}+Dx^{\frac{3}{8}}+Ex^{\frac{4}{8}}+Fx^{\frac{5}{8}}$ ec. Per mezzo delle operazioni praticate di ſopra ſi ritrovino i valori de' coefficienti indeterminati A, B, C ec., lo che fatto ſi avrà la ſerie ricercata, che ſarà una ſerie ricorrente di ottavo ordine. Se nei termini della ſerie la $x$ aveſſe dovuto cadere in denominatore, ſi avrebbe dovuto aſſumere la ſerie indeterminata $\frac{A}{x^{\frac{8}{8}}}+\frac{B}{x^{\frac{9}{8}}}+\frac{C}{\lambda^{\frac{10}{8}}}+\frac{D}{\varkappa^{\frac{11}{8}}}+\frac{E}{x^{\frac{12}{8}}}$ ec.

834. Torna comodo lo ſfuggire le ſerie ricorrenti degli ordini molto elevati. Per ottenere ciò biſogna ſpezzare la frazione da ſvolgerſi in ſerie in più frazioni, indi dedurne da ciaſcuna la ſua conveniente ſerie. Acciò nulla reſti da deſiderarſi in queſto caſo, ſoggiugnerò quì il modo di ſpezzare una frazione in più frazioni. Dalle coſe dette all' Articolo VIII. Metodo I. ſi ha la maniera di riſolvere una qualunque formola ne' ſuoi fattori di ſecondo grado, ognuno de' quali ſi riſolve poi facilisſimamente in fattori di primo grado; per lo che ſuppongo già ſviluppato ne' ſuoi fattori di primo grado il denominatore della frazione da ſvolgerſi in ſerie; ſuppongo in oltre, che la detta frazione abbia per numeratore l'unità, mentre quand' anche non ſia tale, vi ſi riduce facilmente con ſupporla moltiplicata in quella quantità, che ſerviva di numeratore; come la frazione $\frac{b^m}{a+c}$ ſi rappreſenterà così $b^m \chi \frac{1}{a+c}$. Supponendoſi pertanto, che il numeratore della frazione data ſia l'unità, ſarà pure l'unità il numeratore delle frazioni, nelle quali eſſa ſi ſpezza, trovate le quali ſi dovranno poſcia moltiplicare nella quantità, che era il vero numeratore. Poſte le quali coſe veniamo al modo di ſpezzare una data frazione in altrettante, quanti ſono i fattori del di lei denominatore.

835. Dico pertanto, che ognuna di queſte frazioni cercate avrà per denominatore uno dei fattori del denominatore della frazione da ſpezzarſi moltiplicato in tutti i reſidui, che naſcono dal ſottrarlo ſucceſſivamente da tutti gli altri fattori: Come eſſendo data la frazione $\frac{a^3}{x^3+\overline{a-b+c}\chi x^2-\overline{ab+ac-bc}\chi x-abc}$, che con dividere il denominatore ne' ſuoi fattori di primo grado è $\frac{a^3}{\overline{x+a}\chi\overline{x-b}\chi\overline{x+c}}$, e per maggiore ſemplicità facendo $x+a=\gamma$, $x-b=\delta$, $x+c=\varphi$, onde la data frazione ſia $a^3 \chi \frac{1}{\gamma\delta\varphi}$, le tre frazioni (giuſta il numero de' di lei tre fattori), nelle quali eſſa

ſi ſpezzerà, ſaranno $\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+\frac{1}{\overline{\delta\times\gamma-\delta}\times\overline{\rho-\delta}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\gamma-\rho}\times\overline{\delta-\rho}}$, ognuna delle quali deve poi eſſere moltiplicata in $a^3$.

836. Per certificarſi della verità della propoſizione comincio da una frazione, il di cui denominatore abbia due ſoli fattori, per eſempio $\frac{1}{\gamma\rho}$, la quale (giuſta il num. 835.) deveſi ſpezzare nelle due ſeguenti $\frac{1}{\gamma\times\overline{\rho-\gamma}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\gamma-\rho}}$. Di fatto ſi cambino i ſegni al numeratore, e al denominatore di una di queſte frazioni, come alla ſeconda (il che non altera la frazione pel num. 81.), e ſi avrà $\frac{1}{\gamma\times\rho-\gamma}-\frac{1}{\rho\times\overline{\gamma-\rho}}$, le quali ridotte allo ſteſſo denominatore danno $\frac{\rho-\gamma}{\gamma\rho\times\rho-\gamma}=\frac{1}{\gamma\rho}$, lo che ſi doveva in primo luogo dimoſtrare. Sia in ſecondo luogo la frazione $\frac{1}{\gamma\delta\rho}$, che deve eſſere $=\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+\frac{1}{\delta\times\overline{\gamma-\delta}\times\overline{\rho-\delta}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\gamma-\rho}\times\overline{\delta-\rho}}$. Primieramente conſidero la frazione $\frac{1}{\gamma\delta\rho}$ così $\frac{1}{\gamma\delta}\times\frac{1}{\rho}$. Spezzando giuſta il num. 835. ne'ſuoi fattori la frazione $\frac{1}{\gamma\delta}$, e moltiplicandoli per $\frac{1}{\rho}$ ſi ha $\frac{1}{\gamma\rho\times\overline{\delta-\gamma}}+\frac{1}{\delta\rho\times\overline{\gamma-\delta}}$. Ora conſiderando queſte due frazioni nel modo ſeguente $\frac{1}{\delta-\gamma}\times\frac{1}{\gamma\rho}+\frac{1}{\gamma-\delta}\times\frac{1}{\delta\rho}$ ſi ſpezzino le due frazioni $\frac{1}{\gamma\rho}$, $\frac{1}{\delta\rho}$, e quelle che naſcono dalla prima moltiplicandole per $\frac{1}{\delta-\gamma}$; quelle che naſcono dalla ſeconda per $\frac{1}{\gamma-\delta}$, ſi avrà $\frac{1}{\gamma\times\rho-\gamma\times\overline{\delta-\gamma}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\gamma-\rho}\times\overline{\delta-\gamma}}+\frac{1}{\delta\times\overline{\rho-\delta}\times\overline{\gamma-\delta}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\delta-\rho}\times\overline{\gamma-\delta}}$: Ma la ſeconda e la terza di queſte frazioni ſommate inſieme ſono uguali ad $\frac{1}{\rho\times\gamma-\rho\times\overline{\delta-\rho}}$, o ſia $\frac{1}{\rho}\times\frac{1}{\gamma-\rho\times\overline{\delta-\rho}}$, poichè riſultano dallo ſpezzarſi in due frazioni la frazione $\frac{1}{\gamma-\rho\times\overline{\delta-\rho}}$ relativamente ai due fattori del ſuo denominatore, indi moltiplicarle in $\frac{1}{\rho}$. Dunque le fra-

frazioni nelle quali ſi ſpezza la data frazione ſono $\frac{1}{\gamma\times\overline{\rho-\gamma}\times\overline{\delta-\gamma}}+\frac{1}{\delta\times\overline{\rho-\delta}\times\overline{\gamma-\delta}}$ $+\frac{1}{\rho\times\overline{\gamma-\rho}\times\overline{\delta-\rho}}$.

837. Collo ſteſſo diſcorſo proſeguendo ſi dimoſtrerà, che la frazione $\frac{1}{\delta\gamma\rho}$ ſi ſpezza nelle quattro ſeguenti $\frac{1}{\delta\times\overline{\epsilon-\delta}\times\overline{\gamma-\delta}\times\overline{\rho-\delta}}+\frac{1}{\epsilon\times\overline{\delta-\epsilon}\times\overline{\gamma-\epsilon}\times\overline{\rho-\epsilon}}+$ $\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\times\overline{\epsilon-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\delta-\rho}\times\overline{\epsilon-\rho}\times\overline{\gamma-\rho}}$ poichè conſiderando la frazione $\frac{1}{\delta\gamma\rho}$ così $\frac{1}{\delta}\times\frac{1}{\gamma\rho}$, ſi ſpezzi come ſi è dimoſtrato al num. 836. la frazione $\frac{1}{\gamma\rho}$ in tre frazioni, ognuna delle quali ſi moltiplichi in $\frac{1}{\delta}$, e ſi avrà $\frac{1}{\delta\times\overline{\gamma-\epsilon}\times\overline{\rho-\epsilon}}+$ $\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+\frac{1}{\rho\times\overline{\delta-\rho}\times\overline{\gamma-\rho}}$, cioè $\frac{1}{\delta}\times\frac{1}{\overline{\gamma-\epsilon}\times\overline{\rho-\epsilon}}+\frac{1}{\gamma\delta}\times\frac{1}{\overline{\epsilon-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+$ $\frac{1}{\rho\delta}\times\frac{1}{\overline{\epsilon-\rho}\times\overline{\gamma-\rho}}$, e ſpezzando le tre frazioni $\frac{1}{\epsilon\delta}$, $\frac{1}{\gamma\delta}$, $\frac{1}{\rho\delta}$ in altre da moltiplicarſi ne' ſuoi corriſpondenti fattori, ne verranno le ſeguenti $\frac{1}{\epsilon\times\overline{\delta-\epsilon}\times\overline{\gamma-\epsilon}\times\overline{\rho-\epsilon}}+$ $\frac{1}{\delta\times\overline{\epsilon-\delta}\times\overline{\gamma-\epsilon}\times\overline{\rho-\epsilon}}+\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\times\overline{\epsilon-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+\frac{1}{\delta\times\overline{\gamma-\delta}\times\overline{\epsilon-\gamma}\times\overline{\rho-\gamma}}+$ $\frac{1}{\rho\times\overline{\delta-\rho}\times\overline{\epsilon-\rho}\times\overline{\gamma-\rho}}+\frac{1}{\delta\times\overline{\rho-\delta}\times\overline{\epsilon-\rho}\times\overline{\gamma-\rho}}$. Ma la ſeconda, la quarta, e la ſeſta di queſte ſei frazioni ſi trovano uguali a $\delta\times\frac{1}{\overline{\epsilon-\delta}\times\overline{\gamma-\delta}\times\overline{\rho-\delta}}$, o ſia $\frac{1}{\delta}\times\frac{1}{\overline{\epsilon-\delta}\times\overline{\gamma-\delta}\times\overline{\rho-\delta}}$, poichè riſultano dallo ſpezzarſi in tre frazioni la frazione $\frac{1}{\overline{\epsilon-\delta}\times\overline{\gamma-\delta}\times\overline{\rho-\delta}}$ relativamente ai tre fattori del ſuo denominatore, indi moltiplicarle in $\frac{1}{\delta}$. Dunque le frazioni, nelle quali ſi ſpezza la data frazione $\frac{1}{\delta\gamma\rho}$ ſo-

$$\text{no}\ \frac{1}{\delta\times\overline{\epsilon-\delta}\ \times\overline{\gamma-\delta}\ \times\overline{\varphi-\delta}}+\frac{1}{\epsilon\times\overline{\delta-\epsilon}\ \times\overline{\gamma-\epsilon}\ \times\overline{\varphi-\epsilon}}+\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\ \times\overline{\epsilon-\gamma}\ \times\overline{\varphi-\gamma}}+$$

$$\frac{1}{\varphi\times\overline{\delta-\varphi}\ \times\overline{\epsilon-\varphi}\ \times\overline{\gamma-\varphi}}.$$

838. Egualmente ſi continui il raziocinio, e ſi vedrà che la frazione $\frac{1}{\delta\epsilon\gamma\lambda\varphi}$, il di cui denominatore ammette cinque fattori, ſi ſpezza nelle cinque ſeguenti

$$\frac{1}{\delta\times\overline{\epsilon-\delta}\ \times\overline{\gamma-\delta}\ \times\overline{\lambda-\delta}\ \times\overline{\varphi-\delta}}+\frac{1}{\epsilon\times\overline{\delta-\epsilon}\ \times\overline{\gamma-\epsilon}\ \times\overline{\lambda-\epsilon}\ \times\overline{\varphi-\epsilon}}+$$

$$\frac{1}{\gamma\times\overline{\delta-\gamma}\ \times\overline{\epsilon-\gamma}\ \times\overline{\lambda-\gamma}\ \times\overline{\varphi-\gamma}}+\frac{1}{\lambda\times\overline{\delta-\lambda}\ \times\overline{\epsilon-\lambda}\ \times\overline{\gamma-\lambda}\ \times\overline{\varphi-\lambda}}+$$

$\frac{1}{\varphi\times\overline{\delta-\varphi}\ \times\overline{\epsilon-\varphi}\ \times\overline{\gamma-\varphi}\ \times\overline{\lambda-\varphi}}$. Lo ſteſſo ſi dica ſe il denominatore della frazione avrà ſei, ſette ec. fattori.

839. Se la data frazione avrà nel denominatore più fattori uguali, come ſe foſſe $\frac{1}{\epsilon\varphi^2}=\frac{1}{\epsilon\varphi\varphi}$, nel qual caſo operando al ſolito ſi avrebbe

$$\frac{1}{\epsilon\times\overline{\varphi-\epsilon}\times\overline{\varphi-\epsilon}}+\frac{1}{\varphi\times\overline{\epsilon-\varphi}\times\overline{\varphi-\varphi}}+\frac{1}{\varphi\times\overline{\epsilon-\varphi}\times\overline{\varphi-\varphi}},$$ delle quali equazioni le due ultime hanno il zero in denominatore, perchè $\varphi-\varphi=0$, e una quantità moltiplicata in zero rende zero, però per evitare in ſimili caſi queſto inconveniente biſognerà conſiderare la frazione, come ſe nel denominatore aveſſe un ſolo di que' fattori uguali, e così ſpezzarla col metodo eſpoſto, lo che fatto, col prodotto de' denominatori ommeſſi ſi dovranno moltiplicare i denominatori delle frazioni ſpezzate: Così nell' eſempio addotto della frazione $\frac{1}{\epsilon\varphi^2}$ biſognerà conſiderarla in queſto modo $\frac{1}{\epsilon\varphi}$, che ſpezzata dà $\frac{1}{\epsilon\times\overline{\varphi-\epsilon}}+\frac{1}{\varphi\times\overline{\epsilon-\varphi}}$, ognuna delle quali moltiplicata poſcia in $\frac{1}{\varphi}$ diventa $\frac{1}{\varphi\varphi\times\overline{\epsilon-\varphi}}+\frac{1}{\varphi^2\times\overline{\epsilon-\varphi}}$.

840. Se nel numeratore della frazione da ſpezzarſi ſi troverà l'incognita $x$ elevata a uguale, o maggiore poteſtà, che nel denominatore, ſi dovrà primieramente (giuſta il num. 832.) dividere tante volte il numeratore pel denominatore, finchè l'eſponente della $x$ nel numeratore ſia minore, che nel denominatore, anzi qualora ſi tratti di ſpezzarſi in più frazioni una frazione, il di cui denominatore riſulti da fattori di primo grado, non potrà eſſa avere la $x$ in numeratore per la ragione del num. 832., ma tale numeratore dovrà eſſere di ſole quantità cognite, e tale ſi rende-

derà mediante la divisione: Per altro questa operazione si potrà fare ancora dopo lo spezzamento rispetto a ciascuna frazione spezzata, nel qual modo ogni frazione si ridurrà a due parti, una intiera, e l'altra fratta.

841. Nel modo detto pertanto spezzandosi la frazione $\frac{a^3}{x+a \times x-b \times x+c}$ proposta di sopra, essa si ridurrà alle seguenti $\frac{a^3}{x+a \times x-b-x-a \times x+c-x-a}$ + $\frac{a^3}{x-b \times x+a-x+b \times x+c-x+b}$ + $\frac{a^3}{x+c \times x+a-x-c \times x-b-x-c}$, cioè $\frac{a^3}{x+a \times -b-a \times c-a}$ + $\frac{a^3}{x-b \times a+b \times c+b}$ + $\frac{a^3}{x+c \times a-c \times -b-c}$. Spezzata poi che si sia una frazione, si ridurrà in serie nella maniera già data ciascuna delle spezzate, e così si eviteranno le serie ricorrenti degli ordini elevati.

842. Lo stesso sarà il modo di operare, e la stessa pure sarà la dimostrazione qualora i fattori del denominatore della frazione siano di secondo grado. Ne prendo l'esempio da una frazione a due fattori per non estendermi soverchiamente. Sia la frazione $\frac{1}{x+a^2 \times x+b}$, dico che essa si risolverà nelle due seguenti

$$\frac{1}{x+a^2 \times x+b-(x+a)^2} + \frac{1}{x+b^2 \times x+a-(x+b)^2}$$

Di fatto si cambino i segni al numeratore, e denominatore di questa seconda frazione, poscia si riducano esse al comune denominatore, e si avrà

$$\frac{-(x+b)^2-(x+a)^2}{x+a^2 \times -(x+b)^2 \times -(x+a)^2 \times x+b^2} = \frac{1}{x+a^2 \times x+b^2}.$$

843. Nascono in terzo luogo le serie da quelle quantità, dalle quali non si può estrarre una cercata radice. Per levare queste quantità irrazionali dalla inconcepibile oscurità, con cui le circonda il vincolo radicale, e ridurle a espressioni intelligibili, e insieme effabili, si svolgono in serie, le quali prodotte all'infinito ci forniscono il loro vero valore. In due maniere si può svolgere in serie una quantità radicale, o col metodo comune di estrarre da una quantità una cercata radice, o per mezzo della formola Newtoniana usata di sopra. Cominciamo dal primo modo.

844. Debbasi svolgere in serie la quantità radicale $\sqrt{a^2 \pm c^2}$. Si estragga primieramente la radice quadrata dal primo termine $a^2$, e si avrà $a$ primo termine della serie; si inalzi al quadrato questa radice, indi si sottragga dalla quantità data, lo che fatto si avrà di residuo $\pm c^2$. Si divida questo $\pm c^2$ per $2a$ doppio della radi-

ce

ce trovata, e il quoziente $\pm \frac{c^2}{2a}$ farà il ſecondo termine della ſerie. Con queſto quoziente ſi moltiplichi $2a \pm \frac{c^2}{2a}$, e il prodotto $\pm c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$ ſottratto da $\pm c^2$ laſcierà di reſiduo $-\frac{c^4}{4a^2}$, quale ſi divida pel primo termine del doppio della radice finora trovata, cioè per $2a$, e il quoziente $-\frac{c^4}{8a^3}$ darà il terzo termine della ſerie, con cui ſi moltiplichi $2a \pm \frac{c^2}{a} - \frac{c^4}{8a^3}$, e il prodotto $-\frac{c^4}{4a^2} \mp \frac{c^6}{8a^4} + \frac{c^8}{64a^6}$ ſi levi dal reſiduo $-\frac{c^4}{4a^2}$, con che ſi avrà per nuovo reſiduo $\pm \frac{c^6}{8a^4} - \frac{c^8}{64a^6}$. Si divida di nuovo il primo termine di queſto reſiduo pel primo termine del doppio della fin'ora trovata radice, e il quoziente $\pm \frac{c^6}{16a^5}$ farà il quarto termine della ſerie. Se in queſto modo ſi proſeguirà l'operazione; ſi potrà protrarre la ſerie all'infinito, e però ſi avrà $\sqrt{a^2 \pm c^2} = a \pm \frac{c^2}{2a} - \frac{c^4}{8a^3} \pm \frac{c^6}{16a^5} - \frac{5c^8}{128a^7} \pm$ ec.

845. Acciò la ſerie ſia convergente deve eſſere $a^2 > c^2$; e ſe ſarà $a^2 < c^2$ la quantità radicale ſi dovrà diſporre così $\sqrt{\pm c^2 + a^2}$; in caſo poi che valga il ſegno inferiore, cioè ſia $\sqrt{-c^2 + a^2}$, perchè la quantità è immaginaria, ſarà immaginaria anche la ſerie, che ne naſcerà, la quale ſarà $c\sqrt{-1} + \frac{a^2}{2c\sqrt{-1}} + \frac{a^4}{8c^3\sqrt{-1}} + \frac{a^6}{16c^5\sqrt{-1}} + \frac{5a^8}{128c^7\sqrt{-1}}$ + ec. Se foſſe $a^2 = c^2$, ne verrebbe la ſerie

$$a + \frac{a}{2} - \frac{a}{8} + \frac{a}{16} - \frac{5a}{128} + \text{ec.}$$

846. Iſteſſamente ſi operi ſe la quantità ſotto al vincolo ſarà trinomia, quadrinomia ec.: Se poi la data quantità ſarà un radicale cubo, quadrato-quadrato ec., ſi faccia uſo delle regole date per l'eſtrazione della radice cuba, quadrato-quadrata ec.

847. In ſecondo luogo ſi ſvolge una quantità radicale in ſerie mediante la formola Newtoniana $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ$ ec.: Ma per facilitare nel caſo preſente il calcolo delle frazioni, ſi ſoſtituiſca nella formola in vece dell'eſponente $m$ una frazione, come $\frac{m}{n}$, con che la ſuddetta formola diverrà $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ +$ ec.

848.

848. Debbasi svolgere in serie la quantità radicale $\sqrt[5]{c^5+c^4e-a^5}$, o sia $\overline{c^5+c^4e-a^5}^{\frac{1}{5}}$. Si ponga $P=c^5$, $Q=\frac{c^4e-a^5}{c^5}$, $m=1$, $n=5$, fatte le quali sostituzioni nella formola, si avrà

$P^{\frac{m}{n}}=c^{\frac{5}{5}}=c=A$.

$\frac{m}{n}AQ=\frac{c^4e-a^5}{5c^4}=B$.

$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{2c^8e^2+4a^5c^4e-2a^{10}}{25c^9}=C$.

$\frac{m-2n}{3n}CQ=\frac{6c^{12}e^3-18a^5c^8e^2+18a^{10}c^4e-6a^{15}}{125c^{14}}$ ec.

Per lo che si avrà $\sqrt[5]{c^5+c^4e-a^5}=c+\frac{c^4e-a^5}{5c^4}-\frac{2c^8e^2+4a^5c^4e-2a^{10}}{25c^9}+\frac{6c^{12}e^3-18a^5c^8e^2+18a^{10}c^4e-6a^{15}}{125c^{14}}$ — ec.

849. Vale egualmente il metodo anche quando l'esponente fratto è negativo. Debbasi per esempio svolgere in serie la quantità $\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}$, che è $=\overline{a^2+c^2}^{-\frac{1}{2}}$: Si ponga $P=a^2$, $Q=\frac{c^2}{a^2}$, o sia $Q=c^2a^{-2}$ $m=-1$, $n=2$, con che si avrà

$P^{\frac{m}{n}} = a^{-1} = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} c^2 a^{-3} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = +\frac{3}{8} c^4 a^{-5} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{16} c^6 a^{-7} = D$

$\frac{m-3n}{4n} = DQ = +\frac{35}{128} c^8 a^{-9} = E$ ec.

onde si ha $\overline{a^2+c^2}^{-\frac{1}{2}} = a^{-1} - \frac{1}{2} c^2 a^{-3} + \frac{3}{8} c^4 a^{-5} - \frac{5}{16} c^6 a^{-7} + \frac{35}{128} c^8 a^{-9}$ ec., o sia $= \frac{1}{a} - \frac{c^2}{2a^3} + \frac{3c^4}{8a^5} + \frac{5c^6}{16a^7} + \frac{35c^8}{128a^9}$ — ec.

850. Ognuno vede come si debba regolare per isvolgere in serie la quantità $\frac{\sqrt{a^2 \pm c^2}}{a \pm c}$, o la quantità $\frac{\sqrt{a \pm c^2}}{\sqrt{a \pm c}}$, mentre la prima essendo $\sqrt{a^2 \pm c^2} \times \overline{a \pm c}^{-1}$, non altro devesi fare, che mediante la formola elevare $a^2 \pm c^2$ alla potestà $\frac{1}{2}$, e la quantità $a \pm c$ alla potestà $-1$, indi moltiplicare tra loro (nel modo, che si dirà fra poco) le due serie, che ne nasceranno, lo che pure devesi fare rispetto alla seconda quantità $\frac{\sqrt{a \pm c^2}}{\sqrt{a \pm c}} = \left(a^2 \pm c^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(a \pm c\right)^{-\frac{1}{2}}$

851. Da ciò si intende, che la stessa formola Newtoniana serve egualmente per isvolgere in serie una frazione razionale, come sarebbe $\frac{b}{a \pm c}$, la quale è $= b \times \overline{a \pm c}^{-1}$.

852. Se la data quantità da svolgersi in serie sarà tale, che vi si possa estrarre esattamente la radice cercata, la serie dopo aver dato il valore di questa radice procederà bensì all'infinito, ma con termini, che si distruggeranno vicendevolmente l'un l'altro.

853. Per venire all'esempio particolare, si debba svolgere in serie la quantità $\sqrt{5}$, che dispongo così $\sqrt{4+1}$. Si ponga $P=4$, $Q=\frac{1}{4}$, $m=1$, $n=2$, e si avrà

P

$P^{\frac{m}{n}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{4} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{64} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1}{512} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{16384} = E$ ec.

e però si trova $\overline{4+1}^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} - \frac{5}{16384}$ ec.

## ARTICOLO II.

*Delle frazioni continue.*

854. FRazione continua è quella, il di cui denominatore ha due parti, una intera, e l'altra fratta, e di questa frazione parimente il denominatore è in parte intero, in parte fratto, e così in seguito. Il primo termine di queste frazioni continue può essere una quantità sì intera, come fratta. I numeratori delle frazioni o possono essere sempre gli stessi, o possono variare in ciascuna, lo che si dica ancora de' denominatori. Soggiungo qui alcuni esempj secondo questi diversi casi

| I | II | III |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+}}}}}$ 2 ec. | $\frac{3+10}{3+\frac{10}{3+\frac{10}{3+\frac{10}{3+}}}}$ 3 ec. | $\frac{1+4}{1+\frac{9}{1+\frac{16}{1+\frac{25}{1+\frac{36}{1+}}}}}$ 1 ec. |

Generalmente eſprimerò così una frazione continua

$$(A)\ a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c + \cfrac{r}{d + \cfrac{s}{e + \cfrac{t}{f}}}}}\ \text{ec.}$$

855. Qualunque frazione continua ſi può ridurre a frazione comune, ſiccome qualſivoglia frazione comune, o decimale ſi può ridurre a frazione continua. Colla ſemplice regola di ridurre due frazioni allo ſteſſo denominatore ſi ridurranno le frazioni continue a frazione comune, avvertendo che deveſi cominciare l'operazione non dalla prima, ma dall'ultima frazione. Prendo l'eſempio dalla precedente frazione (A), di cui ſi vogliono ridurre a frazione comune i primi termini $a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c}}$ : Comincio a ridurre la parte $\cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c}}$, e mi viene $\cfrac{pc}{bc+q}$, che col primo termine è $a + \cfrac{pc}{bc+q}$, e queſta frazione ridotta di nuovo al comune denominatore trovaſi eſſere $\cfrac{abc + aq + pc}{bc+q} = a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c}}$. Volendo ridurre a frazione comune i primi termini $a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c + \cfrac{r}{d}}}$, comincio a ridurre al comune denominatore la frazione $\cfrac{q}{c + \cfrac{r}{d}}$, e ne ho $\cfrac{dq}{cd+r}$, poſcia riduco $\cfrac{p}{b + \cfrac{dq}{cd+r}}$, con che ritrovo $\cfrac{cdp + pr}{cbd + br + dq}$, poſcia riduco $a + \cfrac{cdp + pr}{cbd + br + dq}$, ed ho finalmente $\cfrac{abcd + abr + adq + cdp + pr}{cbd + br + dq}$.

Lo ſteſſo metodo ſi potrebbe tenere per ridurre a frazione comune una frazione continua comunque prolungata: Ma coll'oſſervare l'ordine dei termini, da' quali ſi com-

compongono queſte frazioni comuni ricavate da frazioni continue, ſi è ravviſata una regola per formare a dirittura queſte frazioni comuni indipendentemente dalla riduzione allo ſteſſo denominatore. La regola è tale che mediante l'eſſere date due di queſte frazioni ſi trova la ſuſſeguente, e così ſempre in poi. Si prenda per la prima di queſte frazioni $\frac{1}{0}$ (queſta frazione ad altro non ſerve, che per trovare la frazione $\frac{ab+p}{b}$, e però far valere la regola pel primo termine), per la ſeconda $\frac{a}{1}$: Sopra queſte due frazioni, e ſopra le altre, che di mano in mano ſi anderanno trovando, ſi ſcrivano per ordine, cominciando dal primo termine $a$, i denominatori delle frazioni continue, e corriſpondentemente al di ſotto vi ſi ſcrivano i numeratori, come quì ſi vede.

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{0}$ | $\frac{a}{1}$ | $\frac{ab+p}{b}$ | $\frac{abc+aq+pc}{bc+q}$ | $\frac{abcd+abr+adq+cdp+pr}{cbd+br+dq}$ | ec. |
| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $t$ | |

Ciò fatto, per avere il numeratore di una qualſivoglia frazione ridotta ſi prenderà l'aggregato del numeratore dell'ultima precedente frazione moltiplicato nella lettera, che gli ſta di ſopra, e del numeratore della penultima moltiplicato nella lettera, che gli ſta di ſotto; e per avere il denominatore ſi prenderà l'aggregato del denominatore della frazione ultima precedente moltiplicato nella lettera, che gli ſta di ſopra, e del denominatore della penultima moltiplicato nella lettera, che gli ſta di ſotto.

856. Queſte frazioni comuni, che ſi ſono dedotte dalle frazioni continue, ſi chiamano le loro equivalenti. Per avere il vero valore di una frazione continua biſognerà prendere l'ultima frazione equivalente, mentre, le precedenti non danno, che un valore proſſimo, il quale tanto più ſi fa eſatto, quanto più la preſa frazione equivalente ſi accoſta all'ultima.

857. Avendo dato il modo di ridurre una frazione continua a frazione comune, dirò adeſſo come ſi poſſa ridurre una frazione comune a frazione continua. Sia data la frazione comune $\frac{a}{b}$, nella quale ſuppongo $a > b$, che però ella è una frazione impropria: Si divida il numeratore $a$ pel denominatore $b$, onde ſi abbia di quoziente $\beta$, e di reſiduo $c$; con queſto reſiduo $c$, che è minore del diviſore $b$, ſi divida lo ſteſſo diviſore, e ne venga di quoziente $\delta$ col reſiduo $d$; di poi con queſto reſiduo $d$ ſi divida il diviſore $c$, e il quoziente ſia $\epsilon$ col reſiduo $e$, e così in poi ſi continui l'operazione finchè la diviſione del diviſore pel reſiduo ſi faccia eſattamente ſenza alcun avanzo, oſſervando lo ſteſſo modo d'operare, che ſi pratica per trovare il maſſimo comun diviſore tra due quantità (giuſta il num. 217.)
Ecco il Calcolo, in cui le lettere $\beta$, $\delta$, $\epsilon$, $\varphi$, $\gamma$ ec. eſprimono i quozienti, e le lettere, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ ec. eſprimono i reſidui.

| | Quoz. | Reſidui | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{b}$ | $\beta$ | $c$ | dunque | $\frac{a}{b}=\beta+\frac{c}{b}$ | I |
| $\frac{b}{c}$ | | $d$ | | $\frac{b}{c}=\delta+\frac{d}{c}$ | II |
| $\frac{c}{d}$ | $\cdot$ | $e$ | | $\frac{c}{d}=\cdot+\frac{e}{d}$ | III |
| $\frac{d}{e}$ | $\varphi$ | $f$ | | $\frac{d}{e}=\varphi+\frac{f}{e}$ | IV |
| $\frac{e}{f}$ | $\gamma$ | $g$ ec. | | $\frac{e}{f}=\gamma+\frac{g}{f}$ | V |

Ma dalla frazione II ſi ha $\frac{b}{\delta+\frac{d}{c}\times c}=1$, cioè $\frac{b}{\delta+\frac{d}{c}}=c$, e finalmente $\frac{1}{\delta+\frac{d}{c}}=\frac{c}{b}$ (A). Per la ſteſſa ragione dalla frazione III. ſi ha $\frac{1}{\cdot+\frac{e}{d}}=\frac{d}{c}$ (B). Dalla frazione IV. ſi ha $\frac{1}{\varphi+\frac{f}{e}}=\frac{e}{d}$ (C); e dalla frazione V. ſi ha $\frac{1}{\gamma+\frac{g}{f}}=\frac{f}{e}$. Quindi nella frazione I. ſoſtituendo il poc' anzi ritrovato valore (A) in luogo di $\frac{c}{b}$, e nella frazione (A) ſoſtituendo in vece di $\frac{d}{c}$ il ſuo valore (B), così nella frazione (B) rimettendo il valore (C) in cambio di $\frac{e}{d}$ ec., ſi avrà finalmente la ricercata frazione continua uguale alla data frazione $\frac{a}{b}$, come ſegue

$$\frac{a}{b}=\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\cdot+\cfrac{1}{\varphi+\cfrac{1}{\gamma\ \text{ec.}}}}}$$

857. Riduciamo il metodo eſpoſto a un eſempio numerico. Si debba ridurre a frazione continua la frazione comune $\frac{3425}{1148}$. Faccio la diviſione del numeratore pel de-

denominatore, poſcia divido il diviſore pel reſiduo, e di nuovo il diviſore pel reſiduo, e così continuamente fino in ultimo; Queſte diviſioni indicate ſi vedano in D, e i corriſpondenti quoti coi reſidui diviſi pel diviſore ſi vedano in E

| D | | E |
|---|---|---|
| $\frac{3425}{1148}$ | $= 2 +$ | $\frac{1129}{1148}$ |
| $\frac{1148}{1129}$ | $= 1 +$ | $\frac{19}{1129}$ |
| $\frac{1129}{19}$ | $= 59 +$ | $\frac{8}{19}$ |
| $\frac{19}{8}$ | $= 2 +$ | $\frac{3}{8}$ |
| $\frac{8}{3}$ | $= 2 +$ | $\frac{2}{3}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $= 1 +$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{2}{1}$ | $= 2$ | |

Fatto queſto preparativo ſi avrà giuſta il numero precedente la cercata frazione continua uguale alla data $\frac{3425}{1148}$, che trovaſi eſſere

$$\frac{3425}{1148} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{59 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Giuſta il num. 855. ſi riduca queſta frazione continua a frazione comune, e ſi troverà appunto uguale alla data frazione $\frac{3425}{1148}$.

858. Se la data frazione comune $\frac{a}{b}$ da ſvolgerſi in frazione continua foſſe ſtata frazione propria, cioè ſe foſſe ſtato $a < b$, in tal caſo ſi ſarebbe dovuto cominciare dal dividere il denominatore pel numeratore.

Una coſa quì ſi oſſervi, che ſe una data frazione continua ſi ridurrà a frazione equivalente, e lo ſteſſo ſi ripeta con omettere l'ultimo termine, o frazione della fra-

frazione continua, indi ſi ſottragga queſta frazione dalla precedente, traſcurando poſcia il comune denominatore, il reſiduo ſara $\pm 1$. Cosi la frazione continua

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{59 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

ridotta a frazione equivalente è $\frac{3425}{1148}$. Ora della precedente frazione continua ſi ommetta l'ultimo termine, o frazione $\frac{1}{2}$ e ſi riduca a frazione equivalente ſolamente la frazione

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{59 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

e ſi avrà $\frac{1262}{423}$. Si faccia $\frac{3425}{1148} - \frac{1262}{423}$, e fatta la riduzione allo ſteſſo denominatore, che poſcia ſi traſcura, ſi ottiene $1448775 - 1448776 = -1$. Queſto pertanto è il modo, al quale ho rimeſſo al num. 439, con cui, data una frazione qualunque, ſe ne trova un'altra, che ſottratta dalla propoſta, e traſcurato il comune denominatore, laſcia un reſiduo $= \pm 1$: Si deve cioè ridurre a frazione continua la frazione data, indi ridurre a frazione equivalente tale frazione continua mutilata dell'ultimo termine, e queſta frazione equivalente ſarà la ricercata Così al ſopraddetto num. 439 ſi è preſa la frazione $\frac{14}{25}$ da ſottrarſi da $\frac{33}{59}$: Ma queſta frazione $\frac{14}{25}$ ſi trova con ridurre a frazione continua la frazione $\frac{33}{59}$, che è

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}},$$

di cui ſi ommetta l'ultimo termine $\frac{1}{2}$, onde reſti

1

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

la di cui frazione equivalente è appunto $\frac{14}{25}$.

La verità di queſta oſſervazione ſi può dimoſtrare con aſſumere una frazione continua indeterminata, per eſempio $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$ ec.

dalla quale ſi deducono le ſeguenti frazioni comuni

I. $\frac{ab+1}{b}$; II. $\frac{abc+a+c}{bc+1}$; III. $\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$ ec. Dalla prima ſi ſottragga la ſeconda, e ommettendo il comune denominatore, ſi avrà $ab^2c+bc+ab+1-ab^2c-ab-bc=1$. Dalla ſeconda ſi ſottragga la terza, e ſi avrà $ab^2c^2d+2abcd+bc^2d+ab^2c+ab+bc+ad+cd-ab^2c^2d-2abcd-bc^2d-ab^2c-ab-bc-ad-cd-1=-1$ ec.

Dal che ſi vede, che le frazioni comuni, le quali ſi deducono dalle frazioni continue ſono ſempre ridotte ai loro minimi termini.

859. E' facile il riflettere, che ſe la frazione equivalente ſarà una frazione propria, il primo termine della frazione continua ſarà ſempre una frazione, e ſolamente in caſo, che la frazione equivalente ſia impropria, la frazione continua comincierà da una quantità intera.

860. Vengo ora alla maniera di ridurre una frazione continua in ſerie. A queſto fine comincio ad oſſervare, che fatta uguale ad $x$ una frazione continua, come la ſeguente $a+\cfrac{p}{b+\cfrac{q}{c+\cfrac{r}{d+\cfrac{s}{e}}}}$ ec.

il primo termine $a$, poichè diminuito della rimanente frazione, colla quale per ipoteſi è uguale ad $x$, dovrà così ſolitario eſſere minore di $x$, cioè $a<x$; ma $a+\frac{p}{b}=\frac{ab+p}{b}>x$, perchè il denominatore della frazione $\frac{p}{b}$ ſi trova diminuito della ſeguente frazione continua, la quale ſuppoſta $=z$ renderebbe $a+\frac{p}{b+z}=x$, conſeguentemente dovrà eſſere $a+\frac{p}{b}>x$: Parimente

$a+p$

$a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c}} = \frac{abc+aq+pc}{bc+q} < x$, perchè il denominatore della frazione $\frac{q}{c}$ eſſendo diminuito della reſidua ſuſſeguente frazione continua, egli è perciò minore del giuſto, quindi è, che la frazione $\frac{q}{c}$ diventa maggiore del giuſto, conſeguentemente il ſuo numeratore $q$ ſi fa riſpettivamente maggiore del giuſto; ma eſſendoſi egli fatto maggiore, la frazione $\frac{p}{b+q}$ è per queſto motivo divenuta minore del giuſto, dunque deve eſſere $a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c}} = \frac{abc+aq+pc}{bc+q} < x$.

Proſeguendo lo ſteſſo diſcorſo ſi dimoſtrerà, che

$a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c + \cfrac{r}{d}}} = \frac{abcd+abr+adq+cdp+pr}{cbd+br+dq} > x$, e così alternativamente in ſeguito. Queſte frazioni comuni poi ſono continuamente convergenti verſo il vero valore della quantità eſpreſſa dalla frazione continua; e queſto vero valore medierà ſempre fra due quali ſi ſiano frazioni conſecutive. Le frazioni equivalenti di una data frazione continua ſiano le ſeguenti $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{p}$, $\frac{d}{q}$ ec. con ſottrarſi la prima dalla ſeconda, ſi avrà (pel num. 858.) $\frac{b}{n} - \frac{a}{m} = \frac{1}{mn}$; con ſottrarſi la ſeconda dalla terza ne verrà $\frac{c}{p} - \frac{b}{n} = \frac{1}{np}$; con ſottrarſi la terza dalla quarta ſi avrà $\frac{d}{q} - \frac{c}{p} = \frac{1}{pq}$ ec. Quindi le frazioni comuni $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{p}$ ec., non poſſono mai differire dal vero valore della quantità eſpreſſa dalla frazione continua, che di una quantità minore di $\frac{1}{mn}$; $\frac{1}{np}$; $\frac{1}{pq}$ ec., lo che dà lume per giudicare di quanto ſi accoſti al vero valore cercato. Siccome poi, come pur ora ſi è detto $m < n$, $n < p$, $p < q$ ec., ſi avrà $\frac{1}{m^2} > \frac{1}{mn}$; $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{np}$; $\frac{1}{p^2} > \frac{1}{pq}$ ec., vale a dire l'errore di ciaſcuna frazione ſarà ſempre minore dell'unità diviſa pel quadrato del denominatore della ſteſſa frazione.

Poichè queſte frazioni equivalenti ſono alternativamente maggiori, e minori del vero valore $x$ della frazione continua, ſi prendano le ſucceſſive loro differenze, ſottraendo la prima dalla ſeconda, la ſeconda dalla terza, la terza dalla quarta ec., nel qual modo queſte differenze, che anderanno ſempre diminuendo da una frazione all'altra formeranno una ſerie, la quale finirà col finire la frazione continua, di cui eſprimerà il valore.

861.

861. Prendiamo le frazioni equivalenti alle ſucceſſive porzioni della frazione continua del num. 854, che ſono le ſeguenti

$$\text{I}\ \frac{a}{1} \qquad \text{II}\ \frac{ab+p}{b} \qquad \text{III}\ \frac{abc+aq+pc}{bc+q} \qquad \text{IV}\ \frac{abcd+abr+adq+cdp+pr}{cbd+br+dq}$$

$$\text{V}\ \frac{abcde+abcs+abce+adeq+aqs+cdep+cps+epr}{bcdc+bcs+ber+deq+qs}\ \text{ec.}$$

Dalla ſeconda ſi ſottragga la prima, e ſi avrà $\frac{p}{b}$ (le ſottrazioni ſi fanno al ſolito con ridurre prima le frazioni allo ſteſſo denominatore); col ſottrarſi la ſeconda dalla terza ne viene $-\frac{pq}{b\times\overline{bc+q}}$; la differenza tra la terza, e la quarta è $\frac{+pqr}{d\times\overline{bc+q}^2+br\times\overline{bc+q}}$; la differenza, che naſce dal ſottrarſi la quarta dalla quinta è $\frac{-pqrs}{b^2e\times\overline{cd+r}^2+ds\times\overline{bc+q}^2+2bdeq\times\overline{cd+r}+brs\times\overline{bc+q}+d^2eq^2}$ ec.

La ſerie adunque nella quale ſi ſvolge la frazione continua del num. 854 è

$$a+\frac{p}{b}-\frac{pq}{b\times\overline{bc+q}}+\frac{pqr}{d\times\overline{bc+q}^2+br\times\overline{bc+q}}$$

$$\frac{-pqrs}{b^2e\times\overline{cd+r}^2+ds\times\overline{bc+q}^2+2bdeq\times\overline{cd+r}+brs\times\overline{bc+q}+d^2eq^2}\ \text{ec.}$$

862. Facciamone l'applicazione alla frazione continua del num. 857. Le frazioni equivalenti, che alle di lei ſucceſſive parti corriſpondono, ſono le ſeguenti $\frac{2}{1}.\ \frac{3}{1}.\ \frac{179}{60}.\ \frac{361}{121}.\ \frac{901}{302}.\ \frac{1262}{423}.\ \frac{3425}{1148}$. Prendendo nel modo detto le differenze tra l'una, e l'altra di queſte frazioni, ſi ha la cercata ſeguente ſerie $2+1-\frac{1}{60}+\frac{1}{7260}-\frac{1}{36542}+\frac{1}{127746}-\frac{1}{485604}$, che dà il valore della propoſta frazione continua. Di fatto la ſomma dei termini poſitivi di queſta ſerie è $+\frac{463740481}{154572660}$, e la ſomma dei negativi è $-\frac{370338361}{221811176710}$: Ora levando la ſeconda di queſte frazioni dalla prima ſi ha $\frac{2045813055457598 25}{6857206571989 4972}$, che è il valore della trovata ſerie, e però il valore della propoſta frazione continua.

863. Da quanto ho detto al num. 859. s'intende, che i termini della ſerie, nella quale ſi ſvolge una frazione continua, non conſiderando il primo, procedono ſempre con ſegni alternanti.

864. Se i termini di una frazione continua procederanno con una costante legge, come sarebbero per esempio le tre seguenti frazioni,

I.
$$x = \cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b}}}}\ \text{ec.}$$

II.
$$x = \cfrac{a}{b+\cfrac{d}{e+\cfrac{a}{b+\cfrac{i}{c+\cfrac{a}{b}}}}}\ \text{ec.}$$

III.
$$x = \cfrac{a}{b+\cfrac{d}{c+\cfrac{e}{i+\cfrac{a}{b+\cfrac{d}{c+\cfrac{e}{i+\cfrac{a}{b}}}}}}}\ \text{ec.}$$

delle quali i termini vanno ritornando gli stessi, si potrà facilmente averne la loro somma, mentre la prima di queste frazioni si rappresenterà così $x = \frac{a}{b+x}$, la quale si riduce alla seguente espressione $x^2 + bx = a$, da cui si ricava facilissimamente il valore di $x$: La seconda frazione si esprime così $x = \cfrac{a}{b+\cfrac{d}{c+x}}$, la quale si riduce ad $x^2 + c + \frac{d-a}{b} \times x = \frac{ac}{b}$. La terza frazione si esprime così $x = \cfrac{a}{b+\cfrac{d}{c+\cfrac{e}{i+x}}}$, che si riduce ad $x^2 + i - \frac{ac}{bc+d} \times x = \frac{aci}{bc+d}$.

865.

865. Da ciò si scorge essere facilissima cosa esprimere con una frazione continua la radice di una equazione quadrata: Come essendo data l' equazion generale $x^2 - px - q = 0$, si farà $x^2 = px + q$, e fatta la divisione per $x$, si avrà $x = p + \frac{q}{x}$, cioè $x = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p}}}}$ ec.

Con facilità grande si otterrà la somma di quanti si vogliano termini di questa sorte di frazioni continue mediante la seguente formola

$$a^n + \frac{\overline{n-1}}{1} a^{n-2} b + \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-3}}{1. \quad 2.} a^{n-4} b^2 + \frac{\overline{n-4} \times \overline{n-5} \times \overline{n-6}}{1. \quad 2. \quad 3.} a^{n-6} b^3 +$$

$$\frac{\overline{n-7} \times \overline{n-8} \times \overline{n-9} \times \overline{n-10}}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4.} a^{n-8} b^4 + \frac{\overline{n-9} \times \overline{n-10} \times \overline{n-11} \times \overline{n-12} \times \overline{n-13}}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.} a^{n-10} b^5 +$$

$$\frac{\overline{n-11} \times \overline{n-12} \times \overline{n-13} \times \overline{n-14} \times \overline{n-15} \times \overline{n-16}}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6.} a^{n-12} b^6 + \text{ec.}$$

in cui la lettera $n$ rappresenta il numero de' termini della frazione continua, che si vogliono sommare; la lettera $a$ esprime il coefficiente del secondo termine dell' equazione, e la lettera $b$ disegna l'ultimo termine, presi l' uno, e l' altro con segno contrario. Ecco poi come si è dedotta la precedente formola. Sia la seguente frazione continua $x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a}}}$ ec.

nata dall' equazione $x^2 - ax - b = 0$. Dei di lei due primi termini $a + \frac{b}{a}$ la somma è $\frac{a^2 + b}{a}$: dei tre primi $a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a}}$ la somma è $\frac{a^3 + 2ab}{a^2 + b}$: dei quattro primi $a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a}}}$ la somma è $\frac{a^4 + 3a^2 b + b^2}{a^3 + 2ab}$: dei cinque primi termini la somma è $\frac{a^5 + 4a^3 b + 3ab^2}{a^4 + 3a^2 b + b^2}$: dei sei primi è $\frac{a^6 + 5a^4 b + 6a^2 b^2 + b^3}{a^5 + 4a^3 b + 3a b^2}$: dei

primi ſette è $\frac{a^7+5a^5b+10a^3b^2+4ab^3}{a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3}$ ec. Si oſſervino queſte ſomme, e ſi ſcorgerà, che il denominatore di una qualunque è lo ſteſſo, che il numeratore della precedente. Non è dunque neceſſario cercar altro, che i numeratori: A queſto oggetto oſſerviamo con qual legge procedono. Eccoli per ordine

| | |
|---|---|
| di un termine | $a$ |
| di due | $a^2+b$ |
| di tre | $a^3+2ab$ |
| di quattro | $a^4+3a^2b+b^2$ |
| di cinque | $a^5+4a^3b+3ab^2$ |
| di ſei | $a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3$ |
| di ſette | $a^7+6a^5b+10a^3b^2+4ab^3$ |
| di otto ec. | |

Ciaſcun numeratore pertanto coſta di tanti termini, quante unità contiene la metà del numero de' termini da ſommarſi accreſciuto di una unità, ſe tal numero è diſpari, e accreſciuto di 2, ſe è pari: Così il numeratore, che naſce dalla ſomma di ſette termini contiene termini $\frac{7+1}{2}=4$; e il numeratore nato dalla ſomma di otto termini contiene termini $\frac{8+2}{2}=5$. In ſecondo luogo il maſſimo eſponente di $a$ è ſempre uguale al numero de' termini da ſommarſi: In terzo luogo queſte potenze di $a$ in ciaſcun numeratore decreſcono con queſt'ordine $a^n$, $a^{n-2}$, $a^{n-4}$, $a^{n-6}$ ec.: In quarto luogo le potenze di $b$ aſcendono ſecondo la ſerie de' numeri naturali: Per lo che queſte potenze di $a$, e di $b$ ſi combinano così;

$$a^n \quad a^{n-2}b \quad a^{n-4}b^2 \quad a^{n-6}b^3 \quad a^{n-8}b^4 \text{ ec.}$$

onde, non curando per ora i coefficienti, la ſomma di un numero $n$ di termini trovati eſſere $a^n+a^{n-2}b+a^{n-4}b^2+$ ec. Quanto poi ai coefficienti, riſpetto ai ſecondi termini eſſi ſono i genitori del primo genere; riſpetto ai terzi termini ſono i figurati del primo ordine nel primo genere; dei quarti termini ſono i figurati del ſecondo ordine ec.: Ma de' genitori deveſi prendere il quarto volendo la ſomma di cinque termini; il quinto per la ſomma di ſei termini, e generalmente l'$\overline{n-1}^{eſimo}$ per la ſomma di $n$ termini. De' figurati del primo ordine ſi deve prendere il terzo per la ſomma di ſei termini, e generalmente il $\overline{n-3}^{eſimo}$ per la ſomma di $n$ termini. Ora mediante ciò ſi è ottenuta la precedente formola ecumenica inſerviente a ritrovare immediatamente la ſomma di quanti termini ſi vogliono di una frazione continua della forma $x=\cfrac{a+b}{\cfrac{a+b}{\cfrac{a+b}{a}}}$ ec. indipendentemente dalle ſomme precedenti.

Non

Non ſolamente poi per mezzo delle frazioni continue ſi può eſprimere la radice di una equazione quadrata, ma ſi può approſſimare quanto ſi vuole al vero valore delle radici irrazionali di qualſivoglia equazione, e a differenza degli altri metodi di approſſimazione, mediando (pel num. 860.) il vero valore fra due frazioni conſecutive, giudicare conſeguentemente della quantità dell'approſſimazione. Per darne un ſaggio ſia l'equazione $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}\ldots+m=0$, che abbia una radice irrazionale, il di cui proſſimo valore intero ſia $=p$, così che ſia $x>p$, e $x<p+1$. Si ſupponga $x=p+\frac{1}{y}$, e mediante la ſoſtituzione di queſto valore ſi trasformi l'equazione data, così che ne venga l'equazione (A) $a'y^n+b'y^{n-1}+c'y^{n-2}\ldots+m'=0$: E ſiccome $\frac{1}{y}$ ſi ſuppone una frazione propria, perciò ſarà $y>1$, conſeguentemente l'equazione (A) avrà neceſſariamente almeno una radice reale maggiore dell'unità. Per mezzo dell'equazione (A) ſi trovi il valore intero proſſimo di $y$, che ſi dica $=q$; indi ſi faccia $y=q+\frac{1}{z}$, e mediante la ſoſtituzione di queſto valore ſi trasformi l'equazione (A), con che ſi avrà l'equazione (B) $a''z^n+b''z^{n-1}+c''z^{n-2}\ldots+m''=0$, la quale per la ragione precedente avrà per lo meno una radice reale $z$ maggiore dell'unità. Si trovi il proſſimo intero valore di $z$, che ſuppongo $=r$, poſcia di nuovo ſi riperano le precedenti operazioni facendo $z=r+\frac{1}{u}$, e ſoſtituendo queſto valore nell'equazione (B), lo che la cambierà in $a'''u^n+b'''u^{n-1}+c'''u^{n-2}\ldots+m'''=0$, della cui radice reale il proſſimo vero valore ſi dica $=s$, ritrovato il quale ſi faccia $u=s+\frac{1}{w}$ ec. e così in poi finchè ſi vuole. La radice adunque irrazionale, il di cui proſſimo valore ſi cerca, ſarà eſpreſſa dalla ſeguente frazione continua, cioè

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{w}}}}\quad\text{ec.}$$

la quale fra tutte le eſpreſſioni ſarà la più convergente poſſibile verſo il vero valore cercato.

Ho ſuppoſto, che le radici, alle quali deveſi approſſimare ſiano poſitive; ſe foſſero negative, per renderle poſitive baſterà regolarſi giuſta il num. 501. Quando due, o più radici dell'equazione foſſero bensì ineguali, ma nel cercare il loro proſſimo valore intero ſi trovaſſe ſoltanto $p$, in tal caſo i valori di queſte radici ſaranno rappreſentati da $p+\frac{1}{y}$, ma la $y$ avrà due, o più diverſi valori rea-

reali maggiori dell' unità. Lo ſteſſo ſi dica riſpetto a $z$ nell' equazione $y = q + \frac{1}{z}$, qualora i valori di $y$ aveſſero lo ſteſſo proſſimo valore intero $q$.

866. Reſta per ultimo a eſporre la maniera di ridurre una qualunque ſerie alternante in frazione continua: Per ottenere ciò ſi prenda la ſerie generale del num. 861., che è $a + \frac{p}{b} - \frac{pq}{b \times bc + q} +$ ec., la quale ſi è dedotta dalla frazione continua $a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c - \text{ec.}}}$, della qual ſerie ſi paragoni ciaſcun termine con ciaſcun termine della ſerie propoſta, e prendendoſi ad arbitrio i numeratori $p$, $q$, $r$ ec. della frazione continua, che ſi cerca, mediante gli accennati paragoni ſi determinino i valori de' denominatori $b$, $c$, $d$ ec., o pure prendendoſi ad arbitrio i denominatori $b$, $c$, $d$ ec., ſi determinino i valori de' numeratori. Solamente deveſi avvertire, che i numeratori per eſempio preſi ad arbitrio ſiano tali, che rendano i denominatori numeri interi; o pure i denominatori preſi ad arbitrio diano pe' numeratori de' numeri interi. Determinati poi, che ſi ſaranno i valori de' numeratori (ſuppoſto che ſi ſiano preſi ad arbitrio i denominatori), o de' denominatori (ſe ſi ſono preſi ad arbitrio i numeratori), ſi ſoſtituiſcano nella frazione $a + \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c - \text{ec.}}}$ i numeratori in luogo di $p$, $q$, $r$ ec., e i denominatori in luogo di $b$, $c$, $d$ ec., e ciò fatto ſi avrà la cercata frazione continua, alla quale ſi riduce la propoſta ſerie.

867. Poichè il modo di operare è ſempre lo ſteſſo, qualunque ſia la ſerie data, la quale o può eſſere $x = A - B + C - D + E - F +$ ec., o $x = \frac{a}{A} - \frac{a}{B} + \frac{a}{C} - \frac{a}{D} +$ ec.; o $x = \frac{a}{A} - \frac{a}{AB} + \frac{a}{ABC} - \frac{a}{ABCD} +$ ec., o $x = A - By + Cy^2 - Dy^3 + Ey^4 -$ ec.; o $x = \frac{A}{P} - \frac{By}{Qz} + \frac{Cy^2}{Rz^2} - \frac{Dy^3}{Sz^3} +$ ec.; in ſomma può avere qualſivoglia forma; però, per venire a un' eſempio, ſupponiamo che ſia data da ridurſi in frazione continua la ſerie $x = A - B + C - D + E -$ ec.: Si paragonino i termini di queſta ſerie coi termini della ſerie $x = \frac{p}{b} - \frac{pq}{b \times bc + q} +$ ec., e ſi avranno le ſeguenti equazioni

I. $A = \frac{p}{b}$

II. $B = \frac{pq}{b\sqrt{bc+q}}$

III. $C = \frac{pqr}{d\sqrt{bc+q}+br\sqrt{bc+q}}$

IV. $D =$ ec.

o sia per maggiore semplicità, che per altro è lo stesso, perchè si divide l'uno, e l'altro membro per la stessa quantità.

1. I. $A = \frac{p}{b}$

2. II. $\frac{B}{A} = \frac{q}{bc+q}$

3. III. $\frac{C}{B} = \frac{br}{d\sqrt{bc+q}+br}$

4. IV. $\frac{D}{C}$ ec.

Quindi dalla 1. I. si ha $p = Ab$ (si prendano ad arbitrio i denominatori $b$, $c$, $d$ ec.), dalla 2. II. si ottiene $q = \frac{Bbc}{A-B}$, dalla 3. III. ne viene $\frac{Cbcd + Cdq}{Bb - Cb} = r$, in cui rimettendo il poc'anzi trovato valore di $q$, si ha $\frac{Cbcd + \frac{BCbcd}{A-B}}{Bb - Cb} = r$, vale a dire con farsi le debite riduzioni sarà $\frac{ACcd}{\sqrt{A-B}\sqrt{B-C}}$. Collo stesso metodo si determineranno gli altri numeratori $s$, $t$ ec. Ma affinchè questi numeratori $p$, $q$, $r$ ec. siano numeri interi dovrassi a ciò avere riguardo nella scielta de' denominatori: Si faccia pertanto $b = 1$, $c = A - B$, $d = B - C$ ec., con che sarà $p = A$, $q = B$, $r = AC$ ec., per lo che nella frazione continua $x = +\cfrac{p}{b+\cfrac{q}{c+\cfrac{r}{d}}}$ — ec. sostituendosi questi valori di $p$, $q$, $r$ ec. di $b$, $c$, $d$ ec., si avrà finalmente quello che si cercava, cioè

$$x = A - B + C - D + \text{ec.} = \cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D}}}} \text{ ec.}$$

868. Istessamente si debba ridurre in frazione continua la serie seguente $x = \frac{A}{P} - \frac{ABv}{PQz} + \frac{ABCv^2}{PQRz^2}$ — ec. Si paragonino i termini di questa serie coi termini del-

della ſerie $x = \frac{p}{b} - \frac{pq}{b \times \overline{bc+q}} + \text{ec.}$ e ſi avrà

I. $\frac{A}{P} = \frac{p}{b}$

II. $\frac{ABy}{PQz} = \frac{pq}{b \times \overline{bc+q}}$

III. $\frac{ABCy^2}{PQRz^2} = \frac{pqr}{d \times \overline{bc+q}^2 + br \times \overline{bc+q}}$

IV. ec.

cioè I. $p = \frac{Ab}{P}$. II. $\frac{P}{A} \times \frac{ABy}{PQz} = \frac{b}{p} \times \frac{pq}{b \times \overline{bc+q}}$, e però $\frac{By}{Qz} = \frac{q}{bc+q}$, onde $Bbcy + Bqy = Qqz$, conſeguentemente $q = \frac{Bbcy}{Qz - By}$. III. $\frac{PQz}{ABy} \times \frac{ABCy^2}{PQRz^2} = \frac{b \times \overline{bc+q}}{pq} \times \frac{pqr}{d \times \overline{bc+q}^2 + br \times \overline{bc+q}}$, cioè $\frac{Cy}{Rz} = \frac{br}{d \times \overline{bc+q} + br}$, che ſi riduce a $Cbcdy + Cdqy + Cbry = Rbrz$, quindi $r = \frac{Cbcdy + Cdqy}{Rbz - Cby}$, la quale mediante la ſoſtituzione del poc'anzi ritrovato valore di $q$ ſi cambia in $\frac{Cbcdy + \frac{BCbcdy^2}{Qz - By}}{Rbz - Cby}$, cioè $r = \frac{CQcdyz}{\overline{Rz - Cy} \times \overline{Qz - By}}$. Ora acciò queſti numeratori $p$, $q$, $r$ ec. ſiano quantità intere, ſi deſumano i denominatori $b$, $c$, $d$ ec. come ſegue, $b = Pz$, $c = Qz - By$, $d = Rz - Cy$ ec., onde fatta la ſoſtituzione di queſti valori, ſarà $p = Az$, $q = BPyz$, $r = CQyz$, ec.; e però nella frazione $x = \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c + \cfrac{r}{d + \cfrac{s}{e} - \text{ec.}}}}$

ſo-

sostituendo questi valori di $p$, $q$, $r$ ec., e di $b$, $c$, $d$, si avrà finalmente $x = \frac{A}{P} - \frac{ABy}{PQz} + \frac{ABCy^2}{PQRz^2} - \text{ec.} = \cfrac{Az}{Pz + BPyz \over \cfrac{Qz - By + CQyz}{Rz - Cy} + \text{ec.}}$

869. Acciò la dottrina esposta riesca ancora più chiara soggiungerò un esempio numerico. Debbasi ridurre a frazione continua la seguente serie del num. 828. $x = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \text{ec.}$, la quale viene espressa dalla serie generale $x = \frac{a}{A} - \frac{a}{A^2} + \frac{a}{A^3} - \frac{a}{A^4}$ ec. Si prenda al solito la serie ecumenica del num. 861., che è $\frac{p}{b} - \frac{pq}{b\sqrt{bc+q}} + \frac{pqr}{d\sqrt{bc+q}^2 + br\sqrt{bc+q}}$ ec., e si paragoni ciascun termine di questa serie con ciascun termine della serie proposta, e si avrà

I. $\frac{p}{b} = \frac{2}{3}$ cioè 1. I. $\frac{p}{b} = \frac{2}{3}$

II. $\frac{pq}{b\sqrt{bc+q}} = \frac{2}{9}$ 2. II. $\frac{b}{p} \times \frac{pq}{b\sqrt{bc+q}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{9}$, e però $\frac{q}{bc+q} = \frac{1}{3}$

III. $\frac{pqr}{d\sqrt{bc+q}^2 + br\sqrt{bc+q}} = \frac{2}{27}$ 3. III. $b \times \frac{\sqrt{bc+q}}{pq} \times \frac{pqr}{d\sqrt{bc+q}^2 + br\sqrt{bc+q}} = \frac{9}{2} \times \frac{2}{27}$

IV. vale a dire $\frac{br}{dbc+dq+br} = \frac{1}{3}$ ec.

Dalla 1. I. si ricava $p = \frac{2b}{3}$. Dalla 2. II. si ha $3q = bc + q$, e però $q = \frac{bc}{3-1}$. Dalla 3. III. ne viene $3br = dbc + dq + br$, quindi $r = \frac{dbc+dq}{3b-b}$, in cui sostituendo il poc'anzi trovato valore di $q$, si avrà $r = \cfrac{dbc + \frac{dbc}{3-1}}{3b-b} = \frac{2dc}{\overline{3-1} \times \overline{3-1}}$ ec.

Ora affinchè questi numeratori $p$, $q$, $r$ ec. risultino numeri interi, si determinino i denominatori $b$, $c$, $d$ ec. così $b = 1$, $c = 3-1$, $d = 3-1$ ec., con che sarà $p = \frac{2}{}$

$\frac{2}{3}$, $q = 1$, $r = 3$ ec. Si foſtituiſcano adunque queſti valori di $p$, $q$, $r$ ec., e di $b$, $c$, $d$ ec. nella frazione continua generale $x = \cfrac{p}{b + \cfrac{q}{c + \cfrac{r}{d}}}$ ec. e ſi avrà

$$x = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \text{ec.} = \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{(3-1) + \cfrac{3}{(3-1) + \text{ec.}}}}$$

o ſia $= \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{2}}}$ ec. , lo che ſi doveva trovare.

## ARTICOLO III.

*Della moltiplicazione, diviſione, elevazione a poteſtà, eſtrazione di radici nelle ſerie infinite.*

870. PEr moltiplicare una ſerie infinita in un'altra non altro richiedeſi, che far uſo della ſolita regola della moltiplicazione comune, moltiplicando cioè con ciaſcun termine della ſerie moltiplicante tutti i termini della ſerie moltiplicanda. Si debba per eſempio moltiplicare la ſerie (Δ) per la ſerie (Π): Si operi al ſolito, e ſi avrà di prodotto la ſerie (Σ). Ecco il Calcolo.

(Δ) $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + Ix^8$ ec.
(Π) $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + ix^8$ ec.

(Σ) $Aa + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + aFx^5 + aGx^6 + aHx^7 + aIx^8$ ec.
$+ Abx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 + bEx^5 + bFx^6 + bGx^7 + bHx^8$ ec.
$+ Acx^2 + cBx^3 + cCx^4 + cDx^5 + cEx^6 + cFx^7 + cGx^8$ ec.
$+ Adx^3 + dBx^4 + dCx^5 + dDx^6 + dEx^7 + dFx^8$ ec.
$+ Aex^4 + eBx^5 + eCx^6 + eDx^7 + eEx^8$ ec.
$+ Afx^5 + fBx^6 + fCx^7 + fDx^8$ ec.
$+ Agx^6 + gBx^7 + gCx^8$ ec.
$+ Ahx^7 + hBx^8$ ec.
$+ Aix^8$ ec.

871.

871. Col ſolo oſſervare queſto prodotto ſi conoſcerà, che per prolungare la ſerie non è neceſſario continuare la moltiplicazione, baſtando tenere la legge, colla quale procedono i coefficienti di ciaſcun termine, la qual legge ſomminiſtra ancora il modo di ritrovare immediatamente un qualſivoglia termine indipendentemente dagli altri. Queſta legge ſi è, che un termine qualunque $m$ nella ſerie trovataſi pel prodotto colla di tante parti, quante ne moſtra il numero $n$ eſprimente il numero de' primi termini della ſerie moltiplicante, co' quali intendeſi fatta la moltiplicazione, o ſia, che è lo ſteſſo, quante ne moſtra il medeſimo numero $m$, e queſte parti riſultano dal moltiplicarſi a due a due i coefficienti di altrettanti termini delle due ſerie, moltiplicanda, e moltiplicante per modo, che il coefficiente del primo termine della ſerie moltiplicanda ſi moltiplichi nel coefficiente del termine $m$ della ſerie moltiplicante, poi il coefficiente del ſecondo termine della ſerie moltiplicanda ſi moltiplichi nel coefficiente del termine $m-1$ della ſerie moltiplicante ec.

872. Se pertanto ſi dovrà moltiplicare la ſerie $1-2+4-8+16-$ ec. per la ſerie $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{1}{16384}$ ec., ſi opererà come ſi è fatto poc'anzi così

$$\begin{array}{l}
1-2+4-8+16 \text{ ec.} \\
2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{1}{16384} \text{ ec.} \\
\hline
2-4+8-16+32 \\
\quad +\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-2 \\
\qquad -\frac{1}{64}+\frac{1}{32}-\frac{1}{16} \\
\qquad\quad +\frac{1}{512}-\frac{1}{256} \\
\qquad\qquad -\frac{1}{16384} \\
\hline
\text{Prodotto} \quad 2-\frac{3}{4}+\frac{479}{64}-\frac{7663}{512}+\frac{492431}{16384}
\end{array}$$

Da ciò, che ſi è detto, s'intende coſa dovrà eſſere $\overline{1 \pm nm}^{\pm m} \times \overline{1 \pm nn}^{\pm am}$ (A), in cui $a$ ſia un numero razionale, intero, o rotto, ed $m$ ſia un numero razionale, o irrazionale, o immaginario, o pure la quantità $\overline{1 \pm nm}^{\pm m} \times \overline{1 \pm nn}^{\pm am} \pm \overline{1 \pm nm}^{\mp m} \times \overline{1 \pm nn}^{\mp am}$ (B), mentre la prima (A) non vorrà eſprimere altro, che il prodotto della ſerie di $\overline{1 \pm nm}^{\pm m}$ nella ſerie di $\overline{1 \pm nn}^{\pm am}$; e la ſeconda (B) rappreſenta la ſomma, o la differenza di due prodotti, il primo nato dalle ſerie

di $\overline{1 \pm nm}^{\pm m}$, e di $\overline{1 \pm nn}^{\pm am}$, e il ſecondo nato dalle ſerie di $\overline{1 \pm nm}^{\mp bm}$, e di $\overline{1 \pm nn}^{\mp am}$

873. Quanto al modo di dividere una ſerie per un'altra, o ſi può fare l'operazione mediante la regola ordinaria della diviſione, o pure con ſupporre il quoziente di queſta diviſione uguale ad una nuova ſerie indeterminata, la quale dev ſi moltiplicare nella ſerie, che ſerve di diviſore, indi mediante il paragone de' termini devonſi ritrovare i valori de' coefficienti de' termini dell' aſſunta ſerie indeterminata.

874. Per venire all'eſempio debbaſi in primo luogo dividere la quantità $\varphi$ per la ſerie (Δ) $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ ec. Si faccia $\frac{\varphi}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ ec. $= A + Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ ec. Si moltiplichi il denominatore della frazione nella ſerie indeterminata, e ſi avrà

$$\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \text{ ec.} \\ a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \text{ ec.} \\ \hline \left\{\begin{array}{l} Aa + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 \text{ ec.} \\ \quad + Abx + Bbx^2 + bCx^3 + bDx^4 \text{ ec.} \\ \quad\quad + Acx^2 + Bcx^3 + Ccx^4 \text{ ec.} \\ \quad\quad\quad + Adx^3 + Bdx^4 \text{ ec.} \\ \quad\quad\quad\quad + Aex^4 \text{ ec.} \end{array}\right. = \varphi \end{array}$$

Paragonando il primo termine di queſto prodotto con $\varphi$, ed eguagliando a zero i coefficienti degli altri termini, ſi avranno i valori dei coefficienti indeterminati A, B, C, D ec. così $A = \frac{\varphi}{a}$, $B = -\frac{b\varphi}{a^2}$, $C = \frac{b^2\varphi}{a^3} - \frac{c\varphi}{a^2}$, $D = -\frac{b^3\varphi}{a^4} + \frac{2bc\varphi}{a^3} - \frac{d\varphi}{a^2}$, $E = \frac{b^4\varphi}{a^5} - \frac{3b^2c\varphi}{a^4} - \frac{2bd\varphi}{a^3} + \frac{c^2\varphi}{a^3} - \frac{e\varphi}{a^2}$ F = ec., e però il quoziente cercato ſarà la ſeguente ſerie $\frac{\varphi}{a} - \frac{b\varphi x}{a^2} + \overline{\frac{b^2\varphi - ac\varphi}{a^3}} \times x^2 - \overline{\frac{b^3\varphi + 2abc\varphi - a^2d\varphi}{a^4}} \times x^3 +$

$$\overline{\frac{b^4\varphi - 3ab^2c\varphi - 2a^2bd\varphi + a^2c^2\varphi - a^3e\varphi}{a^5}} \times x^4 .$$

875. La quantità $\varphi$ può eſſere qualunque, conſeguentemente può eſſere ancora l'unità, come pure può eſſere anche una quantità compleſſa.

876. Si debba in ſecondo luogo dividere una ſerie (Δ) per un'altra (Π). Si faccia $\frac{\Delta}{\Pi} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ ec., indi $\Delta =$

$\Pi \times \overline{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}$ ec., poſcia ſi paragonino i termini di queſto prodotto coi termini della ſerie (Δ), e in queſto modo ſi ritrovino i valori delle indeterminate A, B, C, ec., con che ſi avrà la ſerie eſprimente il quoziente cercato. O pu-

pure si regoli in quest'altra maniera: Si consideri la frazione $\frac{\Delta}{\Pi}$ così $\Delta \times \frac{1}{\Pi}$. Si trovi (giusta il num. 828.) la serie, che esprime il valore di $\frac{1}{\Pi}$, questa serie trovata si moltiplichi in $(\Delta)$, e ciò, che ne verrà sarà il quoziente cercato.

877. Veniamo ora alla maniera d'innalzare una serie infinita a qualsivoglia potestà. Tra i varj metodi, che a ciò possono servire, io preferieglierò quello, che il celebre P. Ruggiero Boscovich della Compagnia di Gesù ha pubblicato nel giornale de'letterati di Roma, si perchè egli è assai facile, e piano, si perchè si può trovare a piacere un qualunque termine della cercata potestà indipendentemente dagli altri. Prima di venire al metodo è necessario sciogliere il seguente

878. Problema. Cercansi tutte le maniere, nelle quali un dato numero si può dividere in parti intere, tra le quali abbia luogo ancora lo stesso numero considerato come parte unica, e totale di se stesso.

879. Risol. Si scrivano primieramente in una riga tante unità, quante ne contiene il numero dato; poi in una riga al di sotto si scriva in ultimo a destra un 2, e innanzi si scrivano una dopo l'altra tante unità, quante ne restano a compiere il detto numero. Nella terza riga si scrivano due 2 con avanti le unità residue. Nella quarta riga si scrivano tre 2 colle unità residue innanzi, e così in poi finchè si può. Finiti tutti i 2 si scriva in una nuova riga in ultimo a destra un 3 colle unità residue innanzi, nella seguente riga si scriva un 3, poi un 2, indi le unità residue; nella vegnente riga si scriva un 3, poi due 2 colle residue unità, e così in seguito, finchè si può. Si passi poscia a due 3 colle unità, indi co' 2 proseguendo col medesimo ordine, e così in appresso a tre 3, a quattro, a cinque ec. finchè si può. Finiti i 3 si passi ai 4, quindi ai 5 ec. colla stessa maniera, finchè si arrivi al numero proposto, che rimarrà parte unica di se medesimo. L'esempio metterà sotto gli occhi l'operazione chiara già per se stessa. Si cercano tutti i modi, ne'quali il numero 7 può essere diviso in parti. Ciascuno di questi modi viene mostrato dal corrispondente numero romano.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | I. |
| | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 2. | II. |
| | | 1. | 1. | 1. | 2. | 2. | III. |
| | | | 1. | 2. | 2. | 2. | IV. |
| | | 1. | 1. | 1. | 1. | 3. | V. |
| | | | 1. | 1. | 2. | 3. | VI. |
| | | | | 2. | 2. | 3. | VII. |
| | | | | 1. | 3. | 3. | VIII. |
| | | | 1. | 1. | 1. | 4. | IX. |
| | | | | 1. | 2. | 4. | X. |
| | | | | | 3. | 4. | XI. |
| | | | | 1. | 1. | 5. | XII. |
| | | | | | 2. | 5. | XIII. |
| | | | | | 1. | 6. | XIV. |
| | | | | | | 7. | XV. |

880.

880. Date tutte le maniere, colle quali può eſſere diviſo in parti un qualunque numero $m$, ſi può per mezzo loro trovare tutte le maniere, colle quali può eſſere diviſo in parti un numero maggiore di una unità, cioè $m+1$. A ciaſcuna diviſione del numero dato ſi aggiunga a ſiniſtra una nuova parte, che ſia l'unità, poſcia ſi accreſcano, o ſia ſi ingroſſino di una unità tutte, e ſole le prime parti a ſiniſtra di quelle diviſioni, che cominciano con una parte minore della proſſima ſeguente, e in queſto modo ſi avranno tutte le maniere, nelle quali può eſſere diviſo in parti il numero $m+1$. Che i riſultati dalle accennate operazioni ſiano altrettante diviſioni del numero $m+1$, la coſa è tanto evidente, che non abbiſogna di dichiarazione; che poi in queſto modo ſi abbiano tutte le maniere, nelle quali può eſſere diviſo il numero $m+1$ rendeſi manifeſto dall'oſſervare, che tutte le diviſioni del numero $m+1$ naſcer devono dalle diviſioni del numero $m$ mediante l'aggiunta di una unità: Ma alle diviſioni del numero $m$ non ſi può fare altro aumento, onde naſcano le parti componenti il numero $m+1$, che nelle due indicate maniere. Dunque operando nel modo eſpoſto ſi trovano tutte le maniere poſſibili, colle quali può eſſere diviſo in parti il numero $m+1$. Prendo per eſempio le precedenti diviſioni del numero 7, colle quali voglio trovare tutte le diviſioni del numero 8. Scrivo in A tutte le diviſioni del numero 7, ſcrivo in B tutte le diviſioni del numero 8, che naſcono dalle diviſioni del numero 7 mediante l'aumento di una nuova parte 1, ſcrivo in C tutte le diviſioni del num. 8, che naſcono coll'aumentarſi di una unità le prime parti diſſimili a ſiniſtra delle diviſioni del numero 7.

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. | 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. | 2. 2. 2. 2. |
| 1. 1. 1. 1. 1. 2. | 1. 1. 1. 1. 1. 1. 2. | 2. 3. 3. |
| 1. 1. 1. 2. 2. | 1. 1. 1. 1. 2. 2. | 2. 2. 4. |
| 1. 2. 2. 2. | 1. 1. 2. 2. 2. | 4. 4. |
| 1. 1. 1. 1. 3. | 1. 1. 1. 1. 3. | 3. 5. |
| 1. 1. 2. 3. | 1. 1. 1. 2. 3. | 2. 6. |
| 2. 2. 3. | 1. 2. 2. 3. | 8. |
| 1. 3. 3. | 1. 1. 3. 3. | |
| 1. 1. 1. 4. | 1. 1. 1. 1. 4. | |
| 1. 2. 4. | 1. 1. 2. 4. | |
| 3. 4. | 1. 3. 4. | |
| 1. 1. 5. | 1. 1. 1. 5. | |
| 2. 5. | 1. 2. 5. | |
| 1. 6. | 1. 1. 6. | |
| 7. | 1. 7. | |

881. Date tutte le diviſioni del numero $m+1$ ſi troveranno con metodo inverſo tutte le diviſioni del numero $m$.

882. Veniamo ora al merodo di inalzare a qualſivoglia poteſtà una ſerie infinita, come (A) $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6$ ec.. Poichè queſto metodo propriamente riſguarda la maniera di ritrovare iſolatamente un qualſivoglia termine della ſerie, che deve eſſere la poteſtà cercata, e ciò è appunto quanto baſta per potere e cominciare, e proſeguire a piacere queſta ſerie, però tutta la dottrina con-

cer-

cernente questo metodo si ridurrà al modo di sapere generalmente trovare un termine $m$ dell' accennata serie, che deve essere la potestà cercata.

883. Essendo per ipotesi infinita la serie, che deve inalzare a una qualunque potestà $n$, infiniti pure saranno i termini, che comprenderà la potestà $n$. Il primo di questi termini sarà $a^n$, gli altri poi risulteranno dalle successive potenze $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$, $x^5$ ec., le quali distingueranno per ordine ciascun termine, e in oltre ciascuno di questi termini sarà affetto da' coefficienti numerici, e letterali risultanti da' prodotti de' coefficienti $a$, $b$, $c$, $d$ ec. della serie (A). A motivo di questi coefficienti ciascun termine si comporrà da altrettante parti quanti saranno questi prodotti, e tali prodotti saranno tanti, quante saranno le maniere, colle quali il numero esprimente il termine cercato diminuito di una unità, potrà essere diviso in parti.

884. Si scrivano in una riga i numeri della serie naturale 1, 2, 3, 4, 5, ec., che servono di esponenti alla $x$ nella serie (A); sotto a ciascuno si scriva la corrispondente lettera $b$, $c$ ec., che serve di coefficiente al termine, in cui ha luogo tale esponente, così

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$. | $c$. | $d$. | $e$. | $f$. | $g$. | $b$. | $i$. | ec. |

Ciò posto, qualunque termine $m$ non solo avrà tante parti, quante sono le maniere, secondo le quali è divisibile il numero $m-1$, ma in oltre ciascuna di queste parti si formerà dipendentemente da una di tali divisioni nella maniera seguente. Si chiami $=p$ il numero delle parti di ciascuna divisione del numero $m-1$; tra i coefficienti letterali formanti ciascuna parte vi sarà in primo luogo $a^{n-p}$, in secondo luogo vi saranno le lettere $b$, $c$, $d$ ec., ogni qual volta nella corrispondente divisione si trovino i numeri, che gli sono compagni, e queste lettere elevate alla potestà indicata dal numero delle volte, che in essa divisione ha luogo il numero compagno. Rispetto al coefficiente numerico esso avrà per numeratore il prodotto nato dalla moltiplicazione di tanti termini della progressione aritmetica

$n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}$ ec., quanti ne disegna il numero $p$, e per denominatore il prodotto di altrettanti termini della serie naturale 1. 2. 3. ec., quante sono le parti uguali nella corrispondente divisione, e quante volte si muterà la grossezza delle parti, altrettante volte si ricomincierà da capo la serie naturale.

885. Si vedano quì sotto i primi otto termini della serie risultante d. ll' inalzarsi alla potestà $n$ la serie (A), lateralmente ai quali ho posto le divisioni del proprio numero diminuito di una unità, dalle quali dipende l' invenzione delle parti di tale termine. Perchè $1-1=0$, il primo termine non ha, che $a^n$: Perchè $2-1=1$, che non è in altre parti divisibile, e ad 1 corrisponde $b$, però il secondo termine è

$\frac{n}{1} a^{n-1} bx$. Il terzo termine è $n \times \overline{n-1}\, a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} a^{n-1} c \times x^2$, perchè $3-1=2$, e il 2 ha per parti componenti 1. 1, e 2. La prima divisione 1. 1. somministra la prima parte $n \times \overline{n-1}\, a^{n-2} b^2$ di questo terzo termine, mentre la prima maniera 1. 1., in cui è diviso il 2 dà tanto $a^{n-2}$, perchè in questo caso $p=2$, quanto $b^2$, perchè l' 1 corrispondente al $b$ è posto due volte: La seconda maniera 2, in

2, in cui prendeſi diviſo il 2 dà la ſeconda parte $\frac{n}{1} a^{n-1} c$ di queſto terzo termine, perchè in queſta diviſione vi è una ſola parte, che perciò determina $p=1$, onde ſi ha $a^{n-1}$, e queſta parte è 2, cui corriſponde il $c$, che per queſto motivo deve moltiplicare $a^{n-1}$. Le ſteſſe oſſervazioni ſi facciano ſopra i ſeguenti altri termini.

I. termine

$a^n$

Diviſioni del num. 1. II.

1. $+ \frac{n}{1} a^{n-1} bx$

Diviſ. del num. 2. III.

1. 1. $+ \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} a^{n-2} b^2$

2. $\frac{n}{1} a^{n-1} c$ $\Big\}$ $x^2$

Diviſ. del num. 3. IV.

1. 1. 1. $+ \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$

1. 2. $+ \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 1} a^{n-2} bc$

3. $\frac{n}{1} a^{n-1} d$ $\Big\}$ $x^3$

Diviſ.

Divis. del num. 4. V.

1. 1. 1. 1 $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3\times 4}a^{n-4}b^4$

1. 1. 2. $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 1}a^{n-3}b^2c$

2. 2. $+\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 2}a^{n-2}c^2$

1. 3. $\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 1}a^{n-2}bd$

4 $\frac{n}{1}a^{n-1}e$ } $x^4$

Divis. del num. 5. VI.

1. 1. 1. 1. 1. $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}a^{n-5}b^5$

1. 1. 1. 2. $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3\times 1}a^{n-4}b^3c$

1. 2. 2. $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 1\times 2}a^{n-3}bc^2$

1. 1. 3. $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 1}a^{n-3}b^2d$

2. 3 $+\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 1}a^{n-2}cd$

1. 4 $+\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 1}a^{n-2}be$

5. $+\frac{n}{1}a^{n-1}f$ } $x^5$

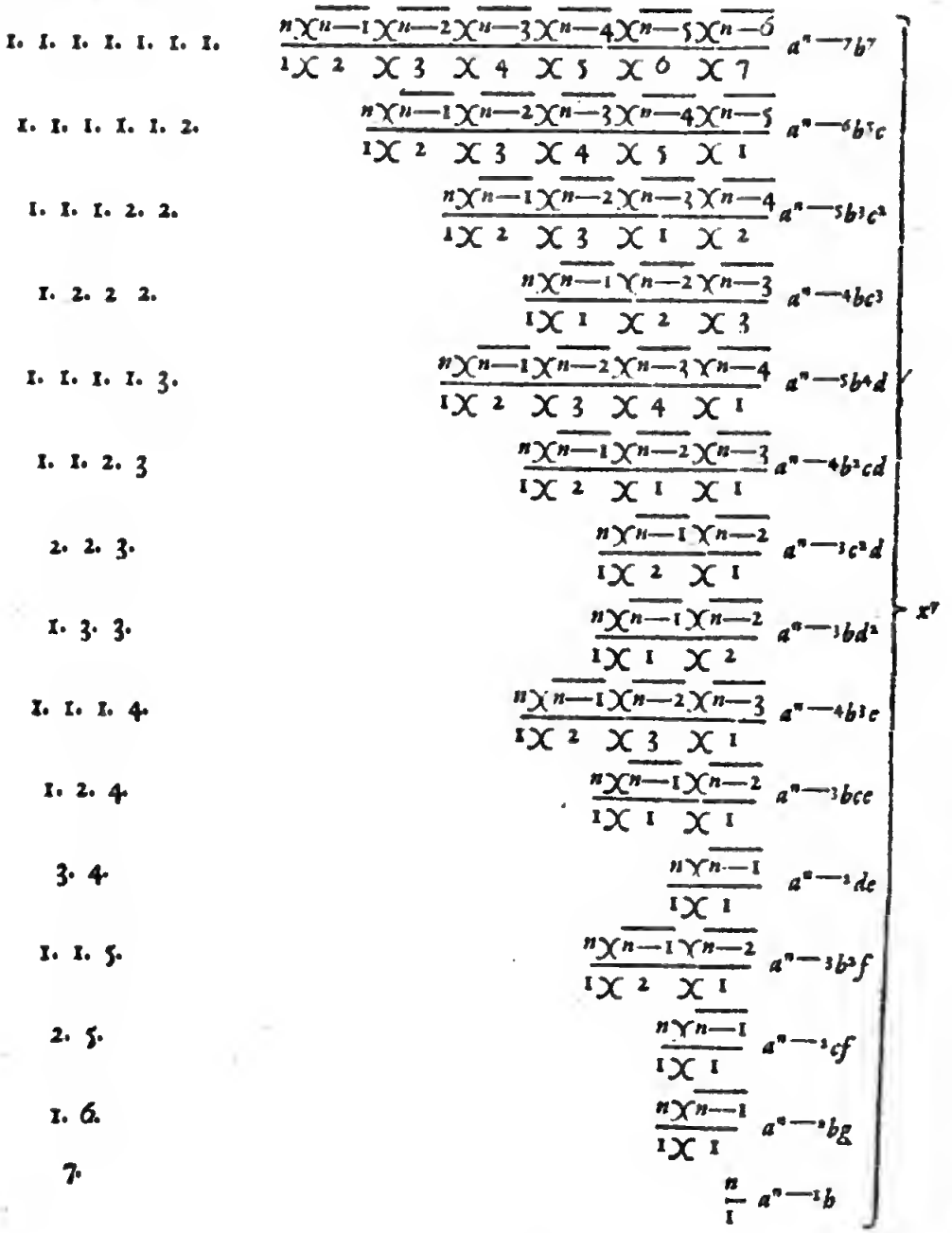
Divis. del num. 6. VII.

| | |
|---|---|
| 1. 1. 1. 1. 1. 1. | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}\times\overline{n-5}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}\,a^{n-6}b^6$ |
| 1. 1, 1. 1. 2. | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1\times 2\times 3\times 4\times 1}\,a^{n-5}b^4c$ |
| 1. 1. 2. 2. | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 1\times 2}\,a^{n-4}b^2c^2$ |
| 2. 2. 2 | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 3}\,a^{n-3}c^3$ |
| 1. 1. 1. 3. | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\times 2\times 3\times 1}\,a^{n-4}b^3d$ |
| 1. 2. 3. | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 1\times 1}\,a^{n-3}bcd$ } $x^6$ |
| 3. 3. | $+\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 2}\,a^{n-3}d^2$ |
| 1. 1. 4 | $+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 1}\,a^{n-3}b^2e$ |
| 2. 4. | $+\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 1}\,a^{n-2}ce$ |
| 1. 5. | $\frac{n\times\overline{n-1}}{1\times 1}\,a^{n-2}bf$ |
| 6 | $\frac{n}{1}\,a^{n-1}g$ |

Di-

Divis. del num. 7.

VIII.



836. La dimoſtrazione di queſto metodo ſi deduce dall'oſſervare, che, a norma di quanto ſi è detto per inalzare una quantità qualunque a una propoſta poteſtà, eſſendo $=a$ il primo termine della ſerie (A) da inalzarſi alla poteſtà $n$, e gli altri termini contenendo la $x$ colle di lei ſucceſſive potenze, il primo termine della potenza $n$ della ſerie (A) dovrà eſſere $a^n$ e gli altri termini dovranno riſultare da' prodotti de' coefficienti $b$, $c$, $d$ ec., tra' quali deve aver luogo una conveniente potenza di $a$, moltiplicati nelle ſucceſſive potenze di $x$: Ma con moltiplicarſi una quantità in ſe ſteſſa una ſola volta ciaſcun di lei termine ſi combina con qualunque altro, onde ne naſcono tutti gli ambi poſſibili di queſti termini, così con moltiplicarla due volte in ſe ſteſſa ne naſcono tutti i terni, e generalmente con moltiplicarla in ſe ſteſſa un numero di volte $=n$ ne devono naſcere tutti i prodotti ſecondo il numero $n$; quindi è, che dovendoſi alzare la ſerie (A) alla poteſtà $n$, in ogni parte di ciaſcun termine della potenza $n$ vi dovrà eſſere un prodotto tale di coefficienti letterali $b$, $c$ ec, che con la conveniente potenza di $a$ giunga a compiere le dimenſioni $n$. Ora moltiplicandoſi tutti in tutti queſti coefficienti letterali, vi devono perciò eſſere tutte le loro combinazioni poſſibili; e ſiccome le diviſioni del numero $m-1$ (in vece di prendere le diviſioni del numero $m$ eſprimente un qualunque termine della cercata poteſtà ſi prendono le diviſioni del numero $m-1$, perchè i coefficienti letterali cominciano ad aver luogo ſolo nel ſecondo termine di queſta poteſtà) danno tutte le combinazioni, dalle quali può riſultare lo ſteſſo numero $m-1$, egli è perciò, che in ciaſcuna parte di qualſivoglia termine di queſta potenza vi devono eſſere le combinazioni de' coefficienti letterali relativamente alle diviſioni del numero $m-1$, cioè vi devono eſſere le lettere compagne delle parti di queſte diviſioni, e queſte lettere inalzate alle poteſtà indicate dal numero delle parti compagne, conſeguentemente eſſendo $=p$ il numero delle parti componenti in ciaſcuna diviſione, ſarà pure $=p$ la ſomma degli eſponenti delle lettere $b$, $c$, $d$ ec., onde dovendo eſſere ſempre $=n$ il numero delle dimenſioni, che ha in ogni parte di ciaſcun termine della cercata potenza $n$ il coefficiente letterale, la potenza di $a$, che vi interverrà dovrà eſſere $n^{n-p}$. Quanto al coefficiente numerico dovendo eſſo eſprimere il numero di tutte le combinazioni poſſibili dello ſteſſo numero $n$ di lettere $a$, $b$, $c$ ec. ripetute quanto porta l'eſponente di ciaſcuna, egli dovrà appunto eſſere (giuſta il num. 1383. del I. Tomo) a norma delle fatte determinazioni.

887. Allorchè ſi determinerà l'eſponente $n$ ad eſſere un numero intero poſitivo, tra le diverſe diviſioni del numero $m-1$ varranno quelle ſole, in cui il numero delle parti non ſarà maggiore di $n$, altrimenti ſe ſi prendeſſe un numero di parti maggiore di $n$, ſi avrebbe nel numeratore del coefficiente numerico $n-n=0$, che manderebbe cotal parte a zero: Per eſempio ſe ſi voleſſe inalzare alla quarta poteſtà la ſerie (A) toſto che ſi giungeſſe al ſeſto termine (ſi oſſervino queſti termini trovati al num. 885.) ſi dovrebbe ommettere la parte corriſpondente alla prima diviſione: Pel ſettimo termine ſi dovrebbero ommettere le parti corriſpondenti alla prima, e ſeconda diviſione: Per l'ottavo termine ſi rigetterebbero la prima, ſeconda, terza, e quinta ec.

888. Se nella ſerie da inalzarſi alla potenza $n$ mancherà qualche potenza di $x$, ſarà $=0$ il coefficiente letterale di queſto termine, onde è, che ſi dovranno rigettare tutte quelle diviſioni del numero $m-1$, in cui entrerà tra le ſue parti queſto eſponente di $x$, che manca, vale a dire il numero corriſpondente alla lettera $=0$; O pure nella formola generale trovata al num. 885 biſognerà levare da ciaſcun termine quelle parti, nelle quali ſi trova la detta lettera. Per eſempio dovendoſi inal-

za-

zare alla potestà $n$ la serie $a+bx+fx^3+ix^3$ ec., l'ottavo termine di questa potenza sarebbe

$$+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}\times\overline{n-5}\times\overline{n-6}}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}\,a^{n-7}b^7 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\times 2\times 1}\,a^{n-3}b^3f\Big\}x^7$$

889. Quando la serie da inalzarsi alla potestà $n$ avrà tutti i termini, al crescere de' termini della cercata potestà cresceranno a dismisura le parti componenti ciascuno di loro. Il Sig. Eulero ha esaminato questa materia al Capo 16. del primo Tomo dell'introduzione *in Analysim infinitorum*, ove dà la seguente Tavola

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 5. | 7. | 11. | 15. | 22. | 30. | 42. | 56. | 77. | 101. | 135. | 176. |

| 16. | 17. | 18. | 19. | 20. | 21. | 22. | 23. | 24. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 231. | 297. | 385. | 490. | 627. | 792. | 1002. | 1250. | 1570. |

nella quale ciascun numero, che sta di sotto mostra in quante maniere possa dividersi il numero, che gli sta di sopra.

890. Per ridurre al caso pratico la precedente formola del num. 885. inserviente a inalzare una serie a qualunque potestà, sia proposto di inalzare al cubo la serie $a+x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^6}{a^5}+\frac{x^7}{a^6}$ ec. Nella formola del numero 885. si faccia $m=3$, $a=a$, $b=1$, $c=\frac{1}{a}$, $d=\frac{1}{a^2}$, $e=\frac{1}{a^3}$, $f=\frac{1}{a^4}$, $g=\frac{1}{a^5}$, $b=\frac{1}{a^6}$ ec. lo che fatto, il primo termine della cercata potestà sarà $a^3$, il secondo $3a^2x$, il terzo $6ax^2$, il quarto $10x^3$, il quinto $\frac{15x^4}{a}$, di cui la prima parte va a zero giusta il num. 887., il sesto, di cui le due prime parti vanno a zero, $\frac{21x^5}{a^2}$, il settimo, di cui vanno a zero la prima, la seconda, la terza, e la quinta parte, $\frac{28x^6}{a^3}$, l'ottavo, di cui va a zero la 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 parte, $\frac{36x^7}{a^4}$ ec., e però

$$\overline{a+x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^4}{a^3}\text{ec.}}^3 = a^3+3a^2x+6ax^2+10x^3+\frac{15x^4}{a}+\frac{21x^5}{a^2}+\frac{28x^6}{a^3}+\frac{36x^7}{a^4}\text{ ec.}$$

Osservando i termini di questa serie si scoprirà tosto la legge con cui vanno all'infinito, mentre nel numeratore di ciascun termine la $x$ va continuamente crescendo di un grado, e lo stesso fa pure l'$a$ nel denominatore, i coefficienti numeri-

ci

ci poi procedono con queſt'ordine, che ciaſcuno di un qualunque termine $m$ naſce dal coefficiente del termine precedente aumentato del termine $m$ della ſerie naturale, dal che naſcono per coefficienti i numeri triangolari. Ora mediante queſte oſſervazioni ſi potrà continuare la ſerie a piacere ſenza aver biſogno di più ricorrere alla formola del num. 885.

891. Queſta formola del numero 885. ſerve per tutti i caſi, comunque l'eſponente $n$ ſia intero, o rotto, poſitivo, o negativo. Prenderò a eſaminare il caſo, in cui l'eſponente $m$ è un numero fratto poſitivo, mentre ciò appunto ſerve per l'ultima delle propoſte operazioni nelle ſerie, che è di eſtrarre una qualunque radice da una ſerie infinita. Dovendo adunque eſſere $n$ un numero fratto, ſi faccia egli $= \frac{1}{n}$, e queſto valore ſi ſoſtituiſca nella formola del num. 885., con che eſſa ſi cambierà nella ſeguente.

I. termine

$$a^{\frac{1}{n}}$$

II.

$$\frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} bx$$

III.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} b^2 \\ \qquad\qquad\quad a^{\frac{1-n}{n}} c \end{array}\right\} x^2$$

IV.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 \\ \qquad\qquad \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bc \\ \qquad\qquad\qquad\quad a^{\frac{1-n}{n}} d \end{array}\right\} x^3$$

V.

V.

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{4n} & a^{\frac{1-4n}{n}} & b^4 & & \\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{n} & a^{\frac{1-3n}{n}} & b^2c & & \\
\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n} & a^{\frac{1-2n}{n}} & c^2 & & \\
\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n} & a^{\frac{1-2n}{n}} & bd & & \\
\frac{1}{n} & a^{\frac{1-n}{n}} & e & &
\end{array}\right\} x^4$$

VI.

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{4n}\times\frac{1-4n}{5n} & a^{\frac{1-5n}{n}} & b^5 & & \\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{n} & a^{\frac{1-4n}{n}} & b^3c & & \\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}\times\frac{1-2n}{2n} & a^{\frac{1-3n}{n}} & bc^2 & & \\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{n} & a^{\frac{1-3n}{n}} & b^2d & & \\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n} & a^{\frac{1-2n}{n}} & cd & & \\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n} & a^{\frac{1-2n}{n}} & be & & \\
\frac{1}{n} & a^{\frac{1-n}{n}} & f & &
\end{array}\right\} x^5$$

VII.

VII.

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{4n}\times\frac{1-4n}{5n}\times\frac{1-5n}{6n}\,a^{\frac{1-6n}{n}}\,b^6\\
\quad\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{1-3n}\times\frac{1-4n}{n}\,a^{\frac{1-5n}{n}}\,b^4c\\
\quad+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{n}\times\frac{1-3n}{2n}\,a^{\frac{1-4n}{n}}\,b^2c^2\\
\quad+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\,a^{\frac{1-3n}{n}}\,c^3\\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{n}\,a^{\frac{1-4n}{n}}\,b^3d\\
\quad+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}\times\frac{1-n}{n}\,a^{\frac{1-3n}{n}}\,bcd\\
\quad+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\,a^{\frac{1-2n}{n}}\,d^2\\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{n}\,a^{\frac{1-3n}{n}}\,b^2e\\
\quad+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}\,a^{\frac{1-2n}{n}}\,ce\\
+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}\,a^{\frac{1-2n}{n}}\,bf\\
+\frac{1}{n}\,a^{\frac{1-n}{n}}\,g
\end{array}\right\}x^6$$

VIII.

VIII.

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{3n}\times\tfrac{1-3n}{4n}\times\tfrac{1-4n}{5n}\times\tfrac{1-5n}{6n}\times\tfrac{1-6n}{7n}a^{\frac{1-7n}{n}}\,b^{7}\\
&\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{3n}\times\tfrac{1-3n}{4n}\times\tfrac{1-4n}{5n}\times\tfrac{1-5n}{n}a^{\frac{1-6n}{n}}\,b^{5}c\\
&\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{3n}\times\tfrac{1-3n}{n}\times\tfrac{1-4n}{2n}a^{\frac{1-5n}{n}}\,b^{3}c^{2}\\
&\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{n}\times\tfrac{1-2n}{2n}\times\tfrac{1-3n}{3n}a^{\frac{1-4n}{n}}\,bc^{3}\\
&\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{3n}\times\tfrac{1-3n}{4n}\times\tfrac{1-4n}{n}a^{\frac{1-5n}{n}}\,b^{4}d\\
&\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{n}\times\tfrac{1-3n}{n}a^{\frac{1-4n}{n}}\,b^{2}cd\\
&\quad\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{n}a^{\frac{1-3n}{n}}\,c^{2}d\\
&\quad\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{n}\times\tfrac{1-2n}{2n}a^{\frac{1-3n}{n}}\,bd^{2}\\
&\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{2n}\times\tfrac{1-3n}{n}a^{\frac{1-4n}{n}}\,b^{3}e\\
&\quad\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{n}\times\tfrac{1-2n}{n}a^{\frac{1-3n}{n}}\,bce\\
&\quad\quad\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}\,de\\
&\quad\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{2n}\times\tfrac{1-2n}{n}a^{\frac{1-3n}{n}}\,b^{2}f\\
&\quad\quad\quad\quad\quad+\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}\,cf\\
&\quad\quad\quad\quad\quad\tfrac{1}{n}\times\tfrac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}\,bg\\
&\quad\quad\quad\quad\quad\tfrac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}\,b
\end{aligned}
\Big\}\,x^{7}
$$

892. Per fare l' applicazione di queſta formola generale a qualche caſo particolare prendo per eſempio la precedente formola $a+x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^6}{a^5}+\frac{x^7}{a^6}$ ec., dalla quale voglio eſtrarre la radice cuba. Sarà adunque $n=3$, $a=a$, $b=1$, $c=\frac{1}{a}$, $d=\frac{1}{a^2}$, $e=\frac{1}{a^3}$ ec. Fatte queſte ſoſtituzioni nella poc' anzi trovata formola generale, il primo termine della cercata radice ſi troverà eſſere $a^{\frac{1}{3}}$, il ſecondo $\frac{x}{3a^{\frac{2}{3}}}$, il terzo $\frac{4x^2}{18a^{\frac{5}{3}}}$, il quarto $\frac{14x^3}{81a^{\frac{8}{3}}}$, il quinto $\frac{35x^4}{243a^{\frac{11}{3}}}$, il ſeſto $\frac{91x^5}{729a^{\frac{14}{3}}}$ ec., e pero ſarà $\overline{a+x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^5}{a^4}\text{ ec.}}^{\frac{1}{3}}=$

$$a^{\frac{1}{3}}+\frac{x}{3a^{\frac{2}{3}}}+\frac{4x^2}{18a^{\frac{5}{3}}}+\frac{14x^3}{81a^{\frac{8}{3}}}+\frac{35x^4}{243a^{\frac{11}{3}}}+\frac{91x^5}{729a^{\frac{14}{3}}}\text{ ec.}$$

893. Tanto la formola del num. 885., come queſta del num. 891 può ſervire per un numero finito di quantità, la prima per inalzarle alla poteſtà $n$, la ſeconda per eſtrarci la radice $\frac{1}{n}$.

894. Io ho ſempre conſiderate le ſerie, il di cui primo termine è una quantità cognita, perchè quantunque la ſerie ſia così $ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6$ ec., ella ſi potrà conſiderare in queſto modo $x\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ ec. da trattarſi come fin' ora ſi è fatto.

## ARTICOLO IV.

### *Del regreſſo delle ſerie.*

895. IL regreſſo delle ſerie non conſiſte in altro, ſe non che avendo il valore $x$ di una ſerie, i di cui termini ſono diſtinti dalle potenze di $y$, trovare il valore di $y$ mediante una nuova ſerie, i di cui termini ſiano diſtinti colle potenze di $x$.

896. La maniera di ottenere ciò è la ſeguente. Sia data la ſerie $x=ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5+$ ec., e ſi voglia trovare il valore di $y$ eſpreſſo da una ſerie avente le potenze di $x$. Si eguagli primieramente a zero l' equazione da-

data così $o=-x+ay+by^2+cy^3+dy^4$ ec.; poscia si ponga l'incognita $y$ uguale ad una serie a coefficienti indeterminati, e da determinarsi col calcolo, in questo modo $y=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ ec. Questa serie a coefficienti indeterminati si inalzi a tutte le potenze (giusta il metodo dato ai num. 883., e 884.), alle quali trovasi inalzata la $y$ nei termini dalla serie proposta, in essa si sostituiscano queste potenze in luogo delle corrispondenti potenze di $y$, si mettano sotto a un sol termine tutti quei coefficienti, che affettano una stessa potenza di $x$, si faccia poscia uguale a zero ciascun termine, e con ciò si ricavino i valori delle assunte indeterminate A, B, C, D ec.; si sostituiscano per ultimo questi ritrovati valori nella serie indeterminata $Ax+Bx^2+Cx^3+$ ec., lo che fatto, sarà essa la serie cercata.

897. Poichè il metodo è lo stesso anche in caso, che, essendovi una equazione, i di cui due membri siano due serie, la prima risultante dalle potenze di una incognita, e la seconda dalle potenze di un' altra incognita, si voglia trovare il valore di una di queste due incognite per mezzo di una serie, che contenga l' altra incognita, perciò proporrò l' esempio su questo caso, mentre essendo esso generalissimo, e abbracciando sotto di se qualunque altro, la serie, che ne dedurrò, potrà servire di canone ecumenico da potersene servire in qualsivoglia circostanza senza aver bisogno di ricorrere al calcolo.

898. Sia data l' equazione $ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+$ ec. $=\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\epsilon y^4+\lambda y^5+$ ec.: Si trasportino i termini, e si uguagli questa equazione a zeto, così $(\Delta)\ ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+$ ec. $-\beta y-\gamma y^2-\delta y^3-\epsilon y^4-\lambda y^5-$ ec. $=o$. Volendosi il valore di $x$ espresso da una serie data per $y$, si assuma la seguente serie indeterminata, e si faccia $x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+$ ec., indi nella serie $(\Delta)$ in luogo di $x$, e delle sue potenze si sostituisca questo suo valore, e le di lui corrispondenti potenze, come segue

$$
\begin{aligned}
ax=\ & aAy+aBy^2+aCy^3+aDy^4+aEy^5+aFy^6+aGy^7+aHy^8 \text{ ec.}\\
+bx^2=\ & +bA^2y^2+2bABy^3+bB^2y^4+2bADy^5+bC^2y^6+2bCDy^7+bD^2y^8 \text{ ec.}\\
& +2bACy^4+2bBCy^5+2bAEy^6+2bBEy^7+2bCEy^8 \text{ ec.}\\
& +2bBDy^5+2bAFy^7+2bBFy^8 \text{ ec.}\\
& +2bAGy^8 \text{ ec.}\\
+cx^3=\ & +cA^3y^3+3cA^2By^4+3cAB^2y^5+cB^3y^6+3cB^2Cy^6+3cBC^2y^7 \text{ ec.}\\
& +3cA^2Cy^5+6cABCy^6+3cAC^2y^7+3cB^2Dy^7 \text{ ec.}\\
& +3cA^2Dy^6+6cABDy^7+6cACDy^8 \text{ ec.}\\
& +3cA^2Ey^7+6cABEy^8 \text{ ec.}\\
& +3cA^2Fy^8 \text{ ec.}\\
+dx^4=\ & +dA^4y^4+4dA^3By^5+6dA^2B^2y^6+3dAB^3y^7+dB^4y^8 \text{ ec.}\\
& +4dA^3Cy^6+12dA^2BCy^7+12dAB^2Cy^8 \text{ ec.}\\
& +4dA^3Dy^7+6dA^2C^2y^8 \text{ ec.}\\
& +12dA^2BDy^8 \text{ ec.}\\
& +4dA^3Ey^8 \text{ ec.}
\end{aligned}
$$

$+ex^5 =$ $+eA^5y^5+5eA^4By^6+10eA^3B^2y^7+10eA^2B^3y^8$ ec.
$+5eA^4Cy^7+20eA^3BCy^8$ ec.
$+5eA^4Dy^8$ ec.

$+fx^6 =$ $+fA^6y^6+6fA^5By^7+15fA^4B^2y^8$ ec.
$+5fA^5Cy^8$ ec

$+gx^8 =$ $+gA^7y^7+7gA^6By^8$ ec.

$+bx^8 =$ $+bA^8y^8$ ec.

$-\beta y \quad -\gamma y^2 \quad -\delta y^3 \quad -\epsilon y^4 \quad -\lambda y^5 \quad -\phi y^6 \quad -\mu y^7 \quad -\nu y^8$ ec.

Si uguagli ora a zeto ciaſcun termine della ritrovata ſerie a fine di avere i valori delle aſſunte indeterminate A, B, C ec., e ne verrà I. $Aa-\beta=0$. II. $aB+A^2b-\gamma=0$. III. $aC+2bAB+cA^3-\delta=0$. IV. $aD+bB^2+2bAC+3A^2cB+dA^4-\epsilon=0$. V. $aE+2bAD+2bBC+3cAB^2+3cA^2C+4dA^3B+eA^5-\lambda=0$. VI. $aF+bC^2+2bAE+2bBD+cB^3+6cABC+3cA^3D+6dA^2B^2+4dA^3C+5eA^4B+fA^6-\phi=0$. VII. $aG+2bCD+2bBE+2bAF+3cB^2C+3cAC^2+6cABD+3cA^2E+4dAB^3+12dA^2BC+4dA^3D+10eA^3B^2+5eA^4C+6fA^5B+gA^7-\mu=0$. VIII. $aH+bD^2+2bCE+2bBF+2bAG+3cBC^2+3cB^2D+6cACD+6cABE+3cA^2F+dB^4+12dAB^2C+6dA^2C^2+12dA^2BD+4dA^3E+10eA^3B^2+20eA^2BC+5eA^4D+15fA^4B^2+6fA^5C+7gA^6B+bA^8-\nu=0$ ec.

Con queſti paragoni ſi determinino adeſſo le incognite cosi. da I. ſi ha

$A=\frac{\beta}{a}$. Da II. $B=\frac{\gamma-A^2b}{a}=\frac{a^2\gamma-\beta^2b}{a^3}$ con ſoſtituirſi il valore di $A^2$.

Da III. $C=\frac{\delta-cA^3-2bAB}{a}=\frac{a^4\delta-a\beta^3c-2a^2\gamma b\beta+2b^2\beta^3}{a^5}$ con ſoſtituirſi i valori di $A^3$, e di AB. Da IV. $D=\frac{\epsilon-dA^4-3A^2Bc-2bAC-bB^2}{a}=$

$$\frac{a^6\epsilon-a^2d\beta^4-3a^3\beta^2c\gamma+5abc\beta^4-2a^4b\beta\delta+6a^2b^2\beta^2\gamma-5b^3\beta^4-a^4b\gamma^2}{a^7}$$

mediante la ſoſtituzione de' valori di $A^4$, di $A^2B$, di AC, e di $B^2$.

Da V. $E=\frac{\lambda-eA^5-4dA^3B-3cA^2C-3cAB^2-2bBC-2bAD}{a}$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}a^8\lambda-a^3e\beta^2-4a^4d\beta^2\gamma+6a^2bd\beta^3-3a^2\beta^2c\delta+3a^3\beta^2c^2+20a^3b\beta^2c\gamma-21ab^2\beta^2c\\-2a^2\beta\gamma^2-2a^6b\delta\gamma+5a^4b^2\beta\gamma^2+6a^4b^2\beta^2\delta+14b^4\beta^2-2a^6b\beta\epsilon-20a^2b^3\beta^2\gamma\end{array}\right.}{a^9}$$

col rimettere i valori di $A^5$, $A^3B$ ec. Da VI. $F=$

$$\frac{\phi-fA^6-5eA^4B-4dA^3C-6dA^2B^2-3cA^2D-6cABC-cB^3-2bBD-2bAE-bC^2}{a};$$

cioc

cioè, ſoſtituendo i valori di A, B, C, D, E

$$F = \frac{\left\{\begin{array}{l} a^{10}\varphi - a^4 f\beta^5 - 5e\,\text{X}\,(a^5\beta^4\gamma - a^3 b\beta^5) - 2d\,\text{X}\,(2a^6\beta^3\delta - 2a^3 c\beta^6 - 10a^4 b\beta^4\gamma + 7a^2 b^2\beta^6 + \\ 3a^6\beta^2\gamma^2) - c\,\text{X}\,(3a^7\beta^2\varepsilon - 3a^3 d\beta^6 - 15a^4 c\beta^4\gamma + 21a^3 bc\beta^5 - 12a^3 b\beta^3\delta + 45a^3 b^2\beta^4\gamma - \\ 28ab^3\beta^6 - 18a^5 b\beta^2\gamma^2 + 6a^7\beta\gamma\delta + a^7\gamma^3) - b\,\text{X}\,(2a^8\beta\lambda - 2a^2\beta^6\varepsilon - 10a^4 d\beta^4\gamma + 14a^2 bd\beta^6 \\ - 8a^3 c\beta^3\delta + 7a^3 c^2 b^6 + 60a^4 bc\beta^4\gamma - 56ab^2 c\beta^5 - 12a^5 c\beta^2\gamma^3 - 12a^6 b\beta\gamma\delta + 30a^4 b^2\beta^4\gamma^2 \\ + 20a^4 b^2\beta^3\delta + 42b^4\beta^6 - 6a^6 b\beta^2\varepsilon - 70a^3 b^3\beta^4\gamma + 2a^8\gamma\varepsilon - 2a^6 b\gamma^3 + a^8\delta^2) \end{array}\right.}{a^{11}}$$

$$\text{Da VII. } G = \frac{\left\{\begin{array}{l} \mu - gA^7 - 6fA^5B - 5e\,\text{X}\,(A^4C + 2A^3B^2) - 4d\,\text{X}\,(A^3D + 3A^2BC + AB^3) \\ - 3c\,\text{X}\,(A^2E + 2ABD + AC^2 + B^2C) - 2b\,\text{X}\,(AF + BE + CD) \end{array}\right.}{a}$$

cioè ſoſtituendo i ritrovati valori di A, B, C, D, E, F

$$G = \frac{\left\{\begin{array}{l} a^{13}\mu - a^5 g\beta^7 - 6f\,\text{X}\,(a^6\beta^5\gamma - a^4 b\beta^7) - 5e\,\text{X}\,(a^7\beta^4\delta - a^4\beta^7 c - 5a^5 b\beta^5\gamma + 4a^3 b^2\beta^7 \\ + 2a^7\beta^3\gamma^2) - 4d\,\text{X}\,(a^8\beta^3\varepsilon - a^4 d\beta^7 - 6a^5 c\beta^3\gamma - 8a^3 b^6 c\beta^7 - 5a^6 b\beta^3\delta + 2a^4 b^2\ {}^3\gamma \\ - 12a^2 b^3\beta^7 - 10a^6 b\beta^3\gamma^2 + 3a^8\beta^2\gamma\delta + a^8\beta\gamma^3) \\ - 3c\,\text{X}\,(2a^9\beta\varepsilon - 6a^3 d\beta^5\gamma - 10a^6 c\beta^3\gamma^2 + 42a^4 bc\beta^5\gamma - 12a^7 b\beta^2\gamma\delta + 30a^5 b^2\beta^4\gamma^2 \\ - 54a^3 b^3\beta^5\gamma - 4a^7 b\beta\gamma^3 - 4a^7 b\beta^3\varepsilon + 8a^3 bd\beta^7 - 36a^2 b^2 c\beta^7 + 15ab^4\beta^7 + a^9\beta\delta^2 \\ - 5a^6 c\beta^4\delta + 4a^3 c^2\beta^7 + a^9\gamma^2\delta + a^9\beta^2\lambda - a^4 e\beta^7) - 2b\,\text{X}\,(a^{10}\delta\varepsilon - 5a^6 d\beta^4\delta - 12a^7 c\beta^2\gamma\delta \\ + 30a^5 bc\beta^2\delta - 3a^8 b\beta\delta^2 + 30a^6 b^2\beta^2\gamma\delta - 35a^4 b^3\beta^4\delta - 3a^8 b\gamma^2\delta - 4a^7 c\beta^3\varepsilon + 8a^3 cd\beta^7 \\ + 21a^4 c^2\beta^4\gamma - 36a^2 bc^2\beta^7 - 168a^3 b^2 c\beta\gamma + 120ab^3 c\beta^7 + 60a^5 bc\beta^2\gamma^2 - 6a^8 b\beta\gamma\varepsilon \\ + 42a^4 bd\beta^5\gamma - 70a^4 b^2\beta^4\gamma^2 + 126a^2 b^2\beta^5\gamma + 10a^6 b^2\beta\gamma^3 + 10a^6 b^2\beta^3\varepsilon - 36a^2 b^2 d\beta^7 \\ - 66b^5\beta^7 + a^{10}\gamma\lambda - 6a^5 e\beta^5\gamma - 10a^6 d\beta^3\gamma^2 - 4a^7 c\beta\gamma^3 - 3a^8 b\beta^2\lambda + 8a^3 be\beta^7 \\ + a^{10} b\varphi - a^4 f\beta^7) \end{array}\right.}{a^{13}}$$

Si avrà adunque la ſerie cercata, che dà il valore di $x$, così

$$(\Pi)\ x = \frac{\beta}{a}y + \frac{\overline{a^2\gamma - b\beta^2}}{a^3}y^2 + \frac{\overline{a^4\delta - a\beta\,\varepsilon - 2a^2\gamma b\beta + 2b^2\beta^2}}{a^5}y^3 + \frac{\overline{a^6\varphi - a^5 d\beta^4 - 3a\,\beta^2 c\gamma + 3abc\beta^3 - 2a^4 b\beta\delta + 2ab\beta^3\varepsilon + 5a^3 b\,\beta^2\gamma - 5b^2\beta^4 - a^4 b\gamma^2}}{a^7}y^4$$

899. Queſta ſerie trovata è una formola generaliſſima, la quale ſerve non ſolo nel caſo di $ax + bx^m + cx^n + dx^p + ex^q$ ec. $= \beta y + \gamma y^r + \delta y^s + \varepsilon y^t + \lambda y^u +$ ec., in cui tan-

tanto gli esponenti $m$, $n$, $p$, $q$ ec., come gli esponenti $r$, $s$, $t$, $u$ ec. possono essere in qualsivoglia progressione aritmetica, ma serve eziandio nel caso di $x = ay + by^m + cy^n + dy^o +$ ec. qualunque sia la progressione aritmetica formata dagli esponenti $m$, $n$, $p$ ec., mentre in questi casi non si dovrà far altro, che supporre in questa formola generale uguali a zero i coefficienti di quei termini, che mancano nelle proposte serie. Quanto al primo caso sia data l'equazione $ax + cx^3 + ex^5 + gx^7 +$ ec. $= \beta y + \delta y^3 + \lambda y^5 + \mu y^7 +$ ec., e si voglia il valore di $x$ espresso da una serie data per $y$. Poichè mancano tutti i termini in posti pari, si faccia nella serie generale $(\Pi)$ $b = 0$, $d = 0$, $f = 0$ ec, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varphi = 0$ ec, e tutti i termini, ne' quali entrano queste lettere anderanno a zero, onde essa si cambierà nella seguente

$$x = \frac{\beta}{a} + \frac{a^3\delta - \beta^3 c}{a^4} \times y^3 \frac{+a^6\lambda - 3\beta^2 a^3 c\delta - ae\beta^5 + \beta^5 c^2}{a^7} \times y^5 + \text{ec.}$$

Se l'equazione fosse stata $ax + dx^4 + gx^7 +$ ec. $= \beta y + \varepsilon y^4 + \mu y^7 +$ ec. nella serie generale $(\Pi)$ si dovrebbe fare $b = 0$, $c = 0$, $e = 0$, $f = 0$ ec., $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\lambda = 0$, $\varphi = 0$ ec., conseguentemente ella sarebbe $x = \frac{\beta}{a} + \frac{a^4 e - d\beta^4}{a^7} \times y^4 +$ ec.

900. Quanto al secondo caso sia data l'equazione $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ ec., e si voglia il valore di $x$ espresso da una serie data per $y$; poichè del primo membro dell'equazione del num. 898 non vi è, che il primo termine, il di cui coefficiente è 1, perciò nella serie $(\Pi)$ si faccia $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\lambda = 0$ ec., ed essa si cambierà nella seguente $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3} y^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5} \times y^3 +$

$$\frac{5abc + 6a^2b^2c - 5b^3 - a^2d}{a^7} \times y^4 + \frac{6a^3bd - a^3e + 3a^2c^2 - 21ab^2c + 4b^4 - 12a^2b^3c}{a^9} \times y^5 \text{ ec.}$$

901. Se l'equazione data al precedente numero 900 fosse stata $y^m = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ ec., e si avesse voluto il valore di $x$ espresso da una serie data per $y$, si avrebbe primieramente dovuto rendere lineare la $y$ con estrarre dall'uno, e l'altro membro della data equazione la radice $m$, lo che fatto si opererebbe giusta lo stesso num. 900.

902. Se non si avesse in pronto la serie $(\Pi)$ del num. 898., e fosse data l'equazione $y = ax + bx^2 + cx^3 +$ ec. con questo di trovare il valore di $x$ dato per $y$, ciò si otterrebbe operando nel modo stesso praticato al num. 898, con fare cioè la $x$ uguale a una serie indeterminata, come $Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4$ ec., nella quale devonsi sostituire tutte le potenze di $y$ prese dall'equazione data con alzarla successivamente a queste potenze, indi mediante il paragone de' termini ricavare i valori di A, B, C ec., dalla di cui sostituzione nella serie indeterminata, si avrà la serie cercata. Che se sarà data l'equazione $y = a + bx + cx^2 + dx^3 +$ ec. per facilitare il calcolo si faccia $y - a = z$, con che l'equazione data sarà $z = bx + cx^2 + dx^3 +$ ec., onde bisognerà fare $x$ uguale alla seguente serie indeterminata $Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ ec., e poscia operare come pur ora si è detto.

903. Dalle cose esposte s'intende come si dovrà regolare, se essendo data l'equazione $ax + byx + cy^2x + dy^3x +$ ec. $= \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 +$ ec., o qualunque altra consimile, si voglia il valore di $x$ espresso da una serie data per $y$.

904.

904. Resterebbe da dimostrarsi l'operazione esposta al num. 898, ma questa è una cosa tanto evidente, che nulla più, mentre con sostituirsi nel primo membro dell'equazione (Δ) in luogo delle potenze di $x$ i loro corrispondenti valori, egli non si altera; ma col trasferirsi da una parte del segno d'egualità tutti i termini di una equazione essa va a zero, lo che non succede, se non con distruggersi rispettivamente i termini consimili: Ottimamente adunque l'aggregato de' termini consimili si uguaglia a zero a fine di avere i valori delle assunte indeterminate A, B, C ec. Lo che era da dimostrarsi.

905. Veniamo per ultimo a un caso particolare. Data l'equazione $y = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 +$ ec. si voglia il valore di $x$ espresso da una serie data per $y$. Prendo la serie generale (Π) del num. 898, nella quale faccio $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\epsilon = 0$ ec., e in oltre $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$, $e = \frac{3}{40}$, $f = 0$, $g = \frac{5}{112}$ ec. con che ho $x = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{5040}y^7 +$ ec.

## ARTICOLO V.

### *Modo di sommare le serie.*

906. Tra le serie d'infiniti termini, delle quali si vuole la somma, altre sono sommabili, che ricevono una somma finita: Altre non ammettono una somma esatta, ma solo per approssimazione: Alcune danno una somma infinita, in quanto che o sono crescenti, o sia divergenti, o pure essendo decrescenti procedono con un tale ordine di parti, che non si possono avere in un tutto, se egli non si prenda un numero infinito di volte, e in tal caso, che questo tutto si prenda un numero infinito di volte, la serie è infinita, ovvero *vice versa* essendo la serie infinita, il tutto si deve prendere un numero infinito di volte. Tale è la serie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ec., i di cui termini vanno bensì decrescendo, ma quando il loro numero è infinito, infinita è pure la somma della serie. Alcune altre serie danno una somma minore di qualunque quantità assegnabile. Ciò si può vedere osservando come procedono le somme delle seguenti serie infinite, per le quali si è trovato al num. 1104. del I. Tomo, che

di $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} +$ ec. la somma è $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

di $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} +$ ec. la somma è $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

di

di $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}+$ ec. la ſomma è $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

di $\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1296}+\frac{1}{7776}+$ ec. la ſomma è $\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$ ec.

Quindi le ſomme di queſte ſerie andando continuamente decreſcendo a miſura, che creſce il denominatore del primo termine, ben ſi vede, che eſſendo arbitrario il primo termine, egli ſi potrà prendere tale, che la ſomma della ſerie ſia minore di qualunque quantità aſſegnabile. La ragione poi per cui queſte ſerie danno una ſomma minore, e minore del tutto che conſidero per l'unità, ſi è, perchè tra i termini di queſte ſerie non cadono tutte le parti, che formano il tutto, e il numero delle parti mancanti è tanto maggiore, quanto maggiore è il denominatore del primo termine.

907. Nel determinare la ſomma delle ſerie io ſeguirò il metodo del Chiariſſimo Padre Riccati della Compagnia di Gesù communicatoci nell'aureo ſuo Commentario *De ſeriebus recipientibus ſummam algebraicam, aut exponentialem*, avvegnachè facile, e piano egli ſia, e vanti maggiore generalita ſopra ogni altro. Si è veduto al num. 811, che tre ſono i generi principali, ne'quali diſtinguonſi le ſerie, cioè in ſerie aritmetiche, in ſerie geometriche, e in ſerie aritmetico-geometriche. Anderò per ordine eſponendo il modo di determinare le ſomme.

908. Prima di tutto però biſogna dire, che coſa ſia il termine generale di una ſerie. Termine generale pertanto di una ſerie non è altro, che una certa funzione (dal num. 558. coſta che coſa debbaſi intendere per nome di funzione) di una lettera indeterminata, per eſempio $n$, la qual funzione rappreſenta qualſivoglia termine della ſerie; per lo che per avere un certo termine della ſerie, baſta ſoſtituire nella detta funzione in luogo di $n$ quel numero della ſerie naturale, che eſprime il poſto dello ſteſſo termine nella ſerie: Così per avere il ſettimo termine biſognerà ſoſtituire il 7 in luogo di $n$, e biſognerà ſoſtituirci il 21 per avere il termine vigeſimo primo; e per avere tutti i termini della ſerie, cominciando dal primo, biſognerà ſoſtituirci ſucceſſivamente tutti i numeri 1, 2, 3, 4, 5 ec. della ſerie naturale. Ora da ciò, e da quanto ſi è detto all'Articolo IX. del Capo III. ſi intende, che qualſivoglia equazione è termine generale di una ſerie, le quali ſerie ſono di genere aritmetico (giuſta il num. 811.)

909. Somma generale di una ſerie non è altro, che una certa funzione di una lettera indeterminata $n$, la qual funzione rappreſenta generalmente la ſomma di quanti termini ſi vogliono della ſerie, e per avere attualmente queſta ſomma baſta ſoſtituire nella detta funzione in luogo di $n$ il numero de'termini da ſommarſi: Come volendoſi la ſomma di undici termini, ſi dovrà ſoſtituire il numero 11 in luogo di $n$.

910. In avvenire la lettera $n$ indicherà ſempre il numero de'termini, o ſia (che poi ritorna lo ſteſſo) eſprimerà il poſto, che occupa un certo termine nell'ordine de'termini.

911. Due coſe adunque devonſi principalmente conſiderare riſpetto alle ſerie, cioè il loro termine generale, e la loro ſomma. Data la ſomma generale di una ſerie ſi paſſa facilmente a trovare il di lei termine generale, e dal termine generale ſi può paſſare alla ſomma. Il metodo del Padre Riccati ſi riduce a prendere certe for-

formole, che rappreſentino indeterminatamente le ſomme generali delle ſerie; da queſte formole ſi deducono i termini generali, i quali devono ſomminiſtrare le condizioni, che aver debbono i veri termini generali, mediante i quali deveſi paſſare alle ſomme cercate. L'eſempio or ora renderà tutto palpabile. Il metodo ſi appoggia al ſeguente ſempliciſſimo

912. Teorema. In qualunque ſerie il termine generale è uguale alla ſomma di tutti i termini incluſivamente fino al termine $n$, meno la ſomma di tutti i termini fino al termine $n-1$ incluſivamente: Onde chiamando $=T$ il cercato termine $n^{eſimo}$, dicendo $=S$ la ſomma de' termini indicati dal numero $n$, e facendo $=s$ la ſomma de' termini eſpreſſi dal numero $n-1$, ſarà $T=S-s$.

913. La verità di queſto teorema è evidentiſſima, poichè dalla ſomma di un numero $n-1$ di termini più il termine $n^{eſimo}$ riſulta la ſomma di un numero $n$ di termini; dunque perchè la ſottrazione diſtrugge ciò, che ha fatto la ſomma, ſe dalla ſomma di un numero $n$ di termini ſi ſottrerrà la ſomma di un numero di termini $n-1$, il reſiduo ſarà il termine $n^{eſimo}$, conſeguentemente egli ſarà il termine generale cercato.

914. Qualora pertanto ſia data la ſomma generale di una ſerie, che ſarà eſpreſſa da una funzione di $n$, ſi ſoſtituiſca in queſta funzione $n-1$ in luogo di $n$, e la formola, che ne riſulta, ſi ſottragga dalla data ſomma generale, e il reſiduo ſarà il termine generale cercato: Sia data per eſempio la ſomma generale $8n+\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}n^3=S$, ſi ſoſtituiſca in queſta ſomma $n-1$ in luogo di $n$, e ſi avrà $8n-8+\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n^3-2n^2+2n-\frac{2}{3}=s$. Si ſottragga $s$ da S, e ſi avrà $S-s=8+\frac{1}{3}+2n^2-2n+\frac{2}{3}=9-2n+2n^2=T$, che è il termine generale cercato.

915. Acciò che il termine generale T eſpreſſo da $S-s$ poſſa ſervire al biſogno non deveſi laſciare ſotto queſta forma $S-s$, dalla quale ſi ricavano due ſerie mutuamente diſtruggenteſi a riſerva del primo termine di una, e dell'ultimo dell'altra, ma mediante la conveniente riduzione deveſi mettere ſotto altra forma la più propria, come per eſempio ſi è praticato al precedente numero 914.

916. Non ſempre poi, che ſi abbia $T=S-s$, ſarà S la vera ſomma della ſerie, ma potrà eſſa eſſerne maggiore, o minore di una certa quantità indipendente da $n$. Per aſſicurarſene ſi ſoſtituiſca 1 in luogo di $n$ tanto nel termine generale T, come nella ſomma S, e ſe da queſta ſoſtituzione riſulterà $T=S$, ſarà S la vera ſomma, poichè mediante la ſoſtituzione di 1 in luogo di $n$, ſi riduce la ſomma S al valore del primo termine, il qual pure deve eſſere eſpreſſo da T in virtù della ſteſſa ſoſtituzione, conſeguentemente deve eſſere $T=S$: Ma ſe ſarà $T>S$, o $T<S$, tanto nell'uno, come nell'altro caſo non ſarà S la vera ſomma, e per ridurre la S ad eſſere la vera ſomma, vi ſi dovrà nel primo caſo aggiungere la differenza fra T, ed S, e nel ſecondo vi ſi dovrà levare.

*Modo di ſommare le ſerie algebraiche.*

917. Cominciamo dalle ſerie ricorrenti aritmetiche, che chiamanſi ſerie algebraiche, ed eſponiamo la maniera di determinarne i loro termini, e ſomme generali. Per determinare i termini generali di queſte ſerie ſi potrebbe quì richiamare il metodo dato al num. 732, poichè il termine generale di qualunque di queſte ſerie è ſempre un' equazione algebraica; amo però meglio di ſeguire l' intrapreſo metodo del Padre Riccati. Poichè (pel num. 916.) quelle formole, che hanno un termine coſtante indipendente da $n$ non danno le vere ſomme, perciò prendo la formola generale $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4+$ ec., di cui ciaſcun termine involve la lettera $n$, e dalla quale deſumerò ordinatamente il neceſſario numero de' termini, che devono ſomministrare la ſomma di una propoſta ſerie; mentre ſe la ſerie riſulterà da quantità uguali, la di lei ſomma ſarà eſpreſſa da $An$: Se la ſerie avrà le prime differenze coſtanti, la di lei ſomma ci verrà data da $An+Bn^2$: Se la ſerie avrà le ſeconde differenze coſtanti, la formola eſprimente la di lei ſomma ſarà $An+Bn^2+Cn^3$, e così in ſeguito. Di fatto cerco che ſerie ſarà quella, la di cui ſomma viene eſpreſſa da $An$, e che quantità avrà per termine generale. Giuſta il num. 914. ſoſtituiſco $n-1$ in luogo di $n$ nella data eſpreſſione $An$, poſcia ſottraggo ciò, che mi viene da $An$, ed ho $An-An+A=A$. Eſſendo dunque $T=S-s=A$ il termine generale, ben ſi vede, che la ſerie, la quale naſce da queſto termine generale, è una ſerie di quantità eguali, cioè eſſa è A, A, A, A.

918. Seguiterò a dare il modo di ritrovare i termini generali delle ſerie algebraiche de' ſuſſeguenti ordini, eſpreſſi però da quantità indeterminate, ſiccome pure tali aſſumo le ſomme generali; che poi eſporrò la maniera di determinare e per gli uni, e per le altre i valori delle aſſunte indeterminate. Paſſo pertanto a inveſtigare, che ſerie ſarà quella, la di cui ſomma generale è $An+Bn^2$, e quale dovrà eſſere il di lei termine generale. In queſta quantità $An+Bn^2$ ſoſtituiſco $n-1$ in luogo di $n$, indi dalla medeſima ſottraggo ciò, che mi viene, e trovo $S-s=An+Bn^2-An+A-Bn^2+2Bn-B$: Onde è $T=A-B+2Bn$. Se in luogo di $n$ ſi ſoſtituiranno ſucceſſivamente in queſto termine generale i numeri 1, 2, 3, 4 ec. della ſerie naturale, ſi avrà la ſeguente ſerie $A+B$, $A+3B$, $A+5B$, $A+7B$ ec., che è una ſerie algebraica di primo ordine, le di cui differenze prime ſono coſtanti ed uguali a $2B$.

919. Per le ſerie algebraiche adunque di primo ordine la forma del termine generale è $A-B+2Bn$, e la forma della ſomma generale è $An+Bn^2$.

920. Sia data la ſomma generale $An+Bn^2Cn^3$. Si ſoſtituiſca $n-1$ in luogo di $n$, e ſi faccia al ſolito la ſottrazione della quantità, che ne naſce, e il reſiduo ſarà il termine generale della ſerie, la di cui ſomma generale è la propoſta. Ora ſi ha $T=S-s=An+Bn^2+Cn^3-An+A-Bn^2+2Bn-B-Cn^3+3Cn^2-3Cn+C$, cioè $T=A-B+C+2Bn-3Cn+3Cn^2$. In queſto termine generale ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente in luogo di $n$ i numeri 1, 2, 3, 4 ec. della ſerie naturale, e ne verrà la ſeguente ſerie $A+B+C$, $A+3B+7C$, $A+5B+19C$ ec., che è una ſerie algebraica di ſecondo ordine, le di cui differenze ſeconde ſono coſtanti, ed uguali a $6C$.

921. Per le ſerie algebraiche adunque di ſecondo ordine la forma del termine generale è $A-B+C+\overline{2B-3C}\times n+3Cn^2$, e la forma della ſomma generale è $An+Bn^2+Cn^3$.

922.

922. Sia proposta la somma generale $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$. Se ne deduca al solito il termine generale, che trovasi essere $T=S-s=A-B+C-D+\overline{2B-3C+4D}\times n+\overline{3C-6D}\times n^2+4Dn^3$. Si sostituiscano in questo termine generale in luogo di $n$ i numeri della serie 1, 2, 3, 4, ec., e ne verrà la seguente serie $A+B+C+D$, $A+3B+7C+15D$, $A+5B+19C+65D$, $A+7B+37C+175D$ ec., che è una serie algebraica di terzo ordine, le di cui terze differenze sono costanti, e sono uguali a $24D$.

923. Per le serie algebraiche adunque di terzo ordine la forma del termine generale è $A-B+C-D+\overline{2B-3C+3D}\times n+\overline{3C-6D}\times n^2+4Dn^3$, e la forma della somma generale è $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$.

924. Basteranno queste formole trovate per avere la maniera di trovare le altre per le serie d'ordini superiori, e per iscuoprire la legge, colla quale procedono. Le serie adunque algebraiche, il di cui ordine sia espresso per esempio da $m$, hanno per termine generale una funzione di $n$, in cui un termine è costante, e gli altri sono distinti dalle successive potenze di $n$ fino alla potenza, che ha $m$ per esponente. La somma generale poi d'una serie d'ordine $m$ è una funzione di $n$, in cui niun termine è costante, ma tutti sono distinti dalle successive potenze di $n$ cominciando dalla potenza di esponente 1 fino alla potenza di esponente $m+1$: Per lo che la formola indeterminata esprimente il termine generale di una serie d'ordine $m$ sarà $A+Bn+Cn^2+Dn^3\ldots.+Nn^m$, e la formola esprimente la somma generale sarà, come si detto al num. 917., $An+Bn^2+Cn^3+\ldots Nn^{m+1}$.

925. Dopo che si sono ritrovate le formole indeterminate dei termini, e delle somme generali delle serie, resta a dirsi come s' abbiano a determinare i valori delle assunte quantità indeterminate A, B, C, ec. dalla sostituzione de' quali ne' dati termini, e somme indeterminate, si otterranno i cercati termini, e somme generali. La maniera è la seguente. Sia data una serie, che abbia le differenze $m^{esime}$ costanti; si prenda il suo corrispondente termine generale indeterminato (nel modo detto ai num. 918, 920, 922), in cui si sostituiscano successivamente in luogo di $n$ i numeri 1, 2, 3, 4 ec. della serie naturale fino al numero $m+1$, e i risultati da queste sostituzioni si uguaglino al primo, secondo terzo ec. termine della serie, e mediante queste equazioni, che saranno tante, quante sono le indeterminate A, B, C, ec. se ne ritrovino i loro valori nella maniera praticata al num. 733. Tanto nel termine, come nella somma indeterminata si sostituiscano questi valori in luogo di A, B, C, ec. e si avrà sì il termine generale, come la somma cercata. Si debba per esempio trovare il termine, e la somma generale della serie 60, 120, 210, 336, che ha le differenze terze costanti uguali a 6. Si prenda il termine generale indeterminato corrispondente alle serie, che hanno le differenze terze costanti, il quale (giusta il num. 922.) è $A-B+C-D+\overline{2B-3C+4D}\times n+\overline{3C-6D}\times n^2+4Dn^3$, che per maggior comodo delle sostituzioni si può disporre così

$$\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bn \\ C - 3Cn + 3Cn^2 \\ -D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3 \end{array}$$

Si ſoſtituiſcano ſucceſſivamente in luogo di $n$ i numeri della ſerie naturale, e i riſultati ſi paragonino ai dati termini della ſerie come ſegue

| | | |
|---|---|---|
| Soſtituendoſi 1 in luogo di $n$ | | $A+B+C+D=60$ |
| Soſtituendoſi | 2 | $A+3B+7C+15D=120$ |
| Soſtituendoſi | 3 | $A+5B+19C+65D=210$ |
| Soſtituendoſi | 4 | $A+7B+37C+175D=336$ |

Si ſottragga la prima dalla ſeconda, la ſeconda dalla terza, e la terza dalla quarta, con che ſi avranno le tre ſeguenti equazioni

$$(\Delta)\quad \begin{array}{l} 2B+6C+14D=60 \\ 2B+12C+50D=90 \\ 2B+18C+110D=126 \end{array}$$

Di queſte equazioni ſi ſottragga la prima dalla ſeconda, e la ſeconda dalla terza, e ne verranno le due ſeguenti

$$(\Theta)\quad \begin{array}{l} 6C+36D=30 \\ 6C+60D=36 \end{array}$$

Levandoſi la prima dalla ſeconda ſi avrà $24D=6$, e però $D=\frac{1}{4}$. Si ſoſtituiſca queſto valore in una delle due equazioni ſegnate $(\Theta)$, per eſempio nella prima, e ne riſulterà $6C+9=30$, cioè $C=\frac{7}{2}$. Si ſoſtituiſcano queſti valori di C, D in una delle equazioni ſegnate $(\Delta)$, come nella prima, e ne verrà $2B+21+\frac{7}{2}=60$, vale a dire $B=\frac{71}{4}$. Finalmente in una delle prime equazioni, come in $A+B+C+D=60$, ſi ſoſtituiſcano i ritrovati valori di B, C, D, e ſi avrà $A+\frac{71}{4}+\frac{7}{2}+\frac{1}{4}=60$, conſeguentemente $A=\frac{77}{2}$. Se pertanto ſi ſoſtituiranno queſti valori di A, B, C, D tanto nel termine generale indeterminato

$$\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bn \\ C - 3Cn + 3Cn^2 \\ -D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn \end{array}$$

come nella somma $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$, si avrà $24+26n+9n^2+n^3$ per termine generale della proposta serie, e $\frac{77}{2}n + \frac{71}{4}n^2 + \frac{7}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$ per somma generale.

926. Si avverta, che dopo essersi fatte le sostituzioni dei numeri 1, 2, 3, 4 ec. della serie naturale in luogo di $n$ nel termine generale indeterminato, non è arbitrario il paragone dei risultati a qual più piaccia termine della serie, ma devesi cominciare il paragone dal primo termine della serie, indi procedere ordinatamente agli altri; e generalmente per paragonare il termine generale a un termine arbitrario della serie bisogna sostituire nel termine generale in luogo di $n$ quel numero della serie naturale, che indica il posto nella serie del termine dato.

927. Che se essendo dato il termine generale d'una qualunque serie, fosse proposto di trovarne la somma generale, si faccia così: Si prenda il termine generale indeterminato corrispondente al dato termine generale, si faccia il mutuo paragone delle loro parti, e si determinino i valori di A, B, C ec., i quali sostituiti nella corrispondente somma indererminata, renderanno la somma generale cercata. Si debba per esempio trovare la somma generale della serie, che ha per termine generale $4-n+n^2$. Si prenda il corrispondente termine generale indeterminato che è

$$\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bn \\ C - 3Cn + 3Cn^2 \end{array}$$

si faccia il paragone delle parti così $A-B+C=4$, $2B-3C=-1$, $3C=1$. Da quest'ultima equazione si ha $C=\frac{1}{3}$, che sostituito nella seconda dà $2B-1=-1$, cioè $B=0$, finalmente sostituendosi nella prima i valori di B, C ne viene $A=\frac{11}{3}$. Ma la somma indeterminata, che corrisponde al dato termine generale è $An+Bn^2+Cn^3$; sostituendosi adunque i ritrovati valori di A, B, C, sarà $\frac{11}{3}n + \frac{1}{3}n^3$ la somma generale cercata. Questi due esempj serviranno di regola per qualunque altro caso.

928. Quantunque l'esposto metodo per trovare i termini e le somme generali delle serie algebraiche sia facile, e piano, si può per altro mediante alcune riflessioni facilitare anche di più l'invenzione degli uni, e delle altre. Cominciamo dalle serie, che hanno le differenze prime costanti, il di cui termine generale indeterminato è (pel num. 919.) $A-B+2Bn$ ($\alpha$), e la somma è $An+Bn^2$ ($\beta$). Assumo la serie algebraica cattolica di primo ordine $a$; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; $a+4b$ ec., il di cui primo termine è $a$, e la differenza è $b$, indi uguaglio il di lei primo termine $a$ col termine generale ($\alpha$), in cui ho posto 1 in luogo di $n$, e mi viene $A+B=$

$B=a$; di nuovo uguaglio il secondo termine $a+b$ della serie allo stesso termine generale $(\beta)$ dopo avere supposto $n=2$, con che ritrovo $A+3B=a+b$. Da questa equazione sottraggo la precedente e mi viene $2B=b$, cioè $B=\frac{1}{2}b$. Sostituisco questo valore nella prima equazione $A+B=a$, ed ho $A+\frac{1}{2}b=a$, e però $A=a-\frac{1}{2}b$. Sostituisco adesso nel termine generale $(\beta)$ questi ritrovati valori di A, B, con che egli diventa $a-b+bn$, vale a dire $a+\overline{n-1}\times b$. Parimente sostituendo i valori di A, B nella somma $(\delta)$, essa diverrà $an-\frac{1}{2}bn+\frac{1}{2}bn^2$, o sia $an+\frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times$.

929. Passiamo alle serie, che hanno le differenze seconde costanti; che perciò prendo la serie algebraica cattolica di secondo ordine $a$; $a+b$; $a+2b+c$; $a+3b+3c$; $a+4b+6c$; $a+5b+10c$; ec. di cui il primo termine è $a$, la prima differenza è $b$, e la seconda differenza, che è costante e $c$. Giusta il num. 921. il termine generale indeterminato delle serie di secondo ordine è $(\gamma)$ $A-B+C+\overline{2B-3C}\times n+3Cn^2$, e la somma è $(\epsilon)$ $An+Bn^2+Cn^3$. Supposto 1 in luogo di $n$ nel termine generale, lo paragono al primo termine della serie così $A+B+C=a$; poscia lo paragono al secondo termine, posto $n=2$, e mi viene $A+3B+7C=a+b$; finalmente lo paragono al terzo termine dopo aver fatto $n=3$, lo che mi dà $A+5B+19C=a+2b+c$. Sottraggo la prima di queste due equazioni dalla seconda, e la seconda dalla terza, e trovo le due seguenti

$$(X)\qquad \begin{matrix} 2B+6C=b \\ 2B+12C=b+c \end{matrix}$$

Sottraggo per ultimo la prima di queste due equazioni dalla seconda, e ne ho $6C=c$, cioè $C=\frac{1}{6}c$, il qual valore sostituito nella prima delle due equazioni segnate (X) dà $B=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$; finalmente si sostituiscano questi valori di A, B nella prima equazione $A+B+C=a$, e si avrà $A=a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c$. Si sostituiscano pertanto questi ritrovati valori di A, B, C nel termine generale $(\gamma)$, con che esso diverrà $a-b+c+bn-\frac{2}{3}cn+\frac{1}{2}cn^2$, o sia $a+\frac{\overline{n-1}}{1}\times b+\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\times c$, perchè $-b+bn=\overline{n-1}\times b$, e $c-\frac{3cn}{2}+\frac{cn^2}{2}=\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\quad 2}\times c$. Col fare le sostituzioni

ſtituzioni dei valori di A, B, C nella ſomma (•), eſſa ſi cambierà in $an - \frac{1}{2}bn +$ $\frac{1}{3}cn + \frac{1}{2}bn^2 - \frac{1}{2}cn^2 + \frac{1}{6}cn^3$, o ſia $an + \frac{n\overline{\times n-1}}{1.\ 2.}\times b + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times c$, perchè $- \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}bn^2 = \frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times b$, e $\frac{1}{3}cn - \frac{1}{2}cn^2 + \frac{1}{6}cn^3 =$ $\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}$

930. Proſeguendo lo ſteſſo calcolo ſi troverà, che tanto i termini generali, come le ſomme dei ſuſſeguenti ordini ſeguono la ſteſſa legge, lo che facilita l'invenzione del termine, e della ſomma generale di una ſerie di qualſivoglia ordine, e del pari ne facilita l'uſo, come ſi vedrà più chiaramente nel ſeguente eſempio. Intanto ſoggiungerò i termini generali diſtinti colla lettera T, e le ſomme generali diſtinte colla lettera S delle ſerie dei primi cinque ordini a fine di mettere in proſpetto la legge, colla quale procedono.

Per le ſerie algebraiche di primo ordine.

$$T = a + \frac{\overline{n-1}}{1}\times b$$

$$S = an + \frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times b$$

Per le ſerie algebraiche di ſecondo ordine

$$T = a + \frac{\overline{n-1}}{1.}\times b + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}\times c$$

$$S = an + \frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times b + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times c$$

Per le ſerie algebraiche di terzo ordine

$$T = a + \frac{\overline{n-1}}{1.}\times b + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}\times c + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\times d$$

$$S = an + \frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times b + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times c + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\times d$$

Per

Per le ſerie algebraiche di quarto ordine.

$$T = a + \frac{\overline{n-1}}{1}\chi b + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1.\ 2.}\chi c + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}\,\chi\,\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\chi d + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}\,\chi\,\overline{n-3}\,\chi\,\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\chi e$$

$$S = an + \frac{n\chi\overline{n-1}}{1.\ 2.}\chi b + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\chi c + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\chi d + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}\,\chi\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\chi e$$

Per le ſerie algebraiche di quinto ordine.

$$T = a + \frac{\overline{n-1}}{1.}\chi b + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1.\ 2.}\chi c + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}\,\chi\,\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\chi d + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}\,\chi\,\overline{n-3}\,\chi\,\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\chi e + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}\,\chi\,\overline{n-3}\,\chi\,\overline{n-4}\,\chi\,\overline{n-5}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\chi f$$

$$S = an + \frac{n\chi\overline{n-1}}{1.\ 2.}\chi b + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\chi c + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\chi d + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}\,\chi\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\chi e + \frac{n\chi\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}\,\chi\overline{n-4}\,\chi\overline{n-5}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}\chi f$$

931. Qualunque termine generale adunque coſta di tante parti, quante unità contiene l'eſponente dell'ordine della ſerie accreſciuto di una unità. La prima parte è ſempre il primo termine della ſerie, le altre parti contengono le quantità $b$, $c$, $d$, che dinotano le ſucceſſive differenze della ſerie. Lo ſteſſo ha luogo nella formola della ſomma.

932. Si debbano per eſempio trovare il termine, e la ſomma generale della ſerie 0. 10. 68. 234. 592. 1250. ec. Poichè queſta ſerie ha le quarte differenze coſtanti, ſi prendano le due precedenti formole per le ſerie di quarto ordine; e perchè il primo termine della ſerie è $=0$, ſarà $a=0$. Per avere i valori delle altre lettere $b$, $c$, $d$ ec., ſi prendano le differenze delle differenze ec. come ſegue

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Differenze quarte coſtanti | | | | 24. | 24. |
| Differenze terze | | | 60. | 84. | 108. |
| Differenze ſeconde | | 48. | 108. | 192. | 300. |
| Differenze prime | 10. | 58. | 166. | 358. | 658. |
| Serie data | 0. 10. | 68. | 234. | 592. | 1250. |

Quindi $b=10$; $c=48$; $d=60$; $e=24$, e però fatte le ſoſtituzioni di queſti valori nelle dette formole, il termine generale della data ſerie ſarà

T=

$$T = \frac{\overline{n-1}}{1.}\times 10 + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}\times 48 + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\times 60$$
$$+\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\times 24$$

e la ſomma generale ſarà

$$S = \frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times 10 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times 48 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\times 60$$
$$+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\times 24$$

Conſiderandoſi la ſerie non cominciante dal 0, ma dal 10 così 10, 68, 234, 592 ec., il di lei termine generale ſarà

$$T = 10 + \frac{\overline{n-1}}{1.}\times 58 + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}\times 108 + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\times 84$$
$$+\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\times 24$$

e la ſomma generale ſarà

$$S = 10n + \frac{n\times\overline{n-1}}{1.\ 2.}\times 58 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}\times 108 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\times 84$$
$$+\frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}\times\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}\times 24$$

Alcune volte potrà tornare più comodo ridurre ad altra forma queſti termini, e ſomme generali. Ciò ſi otterrà con fare le attuali moltiplicazioni ivi indicate. Prendo per eſempio il termine, e la ſomma generale precedente. Il termine generale mediante le attuali moltiplicazioni diventa

$$\begin{array}{r} 10 \\ -58 + 58n \\ +108 - 162n + 54n^2 \\ -84 + 154n - 84n^2 + 14n^3 \\ +24 - 50n + 35n^2 - 10n^3 + n^4 \\ \hline \end{array}$$

e però $T = 5n^2 + 4n^3 + \cdots$

La ſomma colle attuali moltiplicazioni diventa

$$\begin{array}{l} \quad 10n \\ -\ 29n + 29n^2 \\ +\ 36n - 54n^2 + 18n^3 \\ -\ 21n + \frac{77}{2}n^2 - 21n^3 + \frac{7}{2}n^4 \\ +\ \frac{24}{5}n - 10n^2 + 7n^3 - 2n^4 + \frac{1}{5}n^5 \\ \hline \end{array}$$

e però $S = \frac{4}{5}n + \frac{7}{2}n^2 + 4n^3 + \frac{3}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$

933. Finora ho considerate le serie algebraiche risultanti da termini interi, passeremo adesso a considerare quelle, i di cui termini sono fratti; di queste frazioni poi i numeratori fra loro, e parimente i denominatori fra loro sono altrettanti termini di serie algebraiche. Assumerò le somme generali indeterminate, come ho fatto ai num. 917, 918, 920, e 922, per quindi dedurne i cercati termini, e somme generali.

934. Prendo primieramente la somma indeterminata $\frac{Ln}{A+Bn}$, e cerco le condizioni, che devono accompagnare il termine generale corrispondente a questa somma indeterminata. Giusta il metodo del Padre Riccati vi sostituisco $n-1$ in luogo di $n$, indi dalla somma data sottraggo il risultato per avere il termine generale, che trovasi essere $\frac{Ln}{A+Bn} - \frac{L\sqrt{n-1}}{A+B\sqrt{n-1}} = \frac{AL}{A+B\sqrt{n-1}\sqrt{A+Bn}}$. Questo termine generale ha per numeratore una quantità costante, e per denominatore ha due fattori, ognuno de' quali considerato come un termine generale somministra una serie di primo ordine, e tanto una, come l'altra ha la stessa differenza B, ne v'è tra loro altro divario, se non che la seconda serie comincia dal secondo termine della prima, come si vedrà facilmente sostituendo in questo denominatore in luogo di $n$ i numeri della serie naturale 1, 2, 3, 4 ec.. Sia $L=4$, $A=3$, $B=2$; fatte le debite sostituzioni, dal termine generale nascerà la seguente serie $\frac{12}{3\cdot5}$, $\frac{12}{5\cdot7}$, $\frac{12}{7\cdot9}$, $\frac{12}{9\cdot11}$, $\frac{12}{11\cdot13}$ ec., di cui il termine generale è $\frac{12}{3+2\sqrt{n-1}\sqrt{3+2n}}$, e la somma generale è $\frac{4n}{3+2n}$. Se fosse data la serie $\frac{12}{3\cdot5}$, $\frac{12}{5\cdot7}$, $\frac{12}{7\cdot9}$ ec., si determinerebbero i valori di A, B, L facendo A uguale al primo fattore 3 del denominatore, $B=7-5=2$, $AL=12$, e però $L=\frac{12}{A}=\frac{12}{3}=4$.

935. Vengo alle serie, che ricevono la somma generale di questa forma

$Ln$

$\frac{Ln+Mn^2}{A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn}$. Sostituendo al solito $n-1$ in luogo di $n$, e facendo la sottrazione, e la debita riduzione allo stesso denominatore si ottiene il seguente termine generale

$$\frac{AL-BL n-AM-BM n+2AM n}{A+B\times\overline{n-2}\times A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn}$$

Osservando questa formola si scorgerà, che il numeratore è termine generale d'una serie algebraica di primo ordine, purchè il coefficiente di $n$ non diventi uguale a zero, nel qual caso il numeratore sarà una quantità costante; il denominatore poi costa di tre fattori, ognuno de' quali è termine generale di una serie algebraica di primo ordine, le quali serie hanno tutte la stessa differenza, ma la seconda comincia dal secondo termine della prima, e la terza comincia dal terzo termine della prima, come si vedrà sostituendo successivamente in luogo di $n$ i numeri 1, 2, 3, 4 ec. della serie naturale. Sia pertanto $A=3$, $B=1$, $M=\frac{5}{2.3}$, $L=\frac{7}{2.3}$, e fatte le debite sostituzioni si avrà la serie $\frac{4}{2.3.4}$, $\frac{7}{3.4.5}$, $\frac{10}{4.5.6}$, $\frac{13}{5.6.7}$ ec., il di cui termine generale è $\frac{1+2n}{3+1\times\overline{n-2}\times 3+1\times\overline{n-1}\times 3+n}$, e la somma generale è $\frac{7n+5n^2}{2\times 3\times\overline{2+n}\times\overline{3+n}}$.

936. Collo stesso metodo si potrà procedere a determinare i termini generali delle serie, che ammettono le seguenti somme generali

$$\frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{A+B\times\overline{n-2}\times A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn};$$

$$\frac{Ln+Mn^2+Nn^3+Pn^4}{A+B\times\overline{n-3}\times A+B\times\overline{n-2}\times A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn}\text{ ec.}$$

937. Potrà succedere, che nei termini della serie manchi qualche fattore intermedio, nel qual caso nella formola del termine generale mancherà pure il parzial termine generale corrispondente a questo fattore. In questo caso bisognerà moltiplicare il numeratore, e il denominatore di ciascun termine della serie per i termini mancanti, e similmente per le loro corrispondenti formole generali dovrassi moltiplicare il numeratore, e il denominatore del termine generale. Sia data per esempio

la ſerie $\frac{1}{2.11}$, $\frac{1}{5.14}$, $\frac{1}{8.17}$, $\frac{1}{11.20}$ ec., dei di cui denominatori i fattori diſpoſti per ordine formano le due ſeguenti ſerie

2. 5. 8. 11.
11. 14. 17. 20.

Poichè la ſeconda ſerie comincia dal quarto termine della prima, ſi moltiplichi il numeratore, e il denominatore di ciaſcun termine della propoſta ſerie pel prodotto dei due fattori, che mancano, e ſi avrà $\frac{5.8.}{2.5.8.11.}$, $\frac{8.11.}{5.8.11.14}$, $\frac{11.14}{8.11.14.17}$, $\frac{14.17.}{11.14.17.20.}$ ec.

Della ſerie data poi il termine generale eſſendo $\frac{1}{8+3\times\overline{n-3}\times 8+3n}$, e i termini generali parziali corriſpondenti ai due termini mancanti eſſendo $8+3\times\overline{n-2}$, $8+3\times\overline{n-1}$, però il termine generale, che corriſponde alla ſerie completa, ſarà

$$\frac{\overline{8+3\times\overline{n-2}}\times\overline{8+3\times\overline{n-1}}}{\overline{8+3\times\overline{n-3}}\times\overline{8+3\times\overline{n-2}}\times\overline{8+3\times\overline{n-1}}\times\overline{8+3\times\overline{n}}}.$$

938. Baſtano le coſe dette, e per avere il metodo del Padre Riccati, e per dedurne, come ho fatto al num. 928, e ſeguenti, altre formole, le quali procedendo con coſtante legge ſi poſſono, data la ſerie, ſpeditiſſimamente comporre, e il di cui uſo non può eſſere più agevole. Comincio dalla ſerie corriſpondente alla ſomma generale indeterminata $\frac{Ln}{A+Bn}$. Si è trovato al num. 934., che il termine generale di queſta ſerie è $\frac{AL}{A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn}$, il di cui denominatore coſta di due fattori, da' quali naſcono due ſerie di primo ordine, e di uguali differenze, e la ſeconda di queſte ſerie incomincia dal ſecondo termine della prima. La ſerie pertanto, che naſce da $A+B\times\overline{n-1}$ ſia $a$, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$ ec., la ſerie, che naſcerà dal ſecondo fattore $A+Bn$ ſarà $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$ ec. Per determinare col primo termine $a$, e colla differenza $b$ di queſta ſerie i valori di A, B, ſi facciano i ſeguenti paragoni. Si ſoſtituiſca 1 in luogo di $n$ nel fattore $A+B\times\overline{n-1}$, indi ſi uguagli al primo termine della ſerie, e ſi avrà $A=a$: Poſcia ſi ſoſtituiſca 2 in luogo di $n$, e facendo il paragone col ſecondo termine della ſerie ne verrà $A+B=a+b$. Da queſta equazione ſi ſottragga la precedente $A=a$, e ſi otterrà $B=b$. Ecco dunque determinati i valori di A, e di B, i quali ſoſtituiti nel precedente termine generale (poichè il numeratore AL è coſtante, e cognito, lo fac-

faccio $=c$), lo cambiano in $\frac{c}{a+\overline{n-1}\times b\times a+bn}$. Essendo $AL=c$, o sia $aL=c$, sarà $L=\frac{c}{a}$. Per avere espressa in questo modo anche la somma generale niente altro resta a farsi, se non se sostituire nella somma assunta la quantità $a$ in luogo di A, $b$ in luogo di B, e $\frac{c}{a}$ in vece di L, con che essa diverrà $\frac{cn}{a\times a+\overline{bn}}$.

939. Cerchiamo ora con simile espressione il termine, e la somma generale delle serie, alle quali si riferisce la somma indeterminata $\frac{Ln+Mn^2}{A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn}$, cui al num. 935. si è trovato corrispondere il seguente termine generale

$$\frac{\begin{array}{r}AL-BLn\\-AM-BMn\\+2AMn\end{array}}{A+B\times\overline{n-2}\times A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn}$$

Di questa formola il numeratore essendo termine generale di una serie di primo ordine, purchè il coefficiente di $n$ non divenri zero, ben si vede, che i numeratori dei termini delle serie, delle quali si rratta, formano una serie algebraica di primo ordine, il di cui primo termine dicendosi $=r$, e la differenza $=d$, sarà (pel n. 918.)

$$c+\frac{\overline{n-1}}{1}\times d=\begin{array}{r}AL-BLn\\-AM-BMn\\+2AMn\end{array}$$

Il denominatore poi risulta da tre fattori, che sono termini generali di tre serie algebraiche di primo ordine, e di differenze uguali, ma il primo termine della seconda serie è il secondo della prima, e il terzo della stessa prima e il primo della terza; così che se la serie corrispondente ad $A+B\times\overline{n-2}$ sarà $a$, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ ec., la serie corrispondente ad $A+B\times\overline{n-1}$ sarà $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ ec., e la serie corrispondente ad $A+Bn$ sarà $a+2b$; $a+3b$ ec. Per determinare i valori di A, B, che entrano in questo denominarore, mediante il primo termine $a$, e la differenza $b$, si prenda il fattore $A+B\times\overline{n-2}$, e fatta $n=1$, si paragoni al primo termine della prima serie, e si avrà $A-B=a$. Di poi fatta $n=2$, si paragoni al

se-

ſecondo termine, e ne verrà $A=a+b$. Soſtituendoſi nella precedente queſto valore di A, ſi troverà $B=b$. Si facciano ora le debite ſoſtituzioni nel precedente termine generale, e ſe ne otterrà il ſeguente

$$\frac{c+\frac{\overline{n-1}}{1}\times d}{a+b+\overline{n-2}\times b\times a+b+\overline{n-1}\times b\times a+b+bn}$$

Per avere la ſomma generale con eſpreſſione ſimile prendo la propoſta ſomma indeterminata, vi ſoſtituiſco in luogo del denominatore $A+B\times\overline{n-1}\times A+Bn$ il ſuo corriſpondente valore $a+b+\overline{n-1}\times b\times a+b+bn$, che ſi ha con ſoſtituire in luogo di A, B i ſuoi poc' anzi trovati valori, poſcia ne faccio il paragone col termine generale, ſupponendo tanto in una, come nell'altro $n=1$ (perchè col ſupporſi $n=1$ tanto nella ſomma, come nel termine generale, ne riſulta il primo termine della ſerie), e mi viene $\frac{L+M}{a+b\times a+2b}=\frac{c}{a\times a+b\times a+2b}$, cioè (Z)

$L+M=\frac{c}{a}$: E ſiccome con ſupporſi $n=2$ nella ſomma generale ſi ha la ſomma dei due primi termini della ſerie, i quali eſſendo fratti devonſi prima per ſommarli ridurre allo ſteſſo denominatore, però nell' ultimamente trovato termine generale ſoſtituiſco prima 1, e poi 2 in luogo di $n$, e mi vengono i due primi termini della ſerie, che ſono $\frac{c}{a\times a+b\times a+2b}$, $\frac{c+d}{a+b\times a+2b\times a+3b}$, che ridotti allo ſteſſo denominatore, e ſommati danno $\frac{a\times c+d+a+2b\times c}{a\times a+b\times a+2b\times a+3b}$, che paragono alla ſomma propoſta (nella quale ſia fatto $n=2$, e ſiano ſoſtituiti i valori di A, B), così $\frac{2L+4M}{a+2b\times a+3b}=\frac{a\times c+d+c\times a+3b}{a\times a+b\times a+2b\times a+3b}$, cioè (X) $2L+4M=$ $\frac{a\times c+d+c\times a+3b}{a\times a+b}$, che diviſa per 2 è $L+2M=\frac{a\times c+d+c\times a+3b}{2\times a\times a+b}$, dalla quale ſottraendoſi l' equazione (Z) ne viene $M=\frac{a\times c+d+c\times a+3b}{2\times a\times a+b}-\frac{c}{a}$,

che

che col farſi le debite riduzioni diventa $M = \frac{c\sqrt{b-a} + a\sqrt{c+d}}{2\sqrt{a}\sqrt{a+b}}$. Soſtituendoſi queſto valore di M nell'equazione (Z) ſi troverà il valore di L, che è $L = \frac{c\sqrt{3a+b} - a\sqrt{c+d}}{2\sqrt{a}\sqrt{a+b}}$. Si mettano ora nella data ſomma indeterminata i ritrovati valori di L, M, A, B, ed eſſa diverrà

$$\frac{c\sqrt{3a+b} - a\sqrt{c+d}\times n + c\sqrt{b-a} + a\sqrt{c+d}\times n^2}{2\sqrt{a}\sqrt{a+b}\times a+b+n-1\times b\times a+b+bn}.$$

940. Oſſervando lo ſteſſo modo d'operare ſi troveranno le altre formole dei termini, e delle ſomme generali. Ne ſoggiungo quì alcune, acciò ſi veda la legge, che tengono. Colla lettera T eſprimerò il termine generale, e colla lettera S la ſomma generale. Le lettere $c$, $d$, $e$ ec. ſi riferiſcono alla ſerie, che riſulta dai numeratori delle frazioni, che ſono i termini della ſerie data; il $e$ diſegna il primo termine della ſerie, il $d$ eſprime la prima differenza, quella cioè, che paſſa tra il primo, e il ſecondo termine della ſerie, l'$e$ dinota la differenza ſeconda ec., come ſi è detto ai num. 931., 932.. Le lettere $a$, $b$ ſi riferiſcono alle ſerie, che riſultano dai fattori de' denominatori; la lettera $a$ rappreſenta il primo termine della prima ſerie, e la lettera $b$ eſprime la differenza, che è comune a tutte queſte ſerie.

Per le ſerie, che ricevono la ſomma generale di queſta forma $\frac{Ln}{A+Bn}$

I.

$$T = \frac{c}{a+n-1\times b\times a+bn}$$

$$S = \frac{cn}{a\sqrt{a+bn}}$$

Per

Per le ſerie, che ricevono la ſomma generale di queſta forma $\frac{Ln+Mn^2}{A+B\overline{n-1}\,\overline{A+Bn}}$

II.

$$T=\frac{c+\frac{\overline{n-1}}{1}d}{a+b+\overline{n-2}\,b\;\overline{a+b+n-1}\,b\;\overline{a+b+bn}}$$

$$S=\frac{c\overline{3a+b-a}\,\overline{c+d}\,n+c\overline{b-a+a}\,\overline{c+d}\,n^2}{2a\overline{a+b}\,\overline{a+b+n-1}\,b\;\overline{a+b+bn}}$$

Per le ſerie, che ricevono la ſomma generale di queſta forma

$$\frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{A+B\overline{n-2}\,\overline{A+B\overline{n-1}}\,\overline{A+Bn}}$$

III.

$$T=\frac{c+\frac{\overline{n-1}}{1}d+\frac{\overline{n-1}}{1}\frac{\overline{n-2}}{2}e}{a+2b+\overline{n-3}\,b\;\overline{a+2b+n-2}\,b\;\overline{a+2b+n-1}\,b\;\overline{a+2b+bn}}$$

$$S=\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2\overline{6c-3d+2e}+ab\overline{12c-4d+2e}+4b^2c\,n\\ +3a^2\overline{d-e}+3ab\overline{2c-d-e}+6b^2c\end{array}\right\}n^2+a^2e+4b\overline{d+e}+b^2c\,n^3}{6a\overline{a+b}\,\overline{a+2b}\;\overline{a+2b+n-2}\,b\;\overline{a+2b+n-1}\,b\;\overline{a+2b+bn}}$$

941. Debbaſi trovare per eſempio il termine, e la ſomma generale della ſeguente ſerie $\frac{1}{4.7.10.13.}+\frac{7}{7.10.13.16.}+\frac{17}{10.13.16.19.}+\frac{31}{13.16.19.22.}$ ec. Poichè i denominatori dei termini di queſta ſerie coſtano di quattro fattori, perciò le formole, delle quali deveſi prevalere, ſono quelle del num. III. La differenza, con cui procedono le ſerie dei denominatori eſſendo $=3$, e il primo termine della prima ſerie eſſendo 4, ſarà $a=4$, $b=3$: Parimente eſſendo $=1$ il primo termine della ſerie, che viene formata dai numeratori, la prima differenza $=6$, la ſeconda $=4$, come quì ſotto ſi vede, ſarà $c=1$, $d=6$, $e=4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 4. | 4. |
| | 6. | 10. | 14. |
| 1. | 7. | 17. | 31. |

Si ſoſtituiſcano nelle formole del num. III. i valori di $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, e ſi avrà

$$T = \frac{1 + b \times \frac{n-1}{1} + 4 \times \frac{n-1 \times n-2}{1. \quad 2}}{10 + 3 \times n - 3 \times 10 + 3 \times n - 2 \times 10 + 3 \times n - 1 \times 10 + 3n}$$

$$S = \frac{-76n + 294n^2 + 202n^3}{1680 \times 10 + 3 \times n - 2 \times 10 + 3 \times n - 1 \times 10 + 3n}$$

$$= \frac{-\frac{19}{420}n + \frac{7}{40}n^2 + \frac{101}{840}n^3}{10 + 3 \times n - 2 \times 10 + 3 \times n - 1 \times 10 + 3n}.$$

942. Se la ſerie propoſta avrà il numeratore de' termini coſtante, in tal caſo ſi dovranno cancellare nelle formole del termine, e della ſomma generale tutti que' termini, ne' quali entrano le lettere $d$, $e$ ec.

943. Eſſendo dato il termine generale di una ſerie, ſi paſſerà per di lui mezzo a trovare la ſomma generale a norma delle coſe dette. Se nel numeratore del dato termine generale l'eſponente della lettera $n$ ſarà uguale, o maggiore del numero de' fattori del denominatore, in tal caſo ſi multiplichino fra loro queſti fattori del denominatore, e col loro prodotto ſi divida il numeratore, come ſi è fatto al num. 832, con che il propoſto termine generale ſi ſpezzerà in due formole, una intera, e l'altra fratta, che ſaranno termini generali di due ſerie, della prima delle quali ſi troverà la ſomma mediante la conveniente formola deſunta tra le date al num. 930: della ſeconda ſerie poi ſi avrà la ſomma nella maniera poc'anzi eſpoſta, eccettuandone però il caſo, in cui il maſſimo eſponente di $n$ nel numeratore del termine generale ſia minore di una ſola unità del numero de' fattori del denominatore, lo che ſuccedendo manca il metodo, e la ſomma, che egli ci eſibiſce non è la vera ſomma della ſerie: Se poi il detto eſponente ſarà minore per lo meno di due unità del numero de' fattori del denominatore, ſi potrà ſempre avere la ſomma algebraica della ſerie.

944. Se ſarà data per termine generale una formola, che abbia per denominatore una funzione di $n$, e da queſto termine generale ſi debba dedurre la ſomma generale della corriſpondente ſerie, ſi riſolva co' metodi dati il denominatore ne' ſuoi fattori di primo grado, quali devono eſſere tutti ineguali, e in oltre devono eſſere quantità intere, o per lo meno devono eſſere intere le loro differenze, poſcia col precedente metodo ſe ne determini la ſomma: O pure ſi ſpezzi giuſto il num. 834 ec. la formola data in più frazioni, ognuna delle quali abbia per denominatore

due fattori conſeguentiſi, come ſarebbe $n \times \overline{1+n}$; $\overline{1+n} \times \overline{2+n}$ $\overline{2+n} \times \overline{3+n}$ ec., ognuna delle quali ſarà termine generale di una ſerie. Da ciaſcuno di queſti termini generali ſi deduca nel modo ſopra eſpoſto la corriſpondente ſomma generale, e l'aggregato di tutte queſte ſomme parziali darà la ſomma cercata corriſpondente al termine generale propoſto. Deveſi poi ſempre avvertire di evitare il caſo indicato al num. 943, nel quale manca il metodo, nè ci dà la ſomma bramata.

945. Chi rendendoſi famigliare l'eſpoſto metodo ſaprà maneggiarlo opportunamente a dovere ſecondo i caſi, non troverà difficoltà alcuna a determinare i termini, e le ſomme generali d'infinite altre diverſe ſerie. Due eſempj renderanno la coſa affatto evidente. Quanto al primo ſia data la ſomma generale $\frac{In + Mn^2}{A + Bn + Cn^2}$. Secondo il metodo del Padre Riccati ſoſtituendo $n-1$ in luogo di $n$, e facendo la debita ſottrazione, e riduzione allo ſteſſo denominatore, ſi ha il ſeguente termine generale

$$\frac{\begin{array}{c} AL + 2AMn + BMn^2 \\ - AM - BMn - CLn^2 \\ + Cl.n \end{array}}{A+B\times\overline{n-1}+C\times\overline{n-1^2}\times\overline{A+Bn+Cn^2}}$$

Ora per dedurne il termine generale a tenore del metodo finora praticato, oſſervo che il numeratore di queſta frazione è termine generale di una ſerie algebraica di ſecondo ordine, della quale ſe il primo termine ſi dirà $=\beta$, la prima differenza $=\delta$, e la ſeconda differenza, che è coſtante, uguale ad $\epsilon$, detto numeratore ſi potrà eſprimere così $\beta + \frac{\overline{n-1}}{1}\times\delta + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\quad 2}\times\epsilon$. Il denominatore poi coſta di due fattori, ognuno de' quali è termine generale di una ſerie algebraica di ſecondo ordine: Se pertanto il primo termine della prima ſerie ſi dirà $=a$, la prima differenza $=b$, la ſeconda differenza, che è coſtante $=c$, il primo termine della ſeconda ſerie $=p$, la prima differenza $=q$, la ſeconda differenza (la quale è la ſteſſa, che la differenza della ſerie dell'altro fattore, a motivo, che la ſeconda ſerie è la ſteſſa della prima, ſe non che comincia dal di lei ſecondo termine), $=e$, il ſuddetto denominatore ſi potrà rappreſentare così

$$\overline{a + \frac{\overline{n-1}}{1}\times b + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\quad 2}\times c}\times\overline{p + \frac{\overline{n-1}}{1}\times q + \frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\quad 2}\times e},$$

conſeguentemente il cercato termine generale ſarà

$\beta +$

$$T = \frac{\beta + \frac{\overline{n-1}}{1}\chi\delta + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1\quad 2}\chi\epsilon}{a + \frac{\overline{n-1}}{1}\chi b + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1\quad 2}\chi c \;\chi\; p + \frac{\overline{n-1}}{1}\chi q + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1\quad 2}\chi e}$$

Per avere la ſomma generale biſogna determinare le due quantità L, M a fine di ſoſtituirne i valori nella ſomma propoſta. Il Padre Riccati per poterlo fare ha biſogno di certe condizioni: io però attenendomi alla maniera praticata al num. 939 cuopro facilisſimamenre queſti valori così. Paragono la data ſomma al precedente termine generale con ſupporre $n = 1$ e ritrovo $L + M = \frac{\beta}{a}$

(poichè $A + Bn + Cn^2 = p + \frac{\overline{n-1}}{1}\chi q + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1\quad 2}\chi c$):

Poſcia ſuppongo nel termine generale $n = 1$, indi $n = 2$, faccio la ſomma di queſti due termini, quale uguaglio alla propoſta ſomma generale, in cui faccio $n = 2$, e mi viene $2L + 4M = \frac{a \curlyvee p \curlyvee \overline{\beta + \delta} + \beta \curlyvee a \curlyvee \overline{b} \curlyvee \overline{p + q}}{a \chi p \chi \overline{a + b}}$

Per mezzo di queſte due equazioni determino al ſolito i valori di L, M, che ritrovo eſſere $L = \frac{4\beta \curlyvee p \curlyvee \overline{a+b} - a \chi p \curlyvee \overline{\beta+\delta} - \beta \chi \overline{a+b} \curlyvee p+q}{2 \chi a \chi p \chi \overline{a+b}}$,

$M = \frac{a \curlyvee p \curlyvee \beta + \delta + \beta \curlyvee \overline{a+b} \chi \overline{p+q} - 2\beta \curlyvee p \curlyvee \overline{a+b}}{2 \chi a \chi p \chi \overline{a+b}}$. Conſeguentemente la ſomma cercata ſarà

$$S = \frac{\left\{\begin{array}{l} \overline{4\beta \chi p \chi \overline{a+b} - a \chi p \chi \overline{\beta+\delta} - \beta \chi \overline{a+b} \chi \overline{p+q}} \chi n + \\ \overline{a \curlyvee p \curlyvee \overline{\beta+\delta} + \beta \curlyvee \overline{a+b} \curlyvee \overline{p+q} - 2\beta \chi p \curlyvee \overline{a+b}} \curlyvee n^2 \end{array}\right\}}{2 \chi a \chi p \chi \overline{a+b} \chi p + \frac{\overline{n-1}}{1}\chi q + \frac{\overline{n-1}\,\chi\,\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\chi e}$$

Le ſerie, che ſi riferiſcono al precedente termine generale hanno per denominatore due fattori, che ſono due quadrati. Il numeratore poi può eſſere una ſerie di ſecondo ordine; può eſſere una ſerie di primo ordine, nel qual caſo ſarà $\epsilon = 0$; e può eſſere ancora una quantità coſtante, e in allora ſarà $\delta = 0$, $\epsilon = 0$. Per eſempio a queſto termine ſi riferirà la ſerie $\frac{1}{2^2 \chi 5^2}, \frac{3}{5^2 \chi 8^2}, \frac{5}{8^2 \chi 11^2}, \frac{7}{11^2 \chi 14^2}, \frac{9}{14^2 \chi 17^2}$, ec.,

ma in questo caso sarà $\varepsilon = 0$. Per appropriare pertanto il termine, e la somma generale trovata a questa serie prendo i valori di $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $\beta$, $\delta$. Perchè il primo termine della serie de' numeratori è 1, sarà $\beta = 1$, e perchè la differenza prima, che è costante è 2, sarà $\delta = 2$. Quanto ai denominatori, che costano di due fattori, la serie de' fattori primi essendo $2^2$, $5^2$, $8^2$, $11^2$, $14^2$ ec., o sia 4, 25, 64. 121, 196, le di cui differenze prima e seconda si hanno mediante la sottrazione cos

$$\begin{array}{rrrrr} & & 18. & 18. & \\ & 21. & 39. & 57. & \text{ec.} \\ 4 & 25. & 64. & 121. & \end{array}$$

Onde trovasi essere $a = 4$, $b = 21$, $c = 18$. La serie poi de' secondi fattori è $5^2$, $8^2$, $11^2$, $14^2$, $17^2$, o sia 25, 64, 121, 196, 289 ec., di cui si prenderanno le differenze prima, e seconda come segue

$$\begin{array}{rrrr} & 18. & 18. & \\ 39. & 57. & 75. & \\ 25. & 64. & 121. & 196. \end{array}$$

e però $p = 25$, $q = 39$. Sostituendo questi valori nel termine, e nella somma generale, si avrà

$$T = \frac{1 + 2\,\chi\,\overline{\frac{n-1}{1.}}}{4 + 21\,\chi\,\overline{\frac{n-1}{1.}} + 18\,\chi\,\overline{\frac{n-1}{1.}\,\gamma\,\frac{n-2}{2.}}\,\chi\,25 + 39\,\chi\,\overline{\frac{n-1}{1}} + 18\chi\,\overline{\frac{n-1}{1.}\,\gamma\,\frac{n-2}{2.}}}$$

$$S = \frac{12n + 12n^2}{100\chi 25 - 39\chi\overline{n-1} + 18\chi\,\overline{\frac{n-1}{1}\,\chi\,\frac{n-2}{2}}}$$

946. Prendo il secondo esempio dalla somma generale $\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3}{A + Bn + Cn^2 + Dn^3}$, dalla quale secondo il metodo del Padre Riccati si deduce il seguente termine generale

AL

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
AL & + & 2AMn & + & 2ANn^2 & + & 2BNn^2 & + & CNn^3 \\
AM & - & 3ANn & + & BMn^2 & - & 2CNn^3 & - & DMn^4 \\
AN & - & BMn & - & 3BNn^2 & - & 2DLn^3 & & \\
 & + & BNn & - & CLn^2 & + & 2DMn^3 & & \\
 & + & CLn & + & CNn^2 & & & & \\
 & - & DLn & + & 3DLn^2 & & & & \\
 & & & - & DMn^3 & & & &
\end{array}$$

$$\overline{A+B\overline{\chi n+1}+D\overline{\chi n-1}^2+D\overline{\chi n-1}^3}\ \chi\ \overline{A+Bn+Cn^2+Dn^3}$$

e secondo il nostro metodo si ha per termine generale

$$T=\frac{\left\{\begin{array}{l}\beta+\frac{\overline{n-1}}{1}\chi\delta+\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\chi\epsilon+\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}\chi\gamma \\ +\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}\,\chi\overline{n-4}}{1.\quad 2\quad 3.\quad 4.}\chi\lambda\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\left(\ a+\frac{\overline{n-1}}{1}\chi b+\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\chi c+\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}\chi d\ \right)\chi \\ \left(\ p+\frac{\overline{n-1}}{1}\chi q+\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\chi r+\frac{\overline{n-1}\,\chi\overline{n-2}\,\chi\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}\chi d\ \right)\end{array}\right\}}$$

perchè il numeratore della formola, che dà il termine generale, è termine generale di una serie di quarto ordine, e il denominatore costa di due fattori, ognuno dei quali è termine generale di una serie di terzo ordine, delle quali la seconda comincia dal secondo termine della prima; i termini poi di queste serie sono cubi perfetti. La somma generale si determina come segue.

Nel precedente termine generale si faccia $n=1$, con che si cambierà in $\frac{\beta}{a\chi p}$, che pongo $=A$. Di poi si faccia $n=2$, e diverrà $\frac{\beta+\delta}{\overline{a+b}\chi\overline{p+q}}$, che aggiunto a $\frac{\beta}{a\chi p}$ dà la somma dei due primi termini della serie, che è $\frac{\beta}{a\chi p}+\frac{\beta+\delta}{\overline{a+b}\chi\overline{p+q}}$, quale faccio $=B$. Finalmente suppongo $n=3$, e mi viene $\frac{\beta+2\delta+\epsilon}{\overline{a+2b+c}\chi\overline{p+2q+r}}$, che aggiunto al precedente valore di B dà la somma dei tre primi termini della serie, cioè $\frac{\beta}{a\chi p}+\frac{\beta+\delta}{\overline{a+b}\chi\overline{p+q}}+\frac{\beta+2\delta+\epsilon}{\overline{a+2b+c}\chi\overline{p+2q+r}}$, che dico $=C$. Assumo

ades-

adeſſo la ſomma generale indeterminata $\frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{A+Bn+Cn^2+Dn^3}$, in cui $A+Bn+Cn^2+Dn^3 = p+q\chi\frac{n-1}{1}+r\chi\frac{n-1}{1.}\chi\frac{n-2}{2.}+d\chi\frac{n-1}{1.}\chi\frac{n-2}{2.}\chi\frac{n-3}{3.}$. Paragono ad A queſta ſomma, in cui ſuppongo $n=1$, e mi viene $\frac{L+M+N}{p}=A$, cioè (Δ) $L+M+N=Ap$. Poſcia vi pongo $n=2$, e la paragono a B, e mi viene $\frac{2L+4M+8N}{p+q}=B$; vale a dire (Θ) $2L+4M+8N=B\chi\overline{p+q}$. Finalmente vi faccio $n=3$, e la paragono a C, e ritrovo $\frac{3L+9M+27N}{p+2q+r}=C$, o ſia (Λ) $3L+9M+27N=C\chi\overline{p+2q+r}$. Dal valore di (Θ) ſi ſottragga il valore di (Δ) moltiplicato per 2, e ſi avrà (Π) $2M+6N=B\chi\overline{p+q}-2Ap$. Dal valore di (Λ) ſi ſottragga il valore di (Δ) moltiplicato per 3, e ne verrà (Σ) $6M+24N=C\chi\overline{p+2q+r}-3Ap$; e ſottraendo dal valore di (Σ) il valore di (Π) moltiplicato in 3, ſi avrà $6N=C\chi\overline{p+2q+r}-3B\chi\overline{p+q}+3Ap$, cioè (Υ) $N=\frac{1}{6}C\chi\overline{p+2q+r}-\frac{1}{2}B\chi\overline{p+q}+\frac{1}{2}Ap$, il qual valore ſoſtituito in (Π) dà $2M=-C\chi\overline{p+2q+r}+4B\chi\overline{p+q}-5Ap$, vale a dire (Φ) $M=-\frac{1}{2}C\chi\overline{p+2q+r}+2B\chi\overline{p+q}-\frac{5}{2}Ap$. Finalmente ſoſtituendo in (Δ) i ritrovati valori (Υ, Φ) di M, N, ſi avrà (Ω) $L=\frac{1}{3}C\chi\overline{p+2q+r}-\frac{3}{2}B\chi\overline{p+q}+3Ap$. Conſeguentemente la ſomma generale cercata (con fare $p+2q+r=\varphi$, $p+q=\mu$) è

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\overline{\frac{1}{3}C\chi\varphi-\frac{3}{2}B\chi\mu+3Ap}\ \chi n-\overline{\frac{1}{2}C\chi\varphi+2B\chi\mu-\frac{5}{2}Ap}\ \chi n^2\\ +\overline{\frac{1}{6}C\chi\varphi-\frac{1}{2}B\chi\mu+\frac{1}{2}Ap}\ \chi n^3\end{array}\right\}}{p+q\chi\frac{n-1}{1}+r\chi\frac{n-1}{1.}\chi\frac{n-2}{2.}+d\chi\frac{n-1}{1.}\chi\frac{n-2}{2.}\chi\frac{n-3}{3.}}$$

Se pertanto la ſerie data ſarà $\frac{1}{1^1\chi 2^1}$, $\frac{5}{2^1\chi 3^3}$, $\frac{9}{3^1\chi 4^3}$, $\frac{13}{4^1\chi 5^3}$, $\frac{17}{5^1\chi 6^3}$ ec., o ſia $\frac{1}{1\chi 8}$, $\frac{5}{8\chi 27}$, $\frac{9}{27\chi 64}$, $\frac{13}{64\chi 125}$, $\frac{17}{125\chi 216}$ ec. fatte al ſolito le determinazioni ſi troverà $\beta=1$, $\delta=4$, $\varepsilon=0$, $\gamma=0$, $\lambda=0$, $a=1$, $b=7$, $c=12$, $d=6$, $p=8$, $q=19$, $r=18$, e però il termine generale ſarà

T=

$$T=\frac{1+4\times\overline{n-1}}{\left\{\begin{array}{l}\left(1+7\times\frac{\overline{n-1}}{1}+12\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}+6\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\right)\times\\ \left(8+19\times\frac{\overline{n-1}}{1}+18\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}+6\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}\right)\end{array}\right\}}$$

e la ſomma generale S =

$$\frac{22n+48n^2+11n^3}{81\times 8+19\frac{\overline{n-1}}{1}+18\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.}+6\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}}$$

947. Avanti di por fine alle ſerie algebraiche oſſerverò una coſa, la quale ſi è, che per avere la ſomma di una ſerie protratta all' infinito baſterà ritenere ſolamente dalla ſomma generale quel termine, in cui la lettera $n$ è elevata alla maſſima poteſta, poichè in tal caſo eſſendo $n=\infty$ tutti gli altri termini riſpetto a quello, che è elevato alla maſſima poteſtà, vanno a zero, eſſendo quegli di loro infinitamente più grande. Queſta coſa ha luogo in qualunque ſerie tanto algebraica, come geometrica, o algebraico geometrica.

*Modo di ſommare le ſerie geometriche.*

948. La ſomma, che ricevono queſte ſerie, chiamaſi eſponenziale, in quanto che nella formola eſprimente la ſomma generale di queſte ſerie la lettera $n$, che denota il numero de' termini, ſta in luogo di eſponente.

949. Già abbaſtanza ho detto al num. 811. come naſcano queſte ſerie, e come ſi diſtinguano in ordini. Comincierò adunque dal termine, e dalla ſomma generale, che convengono alle progreſſioni geometriche, e per non diſcoſtarmi dalla maniera già praticata eſprimerò l' uno, e l' altra mediante il primo termine, e il denominatore della progreſſione. Se il primo termine della progreſſione ſarà $=a$, e il denominatore $=m$, il termine generale della progreſſione ſarà $T=am^{n-1}$ giuſta il num. 757. comunque la ſerie ſia aſcendente, o diſcendente, o pure comunque il denominatore ſia un numero intero, o fratto. La ſomma generale poi (giuſta il num. 1067. del I. Tomo) trovaſi eſſere $S=\frac{am\times m^{n-1}-a}{m-1}=$ $\frac{a}{m-1}\times\overline{mn-1}$ quando il denominatore della progreſſione è un numero maggiore dell' unità, ma ſe egli ſarà un numero minore dell'unità, la ſomma della progreſſione, che in tal caſo è diſcendente, o ſia decreſcente ſarà $S=\frac{a}{1-m}\times\overline{1-m^n}$. Siccome poi il termine generale $T=am^{n-1}$ è uguale ad $\frac{am^{n-1}}{m-1}\times\overline{m-1}=\frac{a}{m-1}\times\overline{m-1}\times m^{n-1}$, ben ſi vede, che quando il denomina-

to-

tore $m > 1$, la ſerie è creſcente, facendoſi i di lei termini ſempre maggiori, finchè divenendo $n$ un numero infinitamente grande, l'ultimo termine della ſerie è infinito, e tale pure è la di lei ſomma: Quando $m = 1$, tutti i termini della ſerie, e la di lei ſomma $= o$: Quando $m > 1$, la ſerie è decreſcente, ed $m^n$ è una quantità infinitamente piccola, e in queſto caſo l'eſpreſſione $\frac{a}{m-1} \times \overline{m-1} \times m^{n-1}$ del termine generale ſarà $\frac{a}{1-m} \times \overline{1-m} \times m^{n-1}$, come ho fatto riſpetto alla ſomma, poichè ſe non ſi uſaſſe queſto artifizio, le formole del termine, e della ſomma generale riſulterebbero negative. Qualora il termine generale ſia $m^n$, la ſomma generale ſarà $\frac{m^{n+1}-m}{m-1}$.

950. Si debba per eſempio trovare la ſomma della ſerie $3, 5, 8\frac{1}{3}, 13\frac{8}{9}, 23\frac{4}{27}$ ec. Poichè queſta progreſſione è creſcente, il di cui denominatore è $\frac{5}{3}$ ſi dovrà far uſo della formola $S = \frac{a}{m-1} \times \overline{m^n-1}$. Si ha pertanto $a = 3$, $m = \frac{5}{3}$: Che però fatte queſte ſoſtituzioni ſarà $S = \frac{3}{\frac{5}{3}-1} \times \overline{\frac{5^n}{3^n}-1} = \frac{3^2}{2} \times \overline{\frac{5^n}{3^n}-1} = \frac{5^n-3^n}{2 \times 3^{n-1}}$. Il termine generale poi ſarà $T = am^{n-1} = 3 \times \frac{5^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{5^{n-1}}{3^{n-2}}$.

951. Qualora ſia dato il termine generale di una progreſſione geometrica, ſarà facile il dedurne la ſomma: Si faccia $n = 1$ nel propoſto termine generale, e ciò che ne verrà ſarà uguale ad $a$; poſcia ſi faccia $n = 2$, e ciò che ne verrà diviſo per $a$ ſarà il valore di $m$: Per eſempio ſia dato il termine generale $T = \frac{4^{3^{n-1}}}{2^{3^n+1}}$. Si faccia $n = 1$, e ſi avrà $\frac{4^2}{2^3} = 2 = a$; poſcia ſi faccia $n = 2$, lo che darà $\frac{4^5}{2^5} = 32$, che diviſo per 2 valore di $a$ rende $\frac{32}{2} = 16 = m$. Ora che ſi è avuto il valore di $a$, e di $m$, ſe ne faccia la ſoſtituzione nella formola $S = \frac{a}{m-1} \times \overline{m^n-1}$ (perchè $m$ è un numero maggiore dell'unità), e ſi otterrà la bramata ſomma, che è $\frac{2}{15} \times \overline{16^n-1}$.

952. Se il denominatore della progreſſione ſarà una quantità negativa, la progreſſione procederà con ſegni alternanti: In queſto caſo pertanto ſe il primo termine della progreſſione è poſitivo, e il ſecondo negativo, ſi dovrà conſiderare la progreſſione come decreſcente, e conſeguentemente ſi dovrà far uſo della formola $S = \frac{a}{1-m} \times \overline{1-m^n}$: Se poi il primo termine ſarà negativo, e il ſecondo poſiti-

ſitivo, ſi conſidererà la progreſſione come creſcente, e però ſi dovrà adoperare la formola $S = \frac{a}{m-1} \times \overline{m^n - 1}$.

953. Quanto alle ſerie geometriche degli altri ordini, ſiccome naſcono (pel num. 811), o da ſomme, o da differenze di ſerie geometriche del primo ordine, così ſi avranno i loro termini, e ſomme generali mediante le corriſpondenti compoſizioni de' termini, e ſomme generali delle ſerie componenti. Per eſempio volendo il termine, e la ſomma generale della ſerie $\frac{5}{2}$, $\frac{39}{4}$, $\frac{271}{8}$ ec., ſi oſſervi che ella naſce dal ſottrarſi la ſerie C dalla ſomma delle ſerie A, B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (A) | 2. | 6. | 18. | 54. | 162. |
| (B) | 1. | 4. | 16. | 64. | 256. |
| (C) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ |

Ma della ſerie (A) il termine generale è $2 \times 3^{n-1}$, perchè $a=2$, $m=3$; della ſerie (B) il termine generale è $1 \times 4^{n-1}$; della ſerie (C) il termine generale è $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Dunque il termine generale della ſerie propoſta è $2 \times 3^{n-1} + 4^{n-1} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Parimente la ſomma generale della ſerie (A) è $3^n - 1$; della ſerie (B) è $\frac{1}{3} \times \overline{4^n - 1}$; della ſerie (C) è $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \times \overline{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$; quindi la ſomma generale della propoſta ſerie $\frac{5}{2}$, $\frac{39}{4}$, $\frac{271}{8}$ ec. è $3^n + \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{7}{3} + \frac{1^n}{2^n}$.

*Modo di ſommare le ſerie algebraico-geometriche.*

954. Comincio col Padre Riccati dalla formola $\overline{A+Bn} \times K^n - A$, che rappreſenta la ſomma generale di una ſerie algebraico-geometrica. Le due ſerie, una algebraica, e l'altra geometrica, dall' ordinata moltiplicazione delle quali eſſa riſulta, ſono ciaſcuna di primo ordine; e tale per eſempio è la ſeguente ſerie

(A) 2. 20. 128. 704. 3584. ec.

la quale riſulta dal moltiplicarſi riſpettivamente fra loro i termini di queſte due ſerie

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Serie aritmetica | 2. | 5. | 8. | 11. | 14. | ec. |
| Serie geometrica | 1. | 4. | 16. | 64 | 256. | |

Ora chiamando $=a$ il primo termine della ſerie algebraica componente, la di lei differenza $=b$; il primo termine della ſerie geometrica $=p$, e il di lei denominatore $=m$, dalla formola propoſta $\overline{A+Bn} \times K^n - A$ dedurrò, come ho fatto per le ſerie algebraiche, le formole del termine, e della ſomma generale delle corriſpondenti ſerie algebraico-geometriche, che ſaranno $T = \overline{a+\overline{n-1} \times b} \times pm^{n-1}$

$$S = \frac{\overline{\overline{m-1} \times ap - bmp} + \overline{bp} \times n}{\overline{m-1}^2} \times m^n - \frac{ap \times \overline{m-1} + bmp}{\overline{m-1}^2}$$

(poichè $A = \frac{ap \times \overline{m-1} - bmp}{\overline{m-1}^2}$, $B = \frac{bp}{m-1}$, e $K = m$)

per lo che riſpetto alla ſerie A eſſendo $a=2$, $b=3$, $p=1$, $m=4$, ſarà

$$T = \overline{2+3 \times \overline{n-1}} \times 4^{n-1} \qquad S = -\overline{\frac{2}{3}+n} \times 4^n + \frac{2}{3};$$

riſpetto poi alla ſerie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{9}{48}$ ec., che naſce dal moltiplicarſi fra loro i termini delle due ſeguenti

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Serie aritmetica | 1, | 3, | 5, | 7, | 9 | ec. |
| Serie geometrica | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{6}$, | $\frac{1}{12}$, | $\frac{1}{24}$, | $\frac{1}{48}$ | |

il termine generale è $\overline{1+2 \times \overline{n-1}} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, e la ſomma generale, (nella quale deveſi laſciare come è negativo il denominatore $m-1$, tale riſultando per eſſere un numero fratto) trovaſi eſſere $S = -\overline{2 - \frac{4}{3} n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

Se ſi foſſero mutati i ſegni alla formola generale così

$$S = \frac{\overline{ap \times \overline{1-m} + bmp}}{\overline{1-m}^2} + \frac{bp}{1-m} \times n \times m^n - \frac{\overline{ap \times \overline{1-m} - bmp}}{\overline{1-m}^2},$$

per la precedente ſerie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$ ec. ſi farebbe avuta la ſomma

S=

$S = \overline{2 + \frac{4}{3} n} \times \frac{1}{2^n} - 2$, la quale è negativa, onde per evitare le quantità negative devesi ella usare come sta.

955. Passiamo alle serie algebraico-geometriche, che ricevono la somma generale della seguente forma $\overline{A + Bn + Cn^2} \times K^n - A$. La serie algebraica componente è di secondo ordine, la geometrica è di primo ordine. Alla precedente somma si riduce la seguente serie

B. 2. 16. 72. 256 ec.

la quale si compone dalla rispettiva moltiplicazione dei termini di queste due.

1. 4. 9. 16. 25
2. 4. 8. 16. 32 ec.

Ne deduco pertanto le formole del termine, e della somma generale, che sono

$$T = a + \frac{n-1}{1} \times b + \frac{n-1 \times n-2}{1 \cdot 2} \times c \times p m^{n-1}$$

$$S = \left\{ \frac{2ap \times \overline{m-1}^2 - 2bpm \times \overline{m-1} + 2cpm^2}{2 \times \overline{m-1}^3} + \frac{2bp \times \overline{m-1} - cp \times 3m-1}{2 \times \overline{m-1}^2} \times n + \frac{cp}{2 \times m-1} \times n^2 \right\} \times m^n - \frac{2ap \times \overline{m-1}^2 + 2bpm \times \overline{m-1} - 2cpm^2}{2 \times \overline{m-1}^3}$$

in cui al solito la lettera $a$ disegna il primo termine della serie algebraica; $b$ la prima differenza; $c$ la seconda differenza, $p$ il primo termine della serie geometrica, ed $m$ il denominatore: Per lo che rispetto alla serie (B) sarà

$$T = 1 + 3 \times \frac{n-1}{1} + 2 \times \frac{n-1 \times n-2}{1 \quad 2} \times 2 \times 2^{n-1}$$

$S = \overline{6 - 4n + 2n^2} \times 2^n - 6$, essendo $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $p = 2$, $m = 2$.

956. Se fosse data la serie (D) $1, \frac{5}{12}, \frac{9}{48}, \frac{15}{192}, \frac{23}{768}$ ec., che risulta dalle due seguenti

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{9}{1}, \quad \frac{15}{1}, \quad \frac{23}{1} \text{ ec.}$$
$$3, \quad 12, \quad 48, \quad 192, \quad 768$$

poichè è $a=3$, $b=2$, $c=2$, $p=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{4}$, sarà

$$T=3+2\times\frac{n-1}{1}+2\times\frac{n-1\times n-2}{1\quad 2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^n};$$

$$S=-\frac{140}{81}-\frac{20}{27}n-\frac{4}{9}n^2\times\frac{1}{4^n}+\frac{140}{81}.$$

957. Qualora in vece d'eſſer data la ſerie foſſe propoſto il termine generale, ſiccome in eſſo reſtano inconfuſi i termini generali delle ſerie componenti, mediante la ſoſtituzione di 1, 2, 3, ec. a miſura del biſogno in luogo di $n$ nel termine generale, ſi trovino i primi termini delle ſerie componenti, e per mezzo loro ſi avranno i valori di $p$, $m$, $a$, $b$, $c$ ec. da ſoſtituirſi nella formola generale della ſomma. Sia per eſempio propoſto il termine generale $1+n+n^2\times 2^n$, e ſi debba ritrovare la corriſpondente ſomma generale. Il primo fattore $1+n+n^2$ di queſto termine generale da la ſerie algebraica

3, 7, 13, 21, 31, 43 ec.

riſpetto alla quale è $a=3$, $b=4$, $c=2$. Il ſecondo fattore $2^n$ dà la ſerie geometrica

2, 4, 8, 16, 32, 64 ec.

riſpetto alla quale è $p=m=2$. Ora la ſerie

6, 28, 104, 336, 992, 2752 ec.

che naſce dalle due precedenti, e di cui perciò è termine generale $1+n+n^2\times 2^n$, riſultando e da una ſerie algebraica di ſecondo ordine, e da una ſerie geometrica di primo ordine, ha per ſomma generale una formola di queſta forma $A+Bn+Cn^2\times K^n-A$. Ma la ſomma generale corriſpondente a queſta forma ſi è trovata eſſere (al num. 955.)

$$S=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2ap\times\overline{m-1}^2-2bpm\times\overline{m-1}+2cpm^2}{2\times\overline{m-1}^3}+\\[2ex]\dfrac{2bp\times\overline{m-1}-cp\times 3\overline{m-1}}{2\times\overline{m-1}^2}\times n+\dfrac{cp}{2\times\overline{m-1}}\times n^2\end{array}\right\}\times m^n$$

$$-\frac{2ap\times\overline{m-1}^2+2bpm\times\overline{m-1}-2cpm^2}{2\times\overline{m-1}^3}$$

Che

Che però se in vece di $a$, $b$, $c$, $p$, $m$ si sostituiranno i ritrovati rispettivi valori, si avrà $S=\overline{6-2n+2n^2}\times 2^n-6$ somma cercata.

958. Nello stesso modo, col quale ai num. 954, 955 si sono ritrovate le somme generali corrispondenti alle forme $\overline{A+Bn}\times K^n-A$, $\overline{A+Bn+Cn^2}\times K^n-A$, si determineranno pure le somme generali corrispondenti alle forme

$\overline{A+Bn+Cn+Dn^3}\times K^n-A$; $\overline{A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4}\times K^n-A$ ec.

959. Al num. 953 ho detto come si possa avere il termine, e la somma generale delle serie geometriche, che risultano dalla somma, o differenza di serie geometriche di primo ordine, in supposizione però, che siano cognite queste serie geometriche di primo ordine, stante la quale supposizione si avranno pure nello stesso modo i termini, e le somme generali delle serie algebraico-geometriche, che risultano dalla somma, o differenza di serie algebraico-geometriche, niente altro a ciò richiedendosi, che prendere i termini, e le somme generali delle serie componenti, e unirle col segno +, o —, secondo che la serie proposta si forma per addizione, o per sottrazione. Il più delle volte però sono date le serie composte, delle quali hansi a trovare i termini generali, senza che siano date le serie componenti. Per poter avere perranto i termini generali di queste serie composte, che sono sempre serie ricorrenti, basta che sia data la loro legge. Si ha poi la legge di una serie ricorrente, ogniqualvolta sono cogniti i moltiplicatori de' termini precedenti un termine proposto. Come della serie 1, 2, 8, 28, 100, 356 ec. la legge si è, che un qualsivoglia termine risulti dalla somma de' due precedenti, l'ultimo de' quali sia moltiplicato per 3, e il penultimo per 2. Il numero de' termini precedenti, che concorrono a formare un dato termine derermina l'ordine della serie.

960 Ora le serie ricorrenti, che risultano dalla somma di due serie geometriche, ricevono il termine generale di questa forma $AK^n+BH^n$, come abbastanza è manifesto dalle cose dette; la forma del termine generale delle serie ricorrenti, che risultano dalla somma di tre serie geometriche è $AK^n+BH^n+CI^n$; la forma del termine generale delle serie ricorrenti, che risultano dalla somma di quattro serie geometriche è $AK^n+BH^n+CI^n+DL^n$ ec.

961. Le serie, il di cui termine generale è di questa forma $AK^n+BH^n$, sono ricorrenti del secondo ordine, ciascun termine delle quali viene determinato dai due precedenti, de' quali quello, che è prossimo al termine proposto si moltiplica per $K+H$, e l'altro si moltiplica per $-KH$. Di fatto il termine proposto sia $AK^n+BH^n$, il prossimo antecedente sarà $AK^{n-1}+BH^{n-1}$, e il precedente a questo sarà $AK^{n-2}+BH^{n-2}$: Se pertanto si moltiplicherà il termine $AK^{n-2}+BH^{n-2}$ per $K+H$, e il termine $AK^{n-1}+BH^{n-1}$ per $-KH$, la somma di questi due prodotti troverassi dare il termine $AK^n+BH^n$, lo che dimostra, che della serie, la quale ammette il termine generale di questa forma $AK^n+BH^n$, ciascun termine risulta dalla somma de' due precedenti, l'ultimo de' quali sia moltiplicato per $K+H$, e il penultimo per $-KH$. La stessa operazione fa vedere, che ciascun termine delle serie, le quali ricevono il termine generale di questa forma $AK^n+BH^n+CI^n$, risulta dalla somma de' tre precedenti termini, l'ultimo de' quali, o sia il prossimo al termine proposto sia moltiplicato per $K+H+I$, il penultimo per $-KH-KI-HI$, l'antepenultimo per $KHI$: Così quanto alle serie ricorrenti, che ammettono il termine generale di questa forma $AK^n+BH^n+CI^n+DL^n$, ciascun termine risulta dalla somma dei quattro precedenti, l'ultimo de' quali sia moltiplicato per $K+H+I+L$,

il

il penultimo per $-KH-KI-KL-HI-HL-IL$, l'antepenultimo per $KHI+KHL+HIL$, e l'altro per $-KHIL$.

962. Nelle precedenti formole de' termini generali le lettere A, B, C ec., K, H, I ec. ſono incognite, le coſe dette però nel precedente num. 961 ci portano a determinare con tutta facilità le quantità K, H, I ec., mentre per una ſerie ricorrente dell'ordine $n$ un qualſivoglia termine riſulta dalla ſomma di un numero $n$ di termini precedenti, l'ultimo de' quali ſia moltiplicato per un numero $n$ di quantità K, H, I ec., il penultimo per la ſomma degli ambi di queſte quantità preſe con ſegno contrario, l'antepenultimo per la ſomma de' loro terni ec. Adunque queſte quantità, che ſervono di moltiplicatori de' termini precedenti concorrenti alla formazione del termine propoſto, hanno le proprietà, che convengono (giuſta i num. 477, e 479) ai coefficienti di una equazione, conſeguentemente le quantità K, H, I ec. il di cui numero ſia $n$, ſono radici di una equazione di grado $n$: Per lo che ſe i moltiplicatori de' termini precedenti al termine propoſto di una ſerie ricorrente ſaranno $\beta$, $\delta$, $\epsilon$, $\gamma$ ec., de' quali $\beta=K+H+I$ ec., $\delta=-KH-KI-KL$ ec.; $\epsilon=KHI+KHL$ ec., $\gamma=-KHIL$ ec., l'equazione, che avrà per radici K, H, I ec. ſarà $x^n-\beta x^{n-1}+\delta x^{n-2}-\epsilon x^{n-3}+\gamma x^{n-4}$ ec.

963. Determinate così le quantità K, H, I ec., reſtano a determinarſi le quantità A, B, C ec., ma prima di farlo prendiamo a conſiderare di ugual maniera le ſerie ricorrenti algebraico-geometriche. Quelle, che ricevono il termine generale di queſta forma $\overline{A+Bn}\times K^n$, ſi formano con queſta legge, che ciaſcun termine riſulta dai due precedenti, l'ultimo de' quali ſia moltiplicato per $2K$, e il penultimo per $-K^2$, lo che ſi può dimoſtrare nella maniera praticata al num. 961. Quanto alle ſerie che ricevono il termine generale di queſta forma $\overline{A+Bn+Cn^2}\times K^n$, ciaſcun termine naſce dalla ſomma de' tre precedenti, l'ultimo de' quali ſia moltiplicato per $3K$, il penultimo per $-3K^2$, l'antepenultimo per $K^3$. Così delle ſerie, le quali ricevono il termine generale di queſta forma $\overline{A+Bn+Cn^2+Dn^3}\times K^n$, ciaſcun termine ſi forma dai quattro precedenti, l'ultimo de' quali ſi moltiplica per $4K$, il penultimo per $-6K^2$, l'antepenultimo per $4K^3$, e l'altro per $-K^4$ ec. Se pertanto ſi applicheranno qui le oſſervazioni fatte al num. 962, ſi ſcorgerà, che eſſendo $\theta$, $\lambda$, $\mu$, $\pi$ ec. i moltiplicatori de' termini precedenti concorrenti alla formazione di un termine propoſto, così che ſia (la lettera $n$ rappreſenta l'ordine della ſerie) $\theta=nK$, $\lambda=-\frac{n\overline{\times n-1}}{1.\ 2}K^2$, $\mu=\frac{n\overline{\times n-1}\times\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3.}K^3$ ec., ſi avrà l'equazione $x^n-\theta x^{n-1}+\lambda x^{n-2}-\mu x^{n-3}+\pi x^{n-4}$ ec., che ha un numero $n$ di radici ciaſcuna eguale a K.

964. Ciò poſto veniamo alla determinazione dei termini generali tanto dell'una, come dell'altra ſpezie di queſte ſerie ricorrenti. Sia data la legge della ſerie ricorrente, della quale ſi vuole il termine generale, cioè ſiano dati i moltiplicatori de' termini precedenti, i quali moltiplicatori ſiano $\sigma$, $\tau$, $\varphi$, $\chi$, $\omega$; ſi formi l'equazione $x^5-\sigma x^4+\tau x^3-\varphi x^2+\chi x-\omega=0$, le di cui radici ſiano $a$, $b$, $c$, $d$, $d$ Ora perchè queſta equazione ha due radici uguali $d$, $d$, e tre ineguali $a$, $b$, $c$, il termine generale corriſpondente alla propoſta ſerie avrà la ſeguente forma

$AK^n+BH^n+CI^n+\overline{D+En}\times N^n$ (ſe l'equazione aveſſe tutte le radici ine-

uali, il termine generale ſarebbe di queſta forma $AK^n+BH^n+Cl^n+$ ec.; e ſe ella aveſſe tutte le radici uguali, egli ſarebbe di queſta forma $\overline{A+Bn+Cn^2+\text{ec.}}\times K^n$. Di queſto termine generale già ſono cognite le quantità K, H, I, N, che ci vengono eſibite dalle radici dell' equazione, onde non reſtano più, che da determinarſi i valori di A, B, C, D, E. Per farlo adunque, ſi paragoni il detto termine generale ai cinque primi termini della ſerie, facendo in eſſo primieramente $n=1$, poſcia $n=2$ ec., e con queſti cinque paragoni, giacchè cinque ſono le quantità da determinarſi, ſi ritrovino i valori di E, D, C, B, A. Si ſoſtituiſcano per ultimo nella formola $AK^n+BH^n+Cl^n+\overline{D+En}\times N^n$ i ritrovati valori di A, B, C, D, E, K, H, I, N, e ciò che ne verrà ſarà il termine generale della propoſta ſerie. Eſſendoſi trovato il termine generale, ſi avrà la ſomma generale giuſta le coſe dette di ſopra.

965. Un ſolo eſempio baſterà a togliere ogni ombra di difficoltà all' eſpoſto metodo. Si debba ritrovare il termine generale della ſerie

0, 1, 1, 3, 29, 152, 621 ec.

di cui ciaſcun termine riſulta dalla ſomma de' quattro precedenti, il più proſſimo le' quali ſia moltiplicato per 8, quel che vien dopo per —23; il terzo per 28, e il quarto per —12, Avendoſi pertanto i moltiplicatori, che, danno la legge della ſerie, ſe ne faccia uſo, come di coefficienti, i quali devonſi prendere con ſegno contrario; per formare l' equazione, le di cui radici devono ſomminiſtrare i valori di K, H ec. Poichè quattro ſono i moltiplicatori, l' equazione deve eſſere di quarto grado, che ſi formerà così $x^4-8x^3+23x^2-28x+12=0$ (Abbaſtanza coſta dalle coſe dette, che il moltiplicatore del termine precedente a quello, che ſi cerca, deve eſſere il coefficiente del ſecondo termine dell' equazione ec.). Ora di queſta equazione le radici ſono 1, 2, 2, 3, e perchè di queſte radici due ſono eguali, e due ineguali, il termine generale corriſpondente alla propoſta ſerie avrà queſta forma $AK^n+BH^n+\overline{E+Fn}\times M^n$, di cui K, H, M ſono determinate dalle radici dell'equazione, dicè è K=1, H=3, M=1, onde il detto termine generale ſi cambia in $A\times 1^n+B\times 3^n+\overline{E+Fn}\times 2^n$. Per determinare i valori di A, B, E, F, ſi faccia in primo luogo $n=1$, indi ſi paragoni queſto termine generale al primo termine della ſerie; in ſecondo luogo ſi faccia $n=2$, e ſi paragoni al ſecondo termine della ſerie ec. come ſegue

$$(\Delta)\qquad \begin{array}{l} A+3B+2E+2F=0 \\ A+9B+4E+8F=1 \\ A+27B+8E+24F=1 \\ A+81B+16E+64F=3 \end{array}$$

Dalla ſeconda equazione ſi ſottragga la prima, dalla terza la ſeconda, e dalla quinta la terza così

(Θ)

$$(\Theta)\qquad \begin{array}{l} 6B+2E+6F=1 \\ 18B+4E+16F=0 \\ 54B+8E+40F=2 \end{array}$$

Dalla ſeconda ſi ſottragga la prima moltiplicata per 3, e dalla terza ſi ſottragga la ſeconda moltiplicata pure per 3, e ſi avrà

$$(\Delta)\qquad \begin{array}{l} -2E-2F=-3 \\ -4E-8F=\ 2 \end{array}$$

Finalmente dalla ſeconda ſi ſottragga la prima moltiplicata per 2, e ſi avrà $-4F=8$, e però $F=-2$. Si ſoſtituiſca queſto valore di F in una delle due equazioni ($\Delta$), lo che darà $E=\frac{7}{2}$. In una delle tre equazioni ($\Theta$) ſi ſoſtituiſcano i valori di E, F, e ſi troverà $B=1$. Per ultimo ſi ſoſtituiſcano in una delle quattro equazioni ($\Delta$) i valori di B, E, F, e ſi avrà $A=-6$. Quindi eſſendoſi trovati anche i valori di A, B, E, F, ſe ſi ſoſtituiranno nella formola $A\times 1^n+B\times 3^n+\overline{E+Fn}\times 2^n$, ſi avrà finalmente il termine generale della propoſta ſerie, che è

$-6\times 1^n+1\times 3^n+\overline{\frac{7}{2}-2n}\times 2^n$ a cui corriſponde la ſomma generale

$-6n+3\times\frac{3^n-3}{2}+\overline{11-4n}\times 2^n-11$, perchè la ſomma del termine $-6\times 1^n$ è $=-6n$, la ſomma del termine $1\times 3^n$ è $3\times\frac{3^n-3}{2}$ (pel num. 949.), e la ſomma del termine $\overline{\frac{7}{2}-2n}\times 2^n$ è $\overline{11-4n}\times 2^n-11$ (giuſta la formola del num. 954, nella quale trovaſi eſſere $a=3$, $b=-4$, $m=2$, e $p$ che dovrebbe eſſere $=2$ diventa $=1$ a motivo che la formola dovrebbe eſſere diviſa per 2, onde $p$ entrando in tutti i termini della formola, ſi ha $p=\frac{2}{2}=1$ )

Altre ſerie ſi poſſono conſiderare, le quali riſultano dai termini delle precedenti ſerie ricorrenti accreſciuti, o diminuiti d'una quantità coſtante, alle quali è piaciuto al P. Riccati di dare il nome di ſerie ricorrenti con appendice, che è la quantità coſtante già detta. Tale è la ſerie 1, 3, 7, 15, 31, ec., di cui ogni termine è originato dal doppio del termine precedente accreſciuto di una unità, che però è ſerie ricorrente con appendice. La ſerie 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, 2 ec. è ricorrente con appendice di ſecondo ordine, poichè ciaſcun di lei termine riſulta dai due precedenti (aſſunti 0, 1 per i due primi), il più proſſimo de' quali ſia moltiplicato per zero, e il più rimoto per 1, e queſto prodotto ſia aumentato di $\frac{1}{2}$. Così la ſerie 1, 0, 0, $\frac{3}{8}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{19}{16}$, $\frac{47}{32}$ è ricorrente con appendice di terzo ordine poichè ciaſcun di lei termine naſce dai tre precedenti il più proſſimo dei

qua-

quali ſia moltiplicato per $\frac{3}{4}$, e l'altro per $\frac{1}{8}$, e queſto prodotto ſia accreſciuto di $\frac{1}{4}$; e così in poi.

Queſte ſerie ricorrenti con appendice non ſono altro, che ſerie ricorrenti volgari di ordine ſuperiore, ogniqualvolta l'unità è una radice di quell'equazione mediante la di cui riſoluzione ſi ottiene il termine generale, cioè una ſerie ricorrente con appendice di primo ordine, è una ſerie ricorrente volgare di ſecondo ordine; una ſerie ricorrente con appendice di ſecondo ordine è una ſerie ricorrente volgare di terzo ordine ec. Di fatto ſia $=a$ il primo termine di una ſerie ricorrente con appendice di primo ordine l'appendice ſia $z$, e la quantità che moltiplica il termine precedente ſia $=t$. Si ſupponga in oltre, che i termini di queſta ſerie ſiano $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ ec., poichè ciaſcun termine naſce dal precedente moltiplicato in $t$, più $z$, ſarà $b=ta+z$, $c=tb+z$; $d=tc+z$ ec. L'equazione, che dà il valore di $t$, è $x-t=0$. Si moltiplichi queſta equazione per $x-1$, e ſi avrà $x^2-\overline{t-1}\times x+1=0$. Si prendano adeſſo i due primi termini $a$, $b$ della precedente ſerie, e ſe ne formi una ſerie ricorrente volgare di ſecondo ordine moltiplicando il proſſimo termine precedente per $t+1$, e l'antepenultimo per $-t$, con che il terzo termine della ſerie ſarà $tb+b-ta$; ma poc'anzi ſi è trovato $b=ta+z$, dunque fatta la ſoſtituzione di queſto valore, ſi avrà $tb+z$, che ſi è trovato eſſere il terzo termine della prima ſerie. Parimente il quarto termine di queſta ſeconda ſerie ſarà $tc+c-tb$, ma precedentemente ſi è trovato $c=tb+z$, dunque ſoſtituendoſi queſto valore ſi avrà $tc+z$, che è il quarto termine della prima ſerie; lo ſteſſo ſi troverà riſpetto agli altri termini, lo che dimoſtra, che una ſerie ricorrente con appendice di primo ordine è una ſerie ricorrente volgare di ſecondo ordine.

Sia in ſecondo luogo $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ ec. una ſerie ricorrente con appendice di ſecondo ordine, la di cui appendice ſia $z$, e ciaſcun termine ſi formi dai due precedenti, l'ultimo de' quali ſia moltiplicato per $t$, e il penultimo per $s$. Poichè $a$, $b$ ſono i due primi termini della ſerie, ſarà $c=tb+as+z$; $d=tc+sb+z$; $e=td+sc+z$ ec. Colle quantità $t$, $s$, che devono moltiplicare i termini precedenti ſi formi l'equazione $x^2-tx-s=0$, dalla di cui moltiplicazione per $x-1$ ſi avrà $x^3-\overline{t-1}\times x^2-\overline{s+t}\times x+s=0$. Ora preſi i tre primi termini della ſerie $a$, $b$, $c$ ſi formi una ſerie ricorrente volgare di terzo ordine con moltiplicare $c$ per $t+1$, $b$ per $s-1$, ed $a$ per $-s$, con che ſi avrà $tc+c+sb-tb-sa$; ma eſſendoſi poc'anzi trovato $c=tb+sa+z$, ſe vi ſi ſoſtituirà queſto valore, ne verrà $tc+sb+z$, che è il quarto termine della ſerie ſuperiore. Iſteſſamente il quinto termine ſarà $td+d+sc-tc-sb$, che, mediante la ſoſtituzione del precedentemente trovato valore di $d$, diventa $td+sc+z$, che è lo ſteſſo quinto termine della ſerie precedente. Egualmente ſi troveranno corriſpondere i termini di una ſerie ai termini dell'altra; conſeguentemente una ſerie ricorrente con appendice di ſecondo ordine è una ſerie ricorrente volgare di terzo ordine. Tenendo in ſeguito lo ſteſſo modo di dimoſtrare reſterà generalmente provato, che una ſerie ricorrente qualunque con appendice corriſponde a una ſerie ricorrente volgare d'ordine ſuperiore.

Dunque qualora ſia propoſta una di queſte ſerie ricorrenti, e ſe ne voglia il termine, e la ſomma generale, baſterà prendere il termine, e la ſomma generale

corrispondente alla serie ricorrente volgare d'ordine superiore nella maniera di sopra esposta. Per avere poi la legge (mediante la quale si determina la somma, e il termine generale della serie) di questa serie ricorrente volgare d'ordine superiore, cioè a dire, per avere i moltiplicatori de' precedenti termini, che concorrono alla formazione di un qualunque termine, i quali devono essere $n+1$ se quelli della serie ricorrente con appendice erano in numero $n$, si faccia così. Si formi una equazione, il di cui primo termine sia $x$ inalzata alla potestà indicata dall'ordine della serie ricorrente con appendice, e gli altri termini abbiano per coefficienti quelle quantità, che devono essere prese negativamente, le quali servono di moltiplicatori de' termini precedenti, avvertendo di dare per coefficiente al secondo termine la quantità, che moltiplica il termine ultimo precedente, quella che moltiplica il penultimo per coefficiente al terzo termine ec. Dopo ciò si moltiplichi questa equazione per $x-1$, e i coefficienti dell'equazione, che ne proverrà, saranno i moltiplicatori de' termini precedenti, da' quali risulterà la stessa serie ricorrente con appendice proposta.

Sia data per esempio la serie ricorrente con appendice 0, 1, 1, 2, 4, 9, 21 ec. di cui ciascun termine si forma dai due precedenti, l'ultimo de' quali sia moltiplicato per 2, e il primo per 1, e dalla somma di questi due prodotti sia sottratta una unità, che è l'appendice. Poichè i moltiplicatori sono 2, 1, l'equazione da formarsi sarà $x^2-2x-1=0$, quale si moltiplichi per $x-1$, e si avrà $x^3-3x^2+x+1=0$. Dunque i moltiplicatori, che servono alla formazione della serie ricorrente volgare d'ordine superiore alla proposta sono 3, $-1$, $-1$. Si assumano pertanto i primi tre termini della serie 0, 1, 1, e si moltiplichi il primo per $-1$, il secondo per $-1$, il terzo per 3, e così in poi, con che si troverà la serie data 0, 1, 1, 2, 4, 9 ec.

*Vice versa* se sarà data una serie ricorrente volgare, e l'equazione, la di cui risoluzione serve a ritrovarne il termine generale, avrà una radice uguale all'unità, si potrà passare alla serie ricorrente con appendice dividendo per $x-1$ tale equazione, e dell'equazione, che ne verrà i coefficienti saranno i moltiplicatori de' termini precedenti concorrenti alla formazione di ciascun termine di questa serie con appendice. L'appendice poi si determinerà facilmente mediante il paragone del primo termine di questa serie trovata col corrispondente termine della serie data. Prendo l'esempio dalla precedente serie volgare 0, 1, 1, 2, 4 ec. per cui vale l'equazione $x^3-3x^2+x+1=0$, dalla di cui divisione per $x-1$ si ha $x^2-2x-1=0$. Quindi presi i due primi termini della serie 0, 1, si dovrà moltiplicare il primo per 1 e il secondo per 2, con che il terzo termine sarà $+2$, ma questo terzo termine 2 dovrebbe essere uguale al terzo termine 1 della serie data, e per renderlo eguale si deve diminuire di una unità, dunque l'appendice cercata è $-1$.

Finora ho supposto, che l'equazione, la di cui risoluzione dà il termine generale della serie con appendice abbia una radice uguale all'unità, ma quando ciò non accada, bisognerà ricercare in altra maniera il termine generale di queste serie. Per poterlo determinare fa mestiere osservare come si formino queste serie. Cominciamo dalle serie con appendice di primo ordine. Il primo termine della serie sia $=a$, la quantità che moltiplica il termine precedente sia $=t$, e l'appendice $=z$. La serie ricorrente, che con questa legge si genererà, sarà

$$\begin{array}{cccccc} a & at & at^2 & at^3 & \ldots\ldots & at^{n-1} \\ & z & tz & zt^2 & & zt^{n-2} \\ & & z & zt & & zt^{n-3} \\ & & & z & & zt^{n-4} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & zt^2 \\ & & & & & zt \\ & & & & & z \end{array}$$

le di cui colonne verticali somministrano i termini della serie. Le serie orizzontali somministrano altrettante serie ricorrenti di primo ordine, di cui ciascun termine nasce dal precedente moltiplicato in $t$. La prima serie comincia da $a$, e l'altre tutte da $z$. L'ultima colonna verticale somministra il termine generale delle serie ricorrenti con appendice di primo ordine. Ora questo termine generale risulta da due parti, cioè dal primo termine $at^{n-1}$, e dalla serie ricorrente di primo ordine $zt^{n-2}$, $zt^{n-3}$, $zt^{n-4}\ldots z$, nella quale il numero de' termini è $=n-1$, e il primo termine comincia dalla suppoſizione di $n=2$. Ma la detta serie risulta $=zt^{n-1}-z$ con moltiplicarla per $t-1$: Dunque essendo $zt^{n-2}+zt^{n-3}\ldots z$

$=\frac{zt^{n-1}-z}{t-1}$, il termine generale delle serie ricorrenti con appendice di primo ordine sarà $at^{n-1}+\frac{zt^{n-1}-z}{t-1}=\frac{at^n+\overline{z-a}\times t^{n-1}-z}{t-1}$. Si debba per esempio trovare il termine generale della serie 2, 3, 6, 15, 42 ec., di cui ciascun termine nasce con diminuirsi di 3 il prodotto del termine precedente moltiplicato in 3, per lo che trovasi essere $a=2$, $t=3$, $z=-3$, e però sostituiti questi valori nella precedente formola del termine generale, si troverà

$\frac{2\times 3^n-5\times 3^{n-1}+3}{2}=\frac{\overline{6-5}\times 3^{n-1}+3}{2}=\frac{3^{n-1}+3}{2}$, che è il cercato termine generale della proposta serie; e la somma generale (pel num. 949.) è

$$\frac{3}{2}\times\frac{3^{n-1}-\frac{1}{2}+3n}{2}$$

Veniamo alle serie ricorrenti con appendice di secondo ordine. Il primo termine della serie sia $=a$, il secondo $=b$, l'appendice $=z$: Sia $=t$ la quantità, che moltiplica l'ultimo termine, ed $=r$ la quantità, che moltiplica il penultimo, a fine di avere il termine seguente. Con questi dati si genererà la serie come segue, nella quale ogni colonna verticale forma un termine

$$\begin{array}{lllll} a & b & as+bt & bs+ast+bt^2 & as^2+2bst+ast^2+bt^3 \\ & z & zt & zs+zt^2 & 2zst+zt^3 \\ & & z & zt & zs+zt^2 \\ & & & z & zt \\ & & & & z \end{array} \Big\} \text{ec.}$$

dove si osservi, che da ogni fila orizzontale risulta una serie ricorrente di secondo ordine: I primi due termini della prima fila sono $a$, $b$, ma delle altre susseguenti file i primi due termini sono $z$, $zt$. E poichè essendo $=n$ il numero de'termini della prima fila, della seconda è $=n-1$, della terza $=n-2$, della quarta $=n-3$ ec., però laddove per avere il primo termine della prima serie bisogna fare $n=1$, per avere il primo termine della seconda fila si dovrà fare $n=2$, per avere il primo della terza bisognerà fare $n=3$ ec.

Siano K, H le due radici ineguali dell'equazione $x^2-tx-s=0$, il termine generale della precedente prima fila orizzontale avrà questa forma $AK^n+BH^n$ (giusta le cose dette), e le lettere A, B si determineranno mediante il paragone coi due primi termini della serie. Della seconda fila orizzontale il termine generale sarà $CK^{n-1}+DH^{n-1}$; della terza fila sarà $CK^{n-2}+DH^{n-2}$; della quarta $CK^{n-3}+DH^{n-3}$, e così in poi. Le indeterminate C, D si determineranno mediante i due primi termini $z$, $tz$ comuni a ciascuna di queste serie. Quindi il termine generale delle serie ricorrenti con appendice di secondo ordine sarà

$$\begin{array}{l} AK^n + CK^{n-1} + CK^{n-2} + CK^{n-3} \ldots + CK \\ BH^n + DH^{n-1} + DH^{n-2} + DH^{n-3} \ldots + DH \end{array}$$

vale a dire sarà eguale al binomio $AK^n+BH^n$ accresciuto della somma di due serie ricorrenti di primo ordine, delle quali, come di sopra ho detto, si ha il primo termine con fare $n=2$: Ma poc'anzi si è veduto, che $CK^{n-1}+CKn^{-2}+CK^{n-3}$ ec. $=\frac{CK^n-CK}{K-1}$; e $DH^{n-1}+DH^{n-2}+DH^{n-3}$ ec. $=\frac{DH^n-DH}{H-1}$. Dunque il termine generale di una serie ricorrente con appendice di secondo ordine è

$$AK^n + \frac{CK^n-CK}{K-1} + BH^n + \frac{DH^n-DH}{H-1}, \text{ o sia, con fare la riduzione allo stesso denominatore,}$$

$$\frac{AK^{n+1}+\overline{C-A}\times K^n-CK}{K-1} + \frac{BH^{n+1}+\overline{D-B}\times H^n-DH}{H-1} \quad (\Omega)$$

Si debba per esempio trovare il termine, e la somma generale della serie 0, 1, 4, 14, 50 ec., rispetto alla quale il primo termine dato è $a=0$, il secondo $b=3$, l'appendice $z=-2$, e ogni termine si genera dai due precedenti, l'ultimo de'quali sia moltiplicato in $t=5$, e il penultimo in $s=-8$. L'equazione adunque, dalla di cui

cui risoluzione si ottiene il termine generale è $x^2-6x+8=0$, le di cui radici sono 4, e 2, e però trovasi essere $K=4$, $H=2$. Per avere i valori di A, B, C, D si prenda primieramente il binomio $AK^n+BH^n$, in cui si sostituiscano i valori trovati di K, H, e si faccia $n=1$, indi si paragoni al primo termine proposto $a$, e si avrà (Δ) $4A+2B=a=0$: Di nuovo si faccia $n=2$, e istituito il paragone col secondo termine proposto $b$; si avrà (Θ) $16A+4B=b=3$. Dall'equazione (Θ) si sottragga l'equazione (Δ) moltiplicata in 2, e ne verrà $8A=3$, e però $A=\frac{3}{8}$. Poscia dall'equazione (Δ) moltiplicata in 4 si sottragga l'equazione (Θ), e si otterrà $4B=-3$, conseguentemente $B=-\frac{3}{4}$. Di poi si prenda il binomio $CK^{n-1}+DH^{n-1}$, in cui si sostituiscano i valori di K, H, e facendo primieramente $n=2$ si faccia il paragone con $z$, e si avrà (Λ) $4C+2D=z=-2$; in secondo luogo facendo $n=3$ si paragoni con $tz$, e ne verrà (Σ) $16C+4D=-tz=-12$. Dall'equazione (Σ) si sottragga l'equazione (Λ) moltiplicata in 2, e si avrà $8C=-8$, cioè $C=-1$, poscia dall'equazione (Λ) moltiplicata in 4 si sottragga l'equazione (Σ), e ne verrà $4D=4$, vale a dire $D=1$. Sostituendosi pertanto i ritrovati valori di A, B, C, D, K, H nel termine generale (Ω), si avrà

$$\frac{\frac{3}{8}\times 4^{n+1}-\frac{11}{8}\times 4^n+4}{3}-\frac{3}{4}\times 2^{n+1}+\frac{7}{4}\times 2^n-2, \text{ cioè}$$

$$\frac{24-22\times 4^{n-1}}{3}+\frac{4}{3}-\overline{6+7}\times 2^{n-1}-\frac{6}{3}, \text{ e però } \frac{2}{3}\times 4^{n-1}+2^{n-1}-\frac{2}{3}, \text{ che}$$

è il termine generale cercato della proposta serie ricorrente con appendice, dal quale (giusta il num. 949.) si deduce la somma generale, che è

$$\frac{\frac{8}{3}\times 4^{n-1}-\frac{2}{3}}{3}+2^{n-1}-1-\frac{2\times\overline{n-1}}{3}$$

Se le radici dell'equazione $xx-tx-t=0$ saranno eguali, in tal caso il termine generale della prima fila orizzontale avrà questa forma $\overline{A+Bn}\times K^n$ (giusta il num. 963.), e i termini generali delle altre file orizzontali saranno, della seconda $\overline{C+\overline{n-1}\times D}\times K^{n-1}$; della terza $\overline{C+\overline{n-2}\times D}\times K^{n-2}$; della quarta $\overline{C+\overline{n-3}\times D}\times K^{n-3}$ ec., conseguentemente il termine generale della serie con appendice avrà questa forma $\overline{A+Bn}\times K^n+\overline{C+\overline{n-1}\times D}\times K^{n-1}+\overline{C+\overline{n-2}\times D}\times K^{n-2}\ldots+\overline{C+D}\times K$, cioè a dire sarà uguale ad $\overline{A+Bn}\times K^n$ aumentata della somma della seguente serie ricorrente di secondo ordine $\overline{C+D}\times K$

C+

$\overline{C+2D}\chi K^2 \ldots . \overline{C+\overline{n-1}\chi D}\chi K^{n-1}$. Ma la ſomma di queſta ſerie (pel num. 954) ha queſta forma $\frac{CK-C-D}{\overline{K-1}^2} + \frac{D\sqrt{n-1}}{K-1}\chi K^n - \frac{CK^2+CK+DK}{\overline{K-1}^2}$. Dunque il termine generale ſarà

$$A+Bn+\frac{CK-C-D}{\overline{K-1}^2}+\frac{D\sqrt{n-1}}{K-1}\chi K^n-\frac{CK^2+CK-DK}{\overline{K-1}^2}$$

Sia data per eſempio la ſerie 0, 0, 2, 10, 34, 98 ec., di cui ciaſcun termine ſi genera dai due precedenti, l'ultimo de' quali ſia moltiplicato in 4, e il penultimo in $-4$, più l'appendice 2. In queſta ipoteſi ſarà $a=0$, $b=-2$, $z=2$, e l'equazione da riſolverſi $x^2-4x+4=0$, le di cui radici ſono 2, 2, quindi ſarà $K=2$. Fatto al ſolito il paragone de' termini a fine di avere i valori di A, B, C, D, ſi troverà $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=0$, $D=1$, i quali valori ſoſtituiti nel precedente termine generale lo cambieranno nel ſeguente $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\overline{n-1+n-1}\chi 2^n+2$, cioè

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\chi 2^n+2=\overline{n-3}\chi 2^{n-1}+2$$

Quanto alle ſerie ricorrenti con appendice di terzo ordine eſſe ſi generano con moltiplicare l'ultimo termine per $t$, il penultimo per $s$, l'antepenultimo per $r$, indi aggiungervi l'appendice $z$. Formata eſſendoſi in queſto modo la ſerie ſi troverà, che tutte le file orizzontali formano altrettante ſerie ricorrenti volgari di terzo ordine, della prima delle quali eſſendo $a$, $b$, $c$ i tre primi termini, i primi tre termini delle altre ſaranno $z$, $tz$, $t^2z+sz$, ed eſſendo $n$ il numero de' termini della prima, ſarà $n-1$ il numero de' termini della ſeconda, $n-2$ quei della terza ec., e però per avere il primo termine della ſeconda ſerie biſognerà fare $n-2$, per avere il primo della terza ſi dovrà ſupporre $n=3$ ec. L'equazione da riſolverſi ſarà $x^3-tx^2-sx-r=0$. Se le tre radici di queſta equazione ſaranno ineguali, il termine generale della prima fila orizzontale avrà queſta forma $AK^n+BH^n+CI^n$; il termine generale della ſeconda fila orizzontale ſarà rappreſentato da $DK^{n-1}+EH^{n-1}+FI^{n-1}$, quello della terza da $DK^{n-2}+EH^{n-2}+FI^{n-2}$, quello della quarta ec.; e però il termine generale della ſerie ricorrente con appendice ſarà eſpreſſo da $AK^n+BH^n+CI^n$ più la ſomma delle tre ſeguenti ſerie geometriche

I. $DK + DK^2 + DK^3 \ldots + DK^{n-1}$
II. $EH + EH^2 + EH^3 \ldots + EH^{n-1}$
III. $FI + FI^2 + FI^3 \ldots + FI^{n-1}$

Se l'equazione avrà due radici uguali, e una ineguale, in tal caſo il termine generale della prima fila orizzontale avrà queſta forma $\overline{A+Bn} \times K^n + CH^n$ (ſuppoſte $=K$ le due radici uguali, e l'ineguale $=H$); della ſeconda fila orizzontale ſarà $\overline{D+En} \times K^{n-1} + FH^{n-1}$; della terza ſarà $\overline{D+En} \times K^{n-1} + FH^{n-2}$, della quarta ec.: Quindi il termine generale di queſte ſerie ricorrenti con appendice ſarà rappreſentato da $\overline{A+Bn} \times K^n + CH^n$ più la ſomma delle due ſeguenti ſerie, prima

$\overline{D+E} \times K + \overline{D+2E} \times K^2 \ldots + \overline{D+\overline{n-1} \times E} \times K^{n-1}$, ſeconda $FH + FH^2 + FH^3 \ldots + FH^{n-1}$.

Se poi l'equazione avrà tutte tre le radici $=K$, il termine generale della prima fila orizzontale verrà rappreſentato da $\overline{A+Bn+Cn^2} \times K^n$, quello della ſeconda da

$\overline{D+\overline{n-1} \times E + \overline{n-1}^2 \times F} \times K^{n-1}$, quello della terza da

$\overline{D+\overline{n-2} \times E + \overline{n-2} \times F} \times K^{n-2}$, quello della quarta ec.: Conſeguentemente il termine generale della ſerie ricorrente con appendice ſarà eſpreſſo da

$\overline{A+Bn+Cn^2} \times K^n$ più la ſomma della ſeguente ſerie algebraico-geometrica

$\overline{D+E+F} \times K + \overline{D+2E+4F} \times K^2 + \overline{D+4E+8F} \times K^3$

$\ldots + \overline{D+\overline{n-1} \times E + \overline{n-1}^2 \times F} \times K^{n-1}$.

Le ſomme di queſte ſerie ſi ſanno già ritrovare giuſta le coſe dette di ſopra. L'ordine fin'ora tenuto moſtra abbaſtanza come debbaſi regolare intorno alle ſerie ricorrenti con appendice degli altri ordini ſuperiori.

*966.* Chi avrà preſenti le coſe dette di ſopra non troverà menoma difficoltà a formarſi immediatamente il termine di una ſerie generale, di cui ſi conoſca la legge: Così delle ſerie formate colla legge della ſeguente

(A) $\frac{1\times 2}{2\times 5}, \frac{3\times 2^2}{5\times 8}, \frac{5\times 2^3}{8\times 11}, \frac{7\times 2^4}{11\times 14}, \frac{9\times 2^5}{14\times 17}$ ec.

il termine generale trovasi essere $T=\frac{\overline{c+d\times\overline{n-1}}\times pm^{n-1}}{\overline{a+b\times\overline{n-1}}\times a+bn}$, (e però della serie (A) il termine generale è $T=\left(\frac{\overline{1+2\times\overline{n-1}}\times 2\times 2^{n-1}}{\overline{2+3\times\overline{n-1}}\times 2+3n}\right)$, poichè i numeratori de' termini della proposta serie si formano dalla rispettiva moltiplicazione de' termini delle due seguenti serie

(B) 1, 3, 5, 7, 9, 11 ec.
(C) 2, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$ ec.

e della prima (B il termine generale è $c+d\times\overline{n-1}$ (pel num. 928), della seconda (C) il termine generale è $pm^{n-1}$ (pel num. 949); i denominatori poi risultano dai termini di due serie, delle quali la seconda comincia dal secondo termine della prima, l'una, e l'altra algebraica di primo ordine, di cui perciò la formola è $\overline{a+b\times\overline{n-1}}\times a+bn$ (giusta il num. 939). Delle serie di questa natura

(R) $\frac{3}{4\times 1\times 2}, \frac{4}{8\times 2\times 3}, \frac{5}{16\times 3\times 4}, \frac{6}{32\times 4\times 5}, \frac{7}{64\times 5\times 6}$ ec.

il termine generale è $T=\frac{\frac{\overline{c+d\times\overline{n-1}}\times m^n}{e}}{\overline{a+b\times\overline{n-1}}\times a+bn}$, (onde della serie (R) il termine generale è $T=\left(\frac{\frac{\overline{3+1\times\overline{n-1}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}}{\overline{1+1\times\overline{n-1}}\times\overline{1+n}}\right)$, poichè la serie de' numeratori risulta dalla moltiplicazione de' termini delle due seguenti serie

(D)

(D) $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{8}{2}$ ec.

(E) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ ec.

e della prima il termine generale è $\frac{c+^{1}\overline{n-1}}{c}$ (pel num. 928.), della seconda (E) il termine generale è $m^n$: I denominatori poi risultano da queste due serie

1, 2, 3, 4, 5, 6 ec.
2, 3, 4, 5, 6, 7 ec.

per cui il termine generale si è $\overline{a+b}\overline{n-1}\overline{a+bn}$ (pel num. 938).

967. Delle serie di questa natura

(Q) $\frac{1\times 2}{3\times 5}, \frac{7\times 2^2}{5\times 7\times 9\times 3^2}, \frac{17\times 2^3}{7\times 9\times 11\times 3^3}, \frac{31\times 2^4}{9\times 11\times 13\times 3^4}$ ec.

il termine generale è $T=\frac{\overline{c+d}\overline{n-1}+e\overline{n-1}\overline{n-2}\times m^n}{\overline{a+b+b}\overline{n-2}\times\overline{a+b+b}\overline{n-1}\times\overline{a+b+bn}}$, (che perciò della serie (Q) il termine generale è

$T=\frac{\overline{1+6}\overline{n-1}+4\overline{n-1}\overline{n-1}\times 2^n}{\overline{3+2+2}\overline{n-2}\times\overline{3+2+2}\overline{n-1}\times\overline{3+2+2n}}$), poichè la serie de' numeratori risulta dalla moltiplicazione de' termini delle due seguenti serie

(F) 1 7 17 31

(G) $\left(\frac{2}{3}\right)^1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ec.

e della ſerie (F), che è di ſecondo ordine il termine generale (pel num. 929.) è $c+d\times\frac{\overline{n-1}}{1}+e\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}$, della ſerie (G) il termine generale è $m^n$; i denominatori poi riſultano da tre fattori, che formano tre ſerie di primo ordine, delle quali la terza comincia dal terzo termine della prima, e la ſeconda dal ſecondo termine della prima, di cui perciò la formola (pel num. 939.) è

$$\overline{a+b+b\times\overline{n-2}}\times\overline{a+b+b\times\overline{n-1}}\times\overline{a+b+bn}.$$

968. Egualmente ſi regolerà per trovare il termine generale di una ſerie, dei cui termini i numeratori riſultano dalla moltiplicazione de' termini di due ſerie, una algebraica di terzo ordine, e l'altra geometrica di primo ordine, i denominatori poi ſi formano da quattro fattori, che coſtituiſcono quattro ſerie algebraiche di primo ordine, delle quali la quarta comincia dal quarto termine della prima, la terza dal terzo termine della prima, e la ſeconda dal ſecondo termine della prima: E così in poi procedendo ad altre ſerie più compoſte.

969. Delle ſerie, che oſſervano queſta forma

(X) $\frac{2\times5^1}{1^1\times2^1}$, $\frac{12\times5^2}{2^1\times3^1}$, $\frac{36\times5^3}{3^1\times4^1}$, $\frac{80\times5^4}{4^1\times5^1}$, $\frac{150\times5^5}{5^1\times6^1}$ ec.

il termine generale è $\dfrac{c+d\times\frac{\overline{n-1}}{1}+e\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+f\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}\times m^n}{a+b\times\frac{\overline{n-1}}{1}+b\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}\times p+q\times\overline{n-1}+b\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}$;

quindi della ſerie (X) il termine generale è

$$T=\frac{2+10\times\frac{\overline{n-1}}{1}+14\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+6\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}\times5^n}{1+3\times\frac{\overline{n-1}}{1}+2\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}\times4+5\times\frac{\overline{n-1}}{1}+2\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}}$$

poichè i numeratori dei termini di queſta ſerie ſi formano dalle due ſeguenti ſerie

(H)

(H) 2, 12, 36, 80, 150
(L) $5$, $5^2$, $5^3$, $5^4$, $5^5$ ec.

e della ſerie (H), che è algebraica di terzo ordine il termine generale (pel num. 930.) è $c+d\times\frac{\overline{n-1}}{1}+e\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+f\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}$, della ſerie (L) il termine generale è $m^n$; i denominatori poi coſtano di due fattori, che formano due ſerie algebraiche di ſecondo ordine, delle quali la ſeconda comincia dal ſecondo termine della prima, de' quali perciò la formola (giuſta il num. 945.) è

$$\overline{a+b\times\frac{\overline{n-1}}{1}+b\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}}\times\overline{p+q\times\frac{\overline{n-1}}{1}+b\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}}.$$

970. Della ſerie, i di cui termini procedano con queſta legge, che i numeratori riſultino dai termini di una ſerie algebraica di quinto ordine moltiplicati in una ſerie geometrica di primo ordine, e i denominatori coſtino di tre fattori coſtituenti tre ſerie algebraiche di ſecondo ordine, ſi determinerà collo ſteſſo metodo il termine generale; come pure ſi farà per qualunque altra ſerie più compoſta gradatamente.

971. Non baſta il ſapere formar toſto di una propoſta ſerie analoga alle ſurriferite, il termine generale, biſogna inoltre ſaperne ritrovare la ſomma generale: Nienre però ſarà più facile, qualora ſi ſappia la forma della ſomma generale, che le compete. Ne eſaminerò varie, che ſerviranno di norma per tutte le altre. Le ſerie, che ricevono la ſomma generale di queſta forma $\frac{LK^n}{A+Bn}-\frac{L}{A}$ ſi formano con queſta legge: I prodotti dei termini di due ſerie, una algebraica, e l'altra geometrica, tutte due di primo ordine, formano i numeratori dei di lei termini; e i denominatori riſultano da due fattori coſtituenti due ſerie algebraiche di primo ordine, delle quali la ſeconda comincia dal ſecondo termine della prima, e tali ſono le ſerie del num. 966. Ciò poi coſta evidentemente col dedurſi dalla data formola $\frac{LK^n}{A+Bn}-\frac{L}{A}$ il termine generale, giuſta il metodo del Padre Riccati, ſoſtituendovi cioè $n-1$ in luogo di $n$, indi ſottraendovi ciò che ne naſce. Iſteſſamente operando ſi trova, che la ſomma generale di queſta forma $\frac{\overline{L+Mn}\times K^n}{A+B\times\overline{n-1}\times\overline{A+Bn}}-\frac{L}{\overline{A-B}\times A}$ ſi riferiſce ad una ſerie, che ſi forma così: I numeratori dei di lei termini riſultano dal prodotto dei termini di due ſerie, una algebraica di ſecondo ordine, e l'altra geometrica di primo ordine; i denominatori poi coſtano di tre fattori, che coſtituiſcono tre ſerie algebraiche di primo ordine, delle quali la terza comincia dal terzo termine della prima, e la ſeconda dal ſecondo termine della prima, e tale è la ſerie del num. 967. Così le ſerie, i di cui termini hanno per numeratori i prodotti de' termini di due ſerie, una algebraica di terzo ordine, e l'altra geometrica di primo ordine, e per denominatori quattro fattori, che ſomminiſtrano quattro ſerie algebraiche

di primo ordine, delle quali la quarta comincia dal quarto termine della prima, la terza dal terzo termine della prima; e la ſeconda dal ſecondo termine della prima, ricevono la ſomma generale di queſta forma

$$\frac{\overline{L+Mn+Nn^2}\times K^n}{\overline{A+B}\times\overline{n-2}\times\overline{A+B}\times\overline{n-1}\times A+Bn} - \frac{L}{\overline{A-2B}\times\overline{A-B}\times A},$$ e così in ſeguito.

972. Parimente le ſerie, che ricevono la ſomma generale di queſta forma

$\frac{\overline{L+Mn}\times K^n}{A+Bn+Bn^2} - \frac{L}{A}$ oſſervano queſta legge: I numeratori de' loro termini ſono i prodotti de' termini di due ſerie, una algebraica di terzo ordine, e l' altra geometrica di primo ordine; i denominatori poi riſultano da due fattori di ſecondo grado, che ſomminiſtrano due ſerie algebraiche di ſecondo ordine, delle quali la ſeconda comincia dal ſecondo termine della prima. Così le ſerie, i di cui termini hanno per numeratori i prodotti de' termini di due ſerie, una algebraica di quinto ordine, e l' altra geometrica di primo ordine, e per denominatori tre fattori di ſecondo grado coſtituenti tre ſerie algebraiche di ſecondo ordine, delle quali la terza comincia dal terzo termine della prima, e la ſeconda dal ſecondo termine della prima, ricevono la ſomma generale di queſta forma $\frac{\overline{L+Mn+Nn^2+On^3}\times K^n}{\overline{A+B}\times\overline{n-1+C}\times\overline{n-1}^2\times\overline{A+Bn+Cn^2}} -$

$\frac{L}{\overline{A-B+C}\times A}$, e così in poi.

973. Sapendoſi pertanto la forma, che deve avere la ſomma generale d' una propoſta ſerie, della quale, relativamente alla legge con cui ſi forma, ſe ne fa già immediatamente eſibire il termine generale, ſe ne determinerà la ſomma generale in queſto modo: Si prenda la formola, la quale ſomminiſtra la forma della ſomma generale, e mediante il paragonarla al termine generale, ſupponendo $n=1$, $n=2$ ec., ſi determino le quantità L, M, N ec., giacchè il valore di K ſi ha dalla data ſerie, e i valori di A, B, C ec. del denominatore reſtano determinati dai valori del denominatore del termine generale, e queſti ritrovati valori ſoſtituiti nella detta formola ci forniranno la cercata ſomma generale,

975. Debbaſi per eſempio ritrovare la ſomma generale della ſerie (R) del num. 965, quale ſo dovere aver queſta forma $\frac{LK^n}{A+Bn} - \frac{L}{A}$. Prendo il termine generale della ſerie trovato allo ſteſſo num. 966, che è

$T=\frac{\overline{3+1\times n-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2}$, e nella formola $\frac{LK^n}{A+Bn}-\frac{L}{A}$ ſoſtituiſco i cogniti

$1+1\times n-1\times 1+n$

valori di K, A, B, con che eſſa diventa $\frac{L\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}-\frac{L}{1}$, poſcia per determinare il valore di L, paragono queſta formola al termine generale, facendo nell' uno, e nell'altra $n=1$ (cambio i ſegni alla formola $\frac{L\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}-\frac{L}{1}$ così $\frac{L\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}+\frac{L}{1}$ a motivo, che è minore dell'unità il valore di $K=\frac{1}{2}$) con che ho $\frac{3}{8}=L\times\frac{-\frac{1}{2}+2}{2}$, cioè $\frac{3}{8}=L\times\frac{3}{4}$, e però $L=\frac{1}{2}$. Soſtituendoſi pertanto nella formola $\frac{LK^n}{A+Bn}-\frac{L}{A}$ i valori di L, K, A, B, ſi avrà la cercata ſomma generale, che è $\frac{\frac{1}{2}\times-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}-\frac{1}{2}$.

Se ſi aveſſe voluto la ſomma generale, che ammettono tutte le ſerie analoghe alla propoſta, ſarebbe ſtato meſtiere paragonare col termine generale indeterminato

$T=\frac{\overline{c+d\times n-1}\times m^n}{e}$ la formola $\frac{LK^n}{A+Bn}-\frac{L}{A}$, dopo averci ſoſtituiti i

$a+b\times n-1\times a+bn$

valori di K, A, B preſi dal termine generale, con che diventa $\frac{Lm^n}{a+bn}-\frac{L}{a}$, così $e\times\overline{c+d\times n-1}\times m^n\times a+b\times n-1\times a+bn=\frac{Lm^n}{a+bn}-\frac{L}{a}$, che con fare $n=1$ riſulta $em=Lm\times e\times a-L\times e\times a+b$, e però $L=\frac{em}{e\times am-a-b}$, il qual valore ſoſtituito

nel-

nella formola $\frac{Lm^n}{a+bn} - \frac{L}{a}$ dà $\frac{cm \times m^n}{e \times \overline{am-a-b} \times \overline{a+bn}} - \frac{cm}{e \times \overline{am-a-b}} = S$

ſomma generale cercata.

*Modo di ſommare le ſerie, che naſcono dalla ſucceſſiva moltiplicazione, e diviſione de' termini di ſerie algebraiche.*

975. Cominciamo dal modo di ritrovare il termine generale di una ſerie qualunque riſultante dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una qualſivoglia ſerie algebraica, della quale provenuta ſerie ciaſcun termine ſia moltiplicato ordinatamente ne' termini di un'altra ſerie algebraica. Cio ſi otterrà facilmente d' una maniera analoga a quella, che ſi è praticata al num. *966*, purchè ſiano date le ſerie componenti. Ed ecco come. Prendo primieramente la ſerie (A) $2 \times 4$, $2 \times 3 \times 6$, $2 \times 3 \times 4 \times 8$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 10$ ec., la quale riſulta dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini della ſerie 2, 3, 4, 5, 6, 7 ec., e dal moltiplicarſi poſcia i termini della nata ſerie pe' termini della ſerie 4, 6, 8, 10, 12, 14 ec., come ſegue

Serie componenti $\begin{cases} I. & 2, & 2 \times 3, & 2 \times 3 \times 4, & 2 \times 3 \times 4 \times 5, \text{ ec.} \\ II. & 4, & 6, & 8, & 10, \end{cases}$

Serie compoſta $2 \times 4$, $2 \times 3 \times 6$, $2 \times 3 \times 4 \times 8$, $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 10$ ec.

Ora per avere il termine generale di queſta ſerie compoſta, ſi oſſervi, che (pel num. 930.) eſſendo (mi ſervo delle eſpreſſioni generali delle ſerie, e de' termini generali per rappreſentare tutte le ſerie analoghe, e i loro termini generali) $a+b \times \overline{n-1}$ (la lettera $a$ al ſolito rappreſenta il primo termine della ſerie, e $b$ la differenza) il termine generale della ſerie 2, 3, 4, 5, 6 ec., della ſerie I il termine generale ſarà $a \times \overline{a+b} \times \overline{a+2b} \times \overline{a+3b} \ldots \times \overline{a+b \times \overline{n-1}}$, parimente eſſendo $m+p \times \overline{n-1}$ (la lettera $m$ denota il primo termine della ſerie, e $p$ la differenza) il termine generale della ſerie II, ſarà

(P) $\overline{m+p \times \overline{n-1}} \times a \times \overline{a+b} \times \overline{a+2b} \times \overline{a+3b} \ldots \times \overline{a+b \times \overline{n-1}}$ il termine generale della ſerie (A), lo che ſi cercava.

976. Sia in ſecondo luogo la ſerie (B) $5 \times 13$, $5 \times 14 \times 28$, $5 \times 14 \times 29 \times 49$, $5 \times 14 \times 29 \times 50 \times 76$ ec., la quale naſce dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini della ſerie 5, 14, 29, 50 ec., e in oltre dal moltiplicarſi i riſultanti termini ne' termini di quell' altra ſerie 13, 28, 49, 76 ec., come ſegue

Se-

Serie componenti $\left\{\begin{matrix} \text{I.} & 5, & 5\times 14, & 5\times 14\times 29, & 5\times 14\times 29\times 50 \\ \text{II.} & 13, & 28, & 49, & 76 \end{matrix}\right.$ ec.

Serie composta $5\times 13,\ 5\times 14\times 28,\ 5\times 14\times 29\times 49,\ 5\times 14\times 19\times 50\times 76$ ec.

Per avere il termine generale di queste serie rifletto, che essendo (pel num. 930.) $a+b\times\overline{\frac{n-1}{1}}+c\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}}$ il termine generale della serie 5, 14, 29, 50 ec., il termine generale della serie I sarà

$$a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b+c}\times\overline{a+3b+3c}\ldots\ldots\times\overline{a+b\times\overline{\frac{n-1}{1}}+c\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}}};$$

della serie poi 13, 28, 49, 76 il termine generale è

$m+p\times\overline{\frac{n-1}{1}}+q\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}}$: Quindi della serie (B) il cercato termine generale trovasi essere (Q)

$$\left\{\begin{matrix}\left(m+p\times\overline{\frac{n-1}{1}}+q\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}}\right)\times \\ \left(a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b+c}\times\overline{a+3b+3c}\ldots\times\overline{a+b\times\overline{\frac{n-1}{1}}+c\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}}}\right)\end{matrix}\right\}$$

977. In terzo luogo sia la serie (C) $3\times 15,\ 3\times 16\times 44,\ 3\times 16\times 45\times 95,\ 3\times 16\times 45\times 96\times 174$ ec., la quale nasce dalla successiva moltiplicazione de' termini della serie 3, 16, 45, 96 ec., e in oltre dal moltiplicarsi i risultanti termini ne' termini di quest' altra serie 15, 44, 95, 174 ec., come segue

Serie componenti $\left\{\begin{matrix} \text{I.} & 3, & 3\times 16, & 3\times 16\times 45, & 3\times 16\times 45\times 96 \\ \text{II.} & 15, & 44, & 95, & 174 \end{matrix}\right.$ ec.

Serie composta $3\times 15, 3\times 16\times 44, 3\times 16\times 45\times 95, 3\times 16\times 45\times 96\times 174$ ec.

di cui per determinare il termine generale osservo, che il termine generale della serie 3, 16, 45, 96 ec. è (pel num. 930.)

$a+b\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}}+d\times\overline{\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}}$, conseguentemente il termine generale della serie I trovasi essere

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b+c}\times\overline{a+3b+3c+d}\times\overline{a+4b+6c+4d}\ldots\right\}\times a\\ \left\{a+b\times\frac{\overline{n-1}}{1}+c\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+d\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}\right\}\end{array}\right.$$

della ſerie poi 15, 44, 95, 174 ec. il termine generale è

$$m+p\times\frac{\overline{n-1}}{1}+q\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+r\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}$$

Per lo che il cercato termine generale della ſerie (C) è (R)

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{m+p\times\frac{\overline{n-1}}{1}+q\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+r\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}\right\}\times\\ \left\{a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b+c}\times\overline{a+3b+3c+d}\ldots.\right\}\times\\ \left\{a+b\times\frac{\overline{n-1}}{1}+c\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+d\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{d-3}}{1\ 2\ 3}\right\}\end{array}\right.$$

978. Continuando collo ſteſſo metodo ſi troveranno i termini generali delle altre ſerie ſempre più collo ſteſſo ordine compoſte.

979. Reſtano adeſſo da trovarſi le ſomme generali di queſte ſerie, per ottenere le quali niente più ſi richiede, che ſcuoprire le forme, che debbono avere queſte ſomme: Cominciamo pertanto dal conſiderare, che ſerie ſia quella, che riceve la ſomma generale di queſta forma

$S=A\times a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b}\ldots\times\overline{a+nb}-A\times a$ ( la lettera $a$ rappreſenta il primo termine della ſerie, e $b$ la differenza, lo che ſi intenda ſempre ſenza che lo debba ogni volta avvertire ): In queſta ſomma ſi ſoſtituiſca $n-1$ in luogo di $n$, e vi ſi ſottragga ciò, che ne naſce, con che ſi avrà il termine generale della ſerie ( giuſta il num. 930 ), che è

$$T=A\times a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b}\ldots\times\overline{a+\overline{n-1}\times b}\times\overline{a+nb}-$$

$$A\times a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b}\ldots.\times\overline{a+\overline{n-1}\times b},\ \text{cioè a dire}$$

$$T=A\times\overline{a+nb-1}\times a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b}\ldots.\times\overline{a+\overline{n-1}\times b},$$

Ma queſto termine generale riguarda una ſerie, i di cui termini riſultanti dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica di primo ordine ſono moltiplicati ordinatamente ne' termini di un' altra ſerie pure algebraica di primo or-

di-

dine, quale è la ſerie del num. 975. Dunque tutte le ſerie analoghe alla ſerie del num. 975. ricevono la ſomma generale della precedente forma.

980. Cerco in ſecondo luogo che ſerie ſia quella, che riceve la ſomma generale della ſeguente forma. S =

$$\left\{\begin{array}{l}(A\chi a\chi\overline{a+b}\chi\overline{a+2b+c}\ ,\ \ldots)\chi\\ \left(a+b\,\chi\dfrac{\overline{n-1}}{1}+c\,\chi\dfrac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1\ \ 2}\right)\chi a+nb+nc\,\chi\dfrac{\overline{n-1}}{2}\end{array}\right\}-A\chi a$$

dalla quale, come ho fatto al num. 979, ricavo il corriſpondente termine generale, che è T =

$$A\chi a+nb+nc\,\chi\frac{\overline{n-1}-1}{2}\ \chi\ a\chi\overline{a+b}\chi\overline{a+2b+c}\ldots\chi a+b\,\chi\frac{\overline{n-1}+c}{1}\,\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1\ \ 2}.$$

Ora queſto è il termine generale di una ſerie, i di cui termini, riſultanti dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica di ſecondo ordine, ſono moltiplicati ordinatamente ne' termini di una ſerie pure algebraica di ſecondo ordine, quale è la ſerie del num. 976: Dunque tutte le ſerie analoghe alla ſerie del num. 976 ricevono la ſomma generale della precedente forma.

981. In terzo luogo eſamino che ſerie ſia quella, che riceve la ſomma generale della ſeguente forma S =

$$\left\{\begin{array}{l}\left(A\chi a\chi\overline{a+b}\chi\overline{a+2b+c}\chi\overline{a+3b+3c+d}\ldots\right)\chi\\ \left(a+b\,\chi\dfrac{\overline{n-1}}{1}+c\chi\dfrac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1\ \ 2}+d\,\chi\dfrac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}\,\overline{n-3}}{1\ \ 2\ \ 3}\right)\chi\\ \left[a+nb+nc\,\chi\dfrac{\overline{n-1}}{2}+nd\chi\dfrac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{2\ \ 3}\right]\end{array}\right\}-A\chi a$$

e a tale effetto ne deduco il termine generale giuſta il num. 930., e come ho fatto poc' anzi al num. 979, che trovo eſſere T =

$$\left(A\chi a+nb+nc\chi\frac{\overline{n-1}}{2}+nd\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{2\ \ 3}-1\right)\chi$$
$$\left(a\chi\overline{a+b}\chi\overline{a+2b+c}\chi\overline{a+3b+3c+d}\ldots\right)\chi$$
$$\left(a+b\,\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+c\,\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1\ \ 2}+d\,\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}\,\overline{n-3}}{1\ \ 2\ \ 3}\right)$$

Ma questo è il termine generale di una serie, i di cui termini, risultanti dalla successiva moltiplicazione de' termini di una serie algebraica di terzo ordine, sono moltiplicati ordinatamente ne' termini di una serie pure algebraica di terzo ordine, quale è la serie del num. 977; dunque tutte le serie analoghe alla serie del num. 977 ricevono la somma generale della precedente forma.

982. Questi tre casi bastano per iscorgere la legge, che osservano le forme delle somme generali a misura che le serie diventano più composte, e però a saper conoscere che forma devesi dare alla somma generale di una qualunque proposta serie risultante dalla successiva moltiplicazione de' termini di una qualsivoglia serie algebraica.

983. Non solo poi si è trovata la forma, che deve avere la somma generale di queste serie, ma si è inoltre ottenuta la cercata somma, niente altro più richiedendosi, che determinare il valore dell'assunta indeterminata A, poichè i valori di $a$, $b$, $c$ ec. già sono somministrati dalla serie. Per determinare il valore di A basta paragonare il fattore, in cui egli entra, del termine generale dedotto dalla somma, come vedesi fatto ai num. 979, 980, 981, col termine generale della serie algebraica, come fra poco l'esempio metterà sotto degli occhi. E qui devesi avvertire una eccezione risguardante ciò, che ho detto ai num. 979, 980, 981, cioè che tutte le serie analoghe alle serie di questi numeri ricevono la somma generale della forma, che somministrano le formole ivi ritrovate; ed è, che se fatto il paragone indicato inserviente a determinare il valore di A, si troverà per A un tal valore, che renda l'equazione in tutte le sue parti identica, la serie riceverà la cercata somma, che sarà somministrata dalla formola generale dopo avervi sostituito il valore di A; ma se l'equazione non sarà in tutte le sue parti identica, la formola generale non darà la somma bramata.

984 Prendiamo l'esempio dalla serie (A) del num. 975. Si è ivi veduto, che il termine generale della serie II, i di cui termini moltiplicano ordinatamente i termini della serie I, onde ne nasce la serie (A), è $m+p\times\overline{n-1}$, cioè, dati i suoi valori ad $m$, $p$, è $4+2\times\overline{n-1}$, vale a dire $4+2n-2$, e però (Δ) $2+2n$: Ora si paragoni questo termine generale al fattore $A\times\overline{a+nb-1}$ del termine generale dedotto al num. 979, e per farne i debiti paragoni a parte per parte, si disponga il fattore $A\times\overline{a+nb-1}$ così $A\times\overline{a-1}+nbA$, che mediante la sostituzione de' valori di $a$, $b$ (come si è detto la lettera $a$ rappresenta il primo termine della serie 2, 3, 4, 5 ec., e $b$ ne esprime la differenza) diventa $A+nA$. Si paragoni il primo termine di questa formola col primo termine della formola (Δ), e si avrà $A=2$; e perchè sostituendosi questo ritrovato valore di A nel secondo termine $nA$, e fattone il paragone col secondo termine della formola (Δ), ne risulta l'equazione identica $2n=2n$; però la serie (A) del num. 975 riceve la somma generale del num. 979, vale a dire la somma cercata è $2\times2\times3\times4\ldots\times\overline{2+n}-2\times2$.

985. Desumo il secondo esempio dalla serie (C) del num. 977. Il termine generale della serie II, i di cui termini moltiplicano ordinatamente i termini della serie I, onde ne nasce la serie (C), si è ivi trovato essere

$m+p$

$m+p\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+q\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1\ 2}+r\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}\chi\overline{n-3}}{1\ 2\ 3}$, che ordino così

$m-p+q-r+p-\frac{3q}{2}+\frac{11r}{6}\chi n+\frac{\overline{q}}{2}+r\chi n^2+\frac{rn^3}{6}$, che col ſoſtituirſi i valori di $m, p, q, r$ diventa $2+7n+5n^2+n^3$ (Θ): Si paragoni pertanto queſto termine generale al fattore

$A\chi a+nb+nc\chi\frac{\overline{n-1}}{2}+nd\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{2\ 3}-1$ del termine generale dedotto al num. 981. che ordino così

$A\chi\overline{a-1}+A\chi b-\frac{c}{2}+\frac{2d}{6}\chi n+A\chi\frac{c}{2}-\frac{3d}{6}\chi n+A\chi\frac{\overline{dn^3}}{6}$, che mediante la ſoſtituzione de' valori di $a, b, c, d$ trovaſi eſſere $A\chi 2+A\chi 7n+A\chi 5n^2+An^3$. (A) Uguagliandoſi il primo termine di queſta formola al primo termine della formola (Θ) ſi trova $A\chi 2=2$, e però $A=\frac{2}{2}=1$; e perchè col ſoſtituirſi queſto valore di A nella formola (A) eſſa ſi trova in tutte le ſue parti identica alla formola (Θ), quindi ne conchiudo, che la ſerie (C) del num. 977. riceve la ſomma generale del num. 981., cioè a dire la ſomma cercata è $S=3\chi 16\chi 45\ldots\chi\overline{3+7n+5n^2+n^3-3}$.

986. Le coſe dette danno lume abbaſtanza per iſcuoprire le diverſe forme, che devono avere le ſomme generali di altre ſerie più compoſte. Se ſi aſſumeranno ad arbitrio varie forme di ſomme generali, con dedurne ſecondo il metodo ſolito i termini generali, ſi verrà in cognizione delle qualità delle ſerie, che ricevono quelle tali ſomme. In queſto modo ſi ſcorgerà la legge di quelle ſerie, la di cui ſomma generale ſi compone da due fattori, de' quali uno è una formola algebraica, che è termine generale di una ſerie dell' ordine indicato dal maſſimo eſponente della formola, l' altro poi è una formola riſultante dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica fino al termine $\overline{n+1}^{esimo}$: E così pure di quelle ſerie, delle quali la ſomma è una frazione, il di cui numeratore riſulta dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica fino al termine $\overline{n+1}^{esimo}$, e il denominatore è una qualunque formola algebraica.

987. Per dire brevemente qualche coſa ancora di quelle ſerie, che ricevono per ſomma generale o una quantità coſtante, o una formola algebraica diviſa per un' altra formola riſultante dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica, la quale può eſſer ſola, o moltiplicata in una qualunque formola algebraica; come pure di quelle ſerie, la di cui ſomma è una frazione avente tanto in numeratore, che in denominatore una formola, che riſulti dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica, e queſte formole poi o poſſono eſſere ſole, o moltiplicate in altre formole algebraiche, mi contenterò di due ſoli eſempj, poichè la determinazione di queſte ſomme non farà difficoltà a chi avrà preſenti le dottrine eſpoſte, e ſaprà applicarle al biſogno. Ommetto di dire, come data una di

queſte ſerie ſe ne poſſa tosto formare il di lei termine generale, poichè ciò non eſige maggiori condizioni delle già date. Ora per determinare di queſte ſerie la ſomma generale baſta ſapere la forma, che ella ammette, mentre mediante gli opportuni paragoni determinando i valori delle quantità, che entrano in queſta tal formola indeterminata, verraſſi a trovare la cercata formola generale della ſomma. La forma poi delle ſomme generali delle ſerie è ſempre relativa alla legge, colla quale eſſe ſi formano; quindi è, che baſta ſapere con che legge ſi formano le ſerie, che ricevono la ſomma generale di una data forma, per ſaperne ancora determinare queſta ſomma. Per ſapere ſecondo la legge della ſerie che forma riceva la di lei ſomma generale, biſogna ſcuoprirlo tentando così: Si aſſuma una ſomma generale indeterminata, dalla quale (giuſta il num. 930.) ſi deduca il termine generale, mediante il quale ſi ſcuoprirà la legge della ſerie, la quale ammetterà la ſomma generale della forma propoſta, ſe pur n'è ſuſcettibile. Collo ſteſſo metodo dalla aſſunta ſomma generale indeterminata ſi paſſi ad un'altra più compoſta, e così in poi, e in queſto modo ſi ſcuopriranno le forme delle ſomme generali, che ricevono le ſerie relativamente alle leggi, colle quali ſi formano, onde poi data una ſerie, e la legge, con cui ſi forma, ſe ne ſappia immediatamente determinare la ſomma generale. Ma vediamolo in pratica. Cercaſi in primo luogo che ſerie ſia quella, che riceve la ſomma generale di queſta forma (A)

$$\frac{\quad\quad\quad

$$\frac{-M+Ma+Mb\times\frac{\overline{n-1}}{1}\ldots+Mb\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\ldots\times\overline{n-m}}{1.\quad 2.\ldots\ldots m}}{a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b+c}\ldots\times a+b\times\frac{\overline{n-1}}{1}+c\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\ldots+b\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\ldots\times\overline{n-m}}{1.\quad 2.3.\ldots\ldots m}}$$

Ora di queſto termine generale il numeratore è una ſerie algebraica di un qualunque ordine, e il denominatore ſi forma dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una ſerie algebraica di un qualunque ordine: Quindi tutte le ſerie, i di cui termini oſſervano queſta legge, che abbiano per numeratori i termini di una ſerie algebraica di un qualunque ordine, e per denominatori i ſucceſſivi prodotti de' termini di una ſerie algebraica di qualſivoglia ordine, ricevono la ſomma generale della precedente forma (A), e tale è la ſeguente ſerie

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3\times 14},\ \frac{3}{3\times 14\times 36},\ \frac{10}{3\times 14\times 36\times 72},\ \frac{15}{3\times 14\times 30\times 72\times 125}\ \text{ec.}$$

il di cui termine generale è

$$\frac{1+2\times\frac{\overline{n-1}}{1}+1\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}}{3\times 14\times 36\ldots\times 3+11\times\frac{\overline{n-1}}{1}+11\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}+3\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}}$$

988. Cercaſi in ſecondo luogo, che ſerie ſia quella, la di cui ſomma generale è di queſta forma

$$\frac{-M-N\times\frac{\overline{n-1}}{1}-O\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\ \text{ec.}}{a\times\overline{a+b}\times\overline{a+2b+c}\ldots\times a+b\times\frac{\overline{n-1}}{1}+c\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\ \text{ec.}}$$

Se ne deduca al ſolito il termine generale operando come ſi è fatto poc'anzi, e ſi troverà

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} -M-N\chi^{\overline{n-1}}_{1}-O\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}_{1.\quad 2.}+ \\ \hline M+N\chi^{\overline{n-2}}_{1}+O\chi^{\overline{n-2}\chi\overline{n-3}}_{1.\quad 2.}\chi a+b\chi^{\overline{n-1}}_{1}+c\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}_{1.\quad 2.} \end{array}\right\}}{a\chi\overline{a+b}\,\chi\overline{a+2b+c}\ldots\chi a+b\chi^{\overline{n-1}}_{1}+c\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}_{1.\quad 2.}}$$

il quale ha per numeratore il termine generale di una ſerie algebraica, il di cui ordine viene eſpreſſo dalla ſomma de' numeri indicanti gli ordini delle ſerie, delle quali ſono termini generali il numeratore, e il denominatore della propoſta ſomma generale; per denominatore poi egli ha lo ſteſſo denominatore della ſomma. E tale è la ſerie ſeguente

$$\frac{1}{5},\ \frac{16}{5\chi 12},\ \frac{81}{5\chi 12\chi 21},\ \frac{256}{5\chi 12\chi 21\chi 32},\ \frac{625}{5\chi 12\chi 21\chi 32\chi 45}\ \text{ec.}$$

il di cui termine generale è

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 1+15\chi^{\overline{n-1}}_{1}+50\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}_{1.\quad 2.}+60\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}\chi\overline{n-3}}_{1.\quad 2.\quad 3.} \\ +24\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}\chi\overline{n-3}\chi\overline{n-4}}_{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.} \end{array}\right\}}{5\chi 12\chi 21\chi 32\chi 45\chi 60\ldots\chi 5+7\chi^{\overline{n-1}}_{1}+2\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}_{1.\quad 2.}}$$

989. *Vice verſa* dato il termine generale ſi ſcorge quale eſſer debba la forma della ſomma, la quale avrà per denominatore lo ſteſſo denominatore del termine generale, e per numeratore una formola algebraica, il di cui ordine verrà eſpreſſo dalla differenza degli ordini delle ſerie del numeratore, e denominatore del termine generale.

990. Egualmente ſi operi ſe il denominatore della propoſta ſomma riſultante dalla ſucceſſiva moltiplicazione de' termini di una qualunque ſerie algebraica foſſe moltiplicato in una formola algebraica.

991. Vediamo in terzo luogo che ſerie ſia quella, la di cui ſomma generale ammette queſta forma

$$\frac{M\chi a\chi\overline{a+b}\,\chi\overline{a+2b+c}\ldots\chi a+\frac{bn}{1}+\frac{cn\chi\overline{n-1}}{1.\quad 2.}+\ldots\ldots+\frac{bn\chi\overline{n-1}\ldots\ldots\chi\overline{n-m+1}}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots m}}{g\chi\overline{g+k}\ldots\ldots\chi g+.\,k\chi^{\overline{n-1}}_{1}+p\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}_{1.\quad 2.}\ldots+q\chi^{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}\ldots\chi\overline{n-m}}_{1.\quad 2.\quad 3.\ldots m}}$$

Se

Se ne deduca al ſolito il termine generale, e ſi troverà eſſere

$$\left\{ M\chi\left\{\begin{matrix} a & +b \\ -g & -\frac{s}{a} \\ +k & +\frac{s}{a}\frac{s}{a} \\ -p & +k \end{matrix}\right\}\chi^{n} \quad \begin{matrix} +\frac{s}{a}c \\ -\frac{s}{a}p \end{matrix} \right\} n^{o} \text{ ec.} \Big\} \chi$$

$$\left\{ \frac{a\chi\overline{a+b}\chi\overline{a+2b+c}\ldots\chi a+b\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+a\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}\ldots+b\chi\frac{\overline{n-1}\ldots\chi\overline{n-m}}{1.2.\ldots\ldots m}}{g\chi\overline{g+k}\chi\overline{g+2k+p}\ldots\chi g+k\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+p\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1,\quad 2,}\ldots+q\chi\frac{\overline{n-1}\ldots\chi\overline{n-m}}{1.2.\ldots\ldots m}} \right\}$$

il quale ha per numeratore i termini di una ſerie algebraica ſucceſſivamente moltiplicati, e per denominatore i termini di una ſerie parimente algebraica ſucceſſivamente moltiplicati, e queſta frazione è moltiplicata in una formola algebraica, che è la differenza dei termini generali delle due ſerie, che ſono nel numeratore, e nel denominatore, quale differenza è in oltre moltiplicata in una quantità coſtante. Tale è la ſerie ſeguente

$$\frac{20\chi 2}{6},\ \frac{50\chi 2\chi 6}{6\chi 24},\ \frac{90\chi 2\chi 6\chi 12}{6\chi 24\chi 60},\ \frac{140\chi 2\chi 6\chi 12\chi 20}{6\chi 24\chi 60\chi 129}\ \text{ec.}$$

il di cui termine generale è

$$\left\{ 20+30\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+10\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.} \right\}\chi$$

$$\left\{ \frac{2\chi 6\ldots\ldots\chi 2+4\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+2\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}}{6\chi 24\chi 6+18\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+18\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}+24\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}\chi\overline{n-3}}{1,\quad 2.\quad 3.}} \right\}$$

Queſti ſaggi poſſono baſtare per ſapere come s'abbia a procedere a ſerie più compoſte, e ſcuoprire la forma, che ricevono le loro ſomme generali. Nelle precedenti ſomme generali ho ommeſſa la quantità coſtante, che vi ſi deve aggiungere, o ſottrarre, la quale ſi troverà (giuſta il num. 916.)

992. Ma veniamo ai due promeſſi eſempj. Debbaſi trovare la ſomma della ſerie ſeguente $\frac{2}{4},\ \frac{9}{4\chi 9},\ \frac{116}{4\chi 9\chi 16},\ \frac{635}{4\chi 9\chi 16\chi 25}$ ec. i di cui numeratori coſtituiſcono una ſerie algebraica di quinto ordine, della quale il termine generale è

$$2+7\chi\frac{\overline{n-1}}{1}+100\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}}{1.\quad 2.}+312\chi\frac{\overline{n-1}\chi\overline{n-2}\chi\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}$$

+

$+336\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}\,\overline{n-3}\,\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}+120\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}\,\overline{n-3}\,\overline{n-4}\,\overline{n-5}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$, che (giusta il num. 932.) ridurrò come segue

$$\begin{array}{l} -7+7n \\ +100-150n+50n^2 \\ -312+572n-312n^2+52n^3 \\ +336-700n+490n^2-140n^3+14n^4 \\ -120+374n-225n^2+85n^3-15n^4+n^5 \\ \hline \text{Somma} \quad -1+3n+3n^2-3n^3-n^4+n^5 \end{array}$$

I denominatori poi somministrano una serie di secondo ordine, il di cui termine generale è $4+5\chi\overline{n-1}+2\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1.\ 2.}$, vale a dire (giusta il num. 932.) $1+2n+n^2$, e però servendosi di queste espressioni il termine generale della proposta serie trovasi essere $\frac{-1+3n+3n^2-3n^3-n^4+n^5}{4\chi9\chi16\ldots\ldots\chi\overline{1+2n+n^2}}$. Ora la differenza degli ordini delle serie del numeratore, e del denominatore essendo 3, però la somma generale deve avere per numeratore una formola algebraica di terzo ordine (giusta il num. 989.) e per denominatore lo stesso denominatore del termine generale. Onde ella avrà questa forma

$$\frac{-M-N\chi\overline{n-1}-O\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}}{1.\ 2.}-P\chi\frac{\overline{n-1}\,\overline{n-2}\,\overline{n-3}}{1.\ 2.\ 3.}}{4\chi9\chi16\ldots\ldots\chi\overline{1+2n+n^2}}$$

Per abbreviare il calcolo si assuma essa così (A) $\frac{-M-Nn-On^2-Pn^3}{4\chi9\ldots\ldots\chi\overline{1+2n+n^2}}$, dalla quale secondo il solito si deduca il termine generale con porre $n-1$ in luogo di $n$, e sottrargliene ciò, che ne nasce; e per ridurlo tutto allo stesso denominatore si moltiplichi la seconda parte per $1+2n+n^2$, con che il numeratore di questo termine generale sarà

$$\begin{array}{l} +2Mn+Mn^2 \\ -N-2Nn+Nn^2+Nn^3 \\ +O\quad -3On^2\quad +On^4 \\ -P+Pn+2Pn^2-3Pn^3-Pn^4+Pn^5 \end{array}$$

Per

Per determinare i valori delle indeterminate M, N, O, P paragono i termini di questo numeratore coi termini del numeratore $-1+3n+3n^2-3n^3-n^4+n^5$, cui deve essere identico. Paragonando il termine $Pn^5$ col termine $n^5$ trovo $P=1$; dal paragone di $On^4-Pn^4$ con $-n^4$ si ha $O=0$; il paragone di $Nn^3-3Pn^3$ con $-3n^3$ dà $N=0$; finalmente con paragonare $Mn^2+Nn^2-3On^2+2Pn^2$ al termine $3n^2$ si trova $M=1$. Ed ecco trovati i valori di M, N, O, P. Se questi valori sostituiti nel paragone degli altri due termini li renderanno identici, essi serviranno a determinare la somma cercata, ma qualora non li rendessero identici, la somma non si potrebbe avere sotto questa forma. Poichè adunque le rimanenti due equazioni $2Mn-2Nn+Pn=3n$; $-N+O-P=-1$ sono identiche, si avrà la somma cercata con sostituire i ritrovati valori nella formola (A), che diverrà

$\frac{-1-n^3}{4\times 9\cdots\times\overline{1+2n+n^2}}$. Ma questa non è la giusta somma, e resta ancora a trovarsi la quantità, che vi si deve aggiugnere, o levare; però (giusta il num. 916.) si faccia $n=1$ tanto nella somma, come nel termine generale, e dalla somma si avrà $-\frac{1}{2}$, dal termine generale poi ne verrà $\frac{1}{2}$: dunque la quantità da aggiungersi è $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, conseguentemente la giusta somma della proposta serie è

$$1-\frac{1-n^3}{4\times 9\cdots\times\overline{1+2n+n^2}}$$

993. Prendo il secondo esempio dalla serie $\frac{4\times 8}{16}$, $\frac{9\times 8\times 28}{16\times 41}$, $\frac{16\times 8\times 28\times 68}{16\times 41\times 86}$, $\frac{25\times 8\times 28\times 68\times 134}{16\times 41\times 86\times 157}$ ec., i di cui numeratori si compongono da queste due serie 4, 9, 16, 25 ec.; 8, 28, 68, 134 ec. Onde il termine generale della proposta serie è

$$\left\{\overline{4+5\times\frac{\overline{n-1}}{1}+2\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}}\right\}\times$$

$$\left\{\frac{\overline{8\times 28\times 68\cdots\times 8+20\times\frac{\overline{n-1}}{1}+20\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}+6\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}}}{\overline{16\times 41\times 86\cdots\times 16+25\times\frac{\overline{n-1}}{1}+20\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1.\quad 2.}+6\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1.\quad 2.\quad 3.}}}\right\}$$

o sia col farne la riduzione giusta il num. 932.

(A) $\overline{1+2n+n^2} \times \frac{8 \times 28 \times 68 \ldots . \times \overline{2+n+4n^2+n^3}}{16 \times 41 \times 86 \ldots . \times \overline{5+6n+4n^2+n^3}}$

Per vedere se la proposta serie ammette la somma generale, la di cui forma deve corrispondere a quella del num. 991. giusta le cose ivi dette, si metta $n+1$ in luogo di $n$ nel termine generale della serie del numeratore, con che si avrà $8+12n+7n^2+n^3$, da cui si sottragga il termine generale della serie, che è in denominatore, e ne verrà $3+6n+3n^2$. Ora (giusta il num. 991.) questa formola dovrebbe essere la formola algebraica, che moltiplica il termine generale (A), che ivi è $1+2n+n^2$: Per lo che a determinare la quantità costante M, che deve moltiplicare tanto la somma, come il termine generale, si faccia $M \times \overline{3+6n+3n^2} = 1+2n+n^2$, e facendo $n=1$, si avrà $M \times 12 = 4$, ed $M = \frac{1}{3}$. Dunque a tenore del num. 991. la forma, che deve avere la somma della data serie è

(B) $\frac{1}{3} \times \frac{8 \times 28 \times 68 \ldots . \times \overline{2+n+4n^2+n^3} \times \overline{8+12n+7n^2+n^3}}{16 \times 41 \times 86 \ldots . \times \overline{5+6n+4n^2+n^3}}$

Resta a trovarsi la quantità costante, che si deve aggiungere, o sottrarre da questa somma. Per determinarla faccio (giusta il num. 916.) $n=1$ tanto nel termine generale, come nella somma, indi di questi due valori prendo la differenza 8, di cui la somma supera il termine generale, e fattane la sottrazione dalla formola (B), si ha finalmente la cercata somma, che è

$$\frac{1}{3} \times \frac{8 \times 28 \times 68 \ldots . \times \overline{2+n+4n^2+n^3} \times \overline{8+12n+7n^2+n^3}}{16 \times 41 \times 86 \ldots . \times \overline{5+6n+4n^2+n^3}} - 8$$

994. Si osservi, che allora soltanto si potrà ottenere la detta somma generale, quando e la formola algebraica, che moltiplica il termine generale, e quella, che nasce dal sottrarsi l'uno dall'altro i termini generali delle serie del numeratore, e del denominatore sono le stesse, come nell'addotto esempio, in cui si ha

$M \times \overline{3+6n+3n^2} = 1+2n+n^2$, cioè (con sostituirci il ritrovato valore di M)

$\frac{1}{3} \times \overline{3+6n+3n^2} = 1+2n+n^2$, o sia $3+6n+3n^2 = 3+6n+3n^2$: Ma se non si darà questa eguaglianza non si potrà avere in questo modo la somma generale della serie: Come rispetto alla serie del num. 991, il di cui termine generale (essendone fatta la riduzione giusta il num. 932.) è

$\overline{15n+5n^2} \times \frac{2 \times 6 \ldots \times \overline{n+n^2}}{6 \times 24 \ldots \times \overline{-18+35n-15n^2+4n^3}}$, si prenda la differenza dei due termini generali $n+n^2$, $-18+35n-15n^2+4n^3$, che è $-18+34n-14n^2+4n^3$ (affinchè il

il termine, in cui la lettera $n$ è elevata alla maſſima poteſtà, non riſulti negativo, ſi deve ſottrarre il retmine generale, che è in numeratore dal termine generale, che è in denominatore, ma in queſto caſo ſi dovranno cambiare tutti i ſegni alla ſomma genetale): Indi ſi faccia $M\overline{\times -18+34n-14n^2+4n^3} = 15n+5n^2$, con che ſi determini il valore di M, poſto $n=1$, e ſi avrà $M=\frac{20}{6}$; ma poichè, qualunque ſia il valore di M mai alla formola $-18+34n-14n^2+4n^3$ può riſultare ſimile la formola $15n+5n^2$, però la detta ſerie non può ricevere la ſomma generale della preſente forma.

## ARTICOLO VI.

### *Dell' interpolazione delle ſerie.*

995. PRima di parlare della maniera d'interpolare una data ſerie dirò brevemente come da una ſerie interrotta ſi poſſa paſſare a trovare il termine generale della ſerie continuata, e come dato il termine generale di una ſerie continuata ſi poſſa trovare il rermine generale della ſteſſa comunque interrotta.

996. Quì pol ſi oſſervi, che comunque s' interrompa una data ſerie d' ordine $n$, la ſerie interrotta ſarà pure dell'ordine $n$, onde l' interrompere una ſerie non altera punto il di lei ordine.

997. Interrompere una ſerie non è altro, che di una data ſerie, la quale chiamaſi ſerie continuata riſperto alla ſerie interrotta, prendere i termini, che diſtano ad eguali arbitrarj intervalli: Come ſe della ſeguente ſerie A ſi prenderanno i ter-

(A) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 ec.

mini primo, quinto, nono, decimoterzo ec., ommettendone cioè continuamente tre, ſi avrà la ſerie interrotta (B) 1, 5, 9, 13 ec.

998. Oſſerviamo adeſſo a qual poſto in una ſerie continuata corriſponda un dato termine della ſteſſa comunque interrotta. Il numero eguale di termini, che continuamente ſi vanno ommettendo nella ſerie continuata per avere la ſerie interrotta, ſi dica $=\beta$: Ciò poſto per avere il ſecondo rermine della ſerie interrotta ſi dovrà prendere nella ſerie continuata quel termine, il di cui poſto viene eſpreſſo da queſto numero $1+\beta+1$, vale a dire il ſecondo termine della ſerie interrotta è il termine $(1+\beta+1)^{esimo}$ della ſerie continuata, o ſia $(\beta+2)^{esimo}$. Poichè per avere il terzo termine ſi deve ommettere un numero $\beta$ di termini, però egli ſarà il termine $(\beta+2+\beta+1)^{esimo}$, cioè $(2\beta+3)^{esimo}$ della ſerie continuata: E per la ſteſſa ragione il quarto termine della ſerie interrotta ſarà il termine $(3\beta+4)^{esimo}$ della ſerie continuata ec. Conſeguentemente chiamando $=m$ un qualunque termine della ſerie interrorta, il termine $m^{esimo}$ della ſerie interrotta ſarà il termine

$(\overline{m-1}\times\beta+m)^{esimo}$ della ſerie continuata, il quale ſe ſi dirà $=\mu$, ſi avrà l'equazione $\overline{m-1}\times\beta+m=\mu$: Per lo che dato il poſto di un qualunque rermine in una ſerie continuata, ſi potrà determinare mediante queſta equazione che poſto egli ottiene nella ſerie interrotta, purchè ſi ſappia la legge, colla quale ella è interrotta, cioè ſi ſappia il valore di $\beta$: Lo che torna lo ſteſſo, che ſiccome ſi è trovato il valore di $\mu$ eſſendo cognito il valore di $m$, così all'oppoſto eſſendo cognito

il valore di $\mu$, si scuoprirà il valore di $m$; mentre l'equazione $\overline{m-1}\times\beta+m=\mu$ è $m\beta-\beta+m=\mu$, cioè $m\times\overline{\beta+1}=\mu+\beta$, e però $m=\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$. Per esempio si vuol sapere, che termine sia nella precedente serie (A) il termine quarto della serie (B) (già si sa la legge della serie (B), cioè che $\beta=3$). Si prenda la formola $\overline{m-1}\times\beta+m$, in cui si faccia $m=4$, $\beta=3$, ed essa risulterà $\overline{4-1}\times 3+4=13$. Dunque il termine quarto della serie (B) è il termine decimoterzo della serie (A): Che se si vorrà sapere che termine sia nella serie (B) il termine nono della serie (A), si prenda la formola $m=\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$, in cui si faccia $\mu=9$, $\beta=3$, con che essa diverrà $m=\frac{9+3}{3+1}$. Dunque il termine nono della serie (A) è il termine terzo della serie (B).

999. Due Problemi saranno il soggetto di queste serie: Il primo riguarderà la maniera di ritrovare il termine generale di una serie interrotta, ogniqualvolta sia dato il termine generale della serie continuata: Il secondo servirà a passare dal termine generale dato di una serie interrotta al termine generale della serie continuata: Mentre avuti i termini generali di queste serie, se ne potranno poscia trovare le loro somme generali a norma delle cose dette nel precedente Articolo.

1000. Prob. 1. Dato il termine generale di una serie continuata si debba trovare il termine generale della serie interrotta di cui sia cognita la legge, colla quale è interrotta, vale a dire, sia cognito il valore di $\beta$.

1001. Risol. Si sostituisca nel dato termine generale della serie continuata in luogo di $n$ la formola $\overline{m-1}\times\beta+m$, lo che cambierà il dato termine generale della serie continuata nel termine generale della serie interrotta. Sia dato per esempio il termine generale $3^n$ della serie (A) 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049 ec., dalla quale con ommettere continuamente due termini si forma la serie interrotta (B) 3, 81, 2187, 59049 ec., e si voglia il termine generale di questa serie interrotta. Si ponga $\overline{m-1}\times\beta+m$ in luogo di $n$ nel dato termine generale $3^n$, e si avrà $3^{\overline{m-1}\times\beta+m}$, cioè (con sostituire il valore di $\beta=2$) $3^{2m-1}$, che è il termine generale cercato della serie (B). Istessamente dato il termine generale $3+2\times\frac{\overline{n-1}}{1}+4\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\quad 2}$, o sia (giusta il num. 932.) (D) $5-4n+2n^2$ della serie (E) 3, 5, 11, 21, 35, 53, 75 ec., dalla quale con ommettere continuamente quattro termini si forma la serie (F) 3, 53, 203 ec., debbasi trovare il termine generale di questa serie. Nel termine generale (D) si sostituisca $\overline{m-1}\times\beta+m$ in luogo $n$, e si avrà $5-4\times\overline{\overline{m-1}\times\beta+m}+2\times\overline{\overline{m-1}\times\beta+m}^2$, cioè con (sostituire il valore di $\beta=4$) $5-4\times\overline{5m-4}+2\times\overline{5m-4}^2$, che è il termine generale cercato della serie (F).

1002.

1002. Si oſſervi, che quando ſi cerca, che termine di una ſerie interrotta ſia un dato termine della ſerie continuata, o *vice verſa*, ſi ſuppone, che queſto termine abbia luogo nell'una, e nell'altra ſerie.

1003. Prob. 2. Dato il termine generale di una ſerie interrotta, in cui perciò deve eſſere cognito il valore di $\beta$, cercaſi il termine generale della ſerie continuata.

1004. Riſol. Queſto problema ſi può riſolvere tanto mediante la formola $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$, come mediante la formola $\overline{m-1}\times\beta+m$. Volendoſi ſervire della formola $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$ niente altro ſi dovrà fare, che nel termine generale dato della ſerie interrotta ſoſtituire $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$ in luogo di $n$, e ciò, che ne verrà ſarà il termine generale della ſerie continuata. Prendo l'eſempio dalla precedente ſerie (B) del num. 1001, il di cui termine generale ſi è trovato eſſere $3^{2m-2}$, o ſia (mettendo $n$ in luogo di $m$) $3^{2n-2}$: In queſto termine generale ſi ſoſtituiſca $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$ in luogo di $n$, e ſi avrà $3^{\frac{2\mu+2\beta}{\beta+1}-2}$, in cui ſi ſoſtituiſca il valore di $\beta=2$, ſi faccia la riduzione allo ſteſſo denominatore, e ſi tolgano i termini, che ſi elidono, e ſi avrà $3^{\mu}$ termine generale cercato della ſerie continuata (A) del num. 1001. Così eſſendo dato il termine generale della ſerie (F), che è $53-100n+50n^2$, ſi ſoſtituiſca $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$ in luogo di $n$, e ſi avrà $53-100\times\overline{\frac{\mu+\beta}{\beta+1}}+50\times\left(\frac{\mu+\beta}{\beta+1}\right)^2$, o ſia, ſoſtituendo il valore di $\beta=4$, ſarà $53-100\times\overline{\frac{\mu+4}{5}}+50\times\left(\frac{\mu+4}{5}\right)^2$, che è il termine generale cercato della ſerie continuata (E).

1005. Volendoſi poi far uſo della formola $\overline{m-1}\times\beta+m$ ſi opererà così: Si prenda indeterminatamente il termine generale, che corriſponde all'ordine della ſerie, il quale come ſi è detto al num. 995. è lo ſteſſo tanto riſpetto alla ſerie interrotta, come alla ſerie continuata, poſcia vi ſi ſoſtituiſca $\overline{m-1}\times\beta+m$ in luogo di $n$, e con fare $m$ eguale ſucceſſivamente ad 1, 2, 3, 4 ec. ſi paragoni queſto termine generale al primo, al ſecondo, al terzo ec. termine della ſerie interrotta, a fine di determinare le aſſunte quantità indeterminate nel ſuppoſto primo termine generale, determinate le quali, e in eſſo ſoſtituite, ſi avrà lo che ſi cercava. Data per eſempio la ſerie interrotta (F), ſi debba ritrovare il termine generale della ſerie continuata (E): Poichè la ſerie (F) è di ſecondo ordine, tale ſarà pure la ſerie (E). Si ſupponga adunque, che il ſuo termine generale ſia $a+bn+cn^2$, nel quale con ſoſtituirſi $\overline{m-1}\times\beta+m$ in luogo di $n$, ſi avrà

$a+b$

$a+b\times\overline{m-1}\times\beta+m+c\times\overline{\overline{m-1}\times\overline{\beta+m}}$, che (pel num. 1001.) è il termine generale della ſerie (F). Si faccia pertanto in queſto termine generale $m=1, =2, =3$, e i riſultati ſi paragonino al primo, al ſecondo, al terzo termine della ſerie (F) dopo avervi ſoſtituito il valore di $\beta=4$, con che ſi avranno le tre ſeguenti equazioni

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad a+\ b+\ c=3\\ &\text{II.} \quad a+\ 6b+\ 36c=53\\ &\text{III.} \quad a+11b+121c=203 \end{aligned}$$

Con ſottrarſi dalla ſeconda la prima, e dalla terza la ſeconda ſi avranno queſt' altre due equazioni

$$\begin{aligned} &\text{IV.} \quad 5b+35c=50\\ &\text{V.} \quad 5b+85c=150 \end{aligned}$$

Da queſt' ultima ſi ſottragga la IV, e ſi avrà $50c=100$, e però $c=2$. Si ſoſtituiſca queſto valore di $c$ nella IV, o nella V, con che ſi otterrà il valore di $b=-4$. Finalmente in una delle tre prime ſi ſoſtituiſcano i ritrovati valori di $b$, $c$, e ſi avrà il valore di $a=5$. In luogo delle aſſunte indeterminate $a$, $b$, $c$ nel ſuppoſto termine generale $a+bn+cn^2$ ſi pongano i loro ritrovati valori, e ſi avrà $5-4n+2n^2$, che è il cercato termine generale della ſerie continuata (E).

1006. Veniamo adeſſo alla interpolazione delle ſerie. Interpolare una ſerie non vuol dir altro, che inſerire, o ſia frapporre a due qualſiſiano ſuoi termini un dato numero $\beta$ di termini per modo, che fra loro oſſervino la legge della ſerie. Alle volte ſi vuol ſoltanto frapporre un certo numero di termini a due dati termini di una ſerie, alle volte eſſa ſi vuole interpolare tutta fino a un propoſto termine: Alle volte degli interpolati fra due termini ſe ne vuole unicamente un tale. Dirò come ſi poſſa otenere ſpeditamente in ciaſcuno di queſti caſi l' intento.

1007. Suppongo, che ſi abbia il termine generale della ſerie da interpolarſi, il quale data la ſerie ſi potrà ſempre ſenza difficolrà formare, purchè ſi abbiano preſenti le coſe dette nel precedente Articolo. Volendoſi pertanto interpolare tutta una data ſerie (chiamo ſerie da interpolarſi la ſerie data, chiamo ſerie interpolata quella, che riſulta dalla interpolazione) niente altro dovraſſi fare, che trovare il termine generale, che deve corriſpondere alla ſerie interpolata. Queſto termine generale poi ſi troverà giuſta il num. 1004, poichè in queſto caſo interpolare una ſerie egli è lo ſteſſo, che paſſare da una ſerie interrotta a una ſerie continuata. Baſterà adunque prendere il termine generale della propoſta ſerie, comunque ella ſia o algebraica, o geometrica, o algebraico-geometrica, e ſoſtituirvi in luogo di $n$ la formola $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$. Del che poſſono baſtare gli eſempj dati al num. 1004.

1008. Volendoſi interpolare un numero $\beta$ di termini fra due dati termini della ſerie, de' quali il primo eſſendo $m$, l'altro ſara $m+1$ (la lettera $m$ eſprime il poſto del termine, cioè il primo, il ſecondo, il terzo ec.), ſi dovrà primieramente ritrovare il termine generale della ſerie interpolata giuſta il precedente numero 1007., ma poi per non avere a ſcorrere per tutti i termini precedenti della ſerie fino ai

cer-

gercati, biſogna ſapere che numero deveſi cominciare a ſoſtituire nel termine generale in luogo di $\mu$ a fine di avere il primo degli interpolati, e così poi ſucceſſivamente gli altri. Si oſſervi pertanto lo che ſi è detto al num. 998., cioè che ſe la lettera $m$ eſprimerà un qualunque termine della ſerie da interpolarſi, queſto termine nella ſerie interpolata ſarà il $\overline{m-1}\times\beta+m$. Qualora adunque fra i due termini $m$, $m+1$ della ſerie ſi vorrà trovare un numero $\beta$ di termini interpolati, biſognerà primieramente trovare nel modo poc'anzi detto il termine generale della ſerie interpolata, indi in luogo di $\mu$ ſoſtituire i numeri $\overline{m-1}\times\beta+m+1$, $\overline{m-1}\times\beta+m+2$ ec. fino al numero $\overline{m-1}\times\beta+m+\beta$, con che ſi otterranno i termini $\beta$ interpolati.

1009. Se poi dei termini $\beta$ interpolati ſi voleſſe ſolamente il $p^{esimo}$, baſterà ſoſtituire nel trovato termine generale il numero $\overline{m-1}\times\beta+m+p$. Debbaſi per eſempio ritrovare i ſei termini da interpolarſi tra l'undecimo, e il duodecimo termine della ſerie (H) 8, 729, 4096, 12167, 27000, 50653 ec., il di cui termine generale è

$$8+721\times\frac{\overline{n-1}}{1}+2645\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{1\ 2}+2058\times\frac{\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{1\ 2\ 3},$$

cioè (con farne la riduzione giuſta il num.932.) (P) $=-125+525n-735n^2+343n^3$. Si ſoſtituiſca in queſto termine generale (P) $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$ in luogo di $n$, e ſi avrà

$$-125+525\left\{\frac{\mu+\beta}{\beta+1}\right\}-735\left\{\frac{\mu+\beta}{\beta+1}\right\}^2+343\left\{\frac{\mu+\beta}{\beta+1}\right\}^3,$$

o ſia (con ſoſtituire il valore di $\beta=6$) (Q) $-125+525\left\{\frac{\mu+6}{7}\right\}-735\left\{\frac{\mu+6}{7}\right\}^2$ $+343\left\{\frac{\mu+6}{7}\right\}^3$. Ma poichè i ſei termini ſi devono interpolare tra l'undecimo, e il duodecimo della ſerie (H), dunque ſarà $m=11$; quindi il valore di $\overline{m-1}\times\beta+m$ ſarà (mediante la ſoſtituzione dei valori di $m=11$, $\beta=6$) 71. E poichè per avere il primo de'ſei termini da interpolarſi ſi deve ſoſtituire $\overline{m-1}\times\beta+m+1=72$ in luogo di $\mu$ nel termine generale (Q), fatta la ſoſtituzione egli diverrà $-125$ $+525\times\frac{78}{7}-735\left\{\frac{78}{7}\right\}^2+343\left\{\frac{78}{7}\right\}^3=389017$, che è il primo dei termini da interpolarſi; il ſecondo mediante la ſoſtituzione di $\overline{m-1}\times\beta+m+2=73$ in luogo di ſarà $-125+525\times\frac{79}{7}-735\left\{\frac{79}{7}\right\}^2+343\left\{\frac{79}{7}\right\}^3=493039$ ec.. Nella ſteſſa maniera ſi troveranno gli altri. Se dei ſei termini da interpolarſi tra l'undecimo, e il duodecimo della ſerie (H) ſi voleſſe ſolamente il quinto, biſognereb-

be

be ſoſtituire $\overline{m-1} \times \beta+m+p=76$ (in cui $p=5$) in luogo di $\mu$ nel termine generale (Q), con che ſi otterebbe $-125+525 \times \frac{82}{7} - 735 \left\{\frac{82}{7}\right\}^2 + 343 \left\{\frac{82}{7}\right\}^3$ $=456533$, che è il termine cercato.

1010. E quì ſi oſſervi, che ponendo $\overline{m-1} \times \beta+m+p$ in luogo di $\mu$ nella formola $\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$ a fine di avere il termine $p^{esimo}$ degli interpolati, ſi ha

$\frac{\overline{m-1} \times \beta+m+p+\beta}{\beta+1}$, cioè $\frac{m\beta+m+p}{\beta+1}$, vale a dire $m+\frac{p}{\beta+1}$: Quindi ben ſi vede, che ſi può a dirittura far uſo del termine generale della ſerie da interpolarſi per avere il termine interpolato $p^{esimo}$, niente altro richiedendoſi, che ſoſtituirvi $m+\frac{p}{\beta+1}$ in luogo di $n$. Si voglia per eſempio il quarto termine dei ſei da interpolarſi far il quinto, e il ſeſto termine della ſerie (H). Si prenda il termine generale (P) di queſta ſerie, e vi ſi ſoſtituiſca $m+\frac{p}{\beta+1}$ in luogo di $n$, con che eſſo diverrà $-125+525 \times \overline{m+\frac{p}{\beta+1}} - 735 \left\{m+\frac{p}{\beta+1}\right\}^2 + 343 \left\{m+\frac{p}{\beta+1}\right\}^3$, cioè (perchè $m=5$, $p=4$, $\beta=6$) $-125+525 \times \overline{\frac{39}{7}} - 735 \left\{\frac{39}{7}\right\}^2 + 343 \left\{\frac{39}{7}\right\}^3$ $=39304$, chè è il quarto cercato termine dei ſei da interpolarſi tra il quinto 27000., e il ſeſto termine 50653. della ſerie (H).

1011. Lo ſteſſo ſi farà riſpetto a qualunque altra ſerie ſia eſſa algebraica, o geometrica, o algebraico-geometrica, baſtando di avere il di lei termine generale, il quale giuſta le coſe dette nel precedente Articolo ſi ſa formare ogni qual volta eſſendo data la ſerie, ſi ſappia la legge, che ella oſſerva.

## AVVERTIMENTO.

I. Al num. 451. ho dato il modo di risolvere in numeri interi l'equazione $A=z^2+Bu^2$. Tale metodo serve in moltissimi casi anche per l'equazione $A=z^2-Bu^2$ (supposto che A, B siano numeri primi tra loro): Come essendo proposta da risolversi in numeri interi l'equazione $69=z^2-13u^2$, si troveranno primieramente valere le seguenti equazioni condizionali relativamente alle formole del num. 451.

$$\begin{aligned} 69 \times 12 &= 29^2 - 13 \\ 12 \times 3 &= 7^2 - 13 \\ 3 \times 1 &= 4^2 - 13 \end{aligned}$$

Per lo che si trova essere $A'=12$, $A''=3$, $A'''=1$, $m=29$, $m'=7$, $m''=4$: Onde essendosi ottenuto $A''=1$, sarà (pel num. 432.) $z'''=1$, $u'''=0$; e per mezzo poi di questi valori di $z'''$, $u'''$, e delle formole (R) del num. 451 si passerà ai valori di $z''$, $u''$, $u'$, $z'$, e finalmente di $z$, $u$, che trovansi essere

$$\begin{aligned} z''' &= 1 & u''' &= 0 \\ z'' &= 4 & u'' &= 1 \\ z' &= 5 & u' &= 1 \\ z &= 11 & u &= 2 \end{aligned}$$

E però l'equazione risoluta sarà $69=11^2-13\times 2^2$

II. Ma non tutte le equazioni della forma $A=z^2-Bu^2$ si assoggettano a questo metodo, e tale fra le altre è la seguente $101=z^2-13u^2$: Quindi è, che fa mestiere ricorrere ad altri artifizj per poterle risolvere con numeri interi, qualora la loro natura lo permette. A tale oggetto è necessario premettere il seguente

III. Problema 1. Essendo dati tre numeri interi qualsifiano $a$, $b$, $c$, de' quali i due $b$, $c$ siano primi fra loro, debbansi trovare due numeri interi $y$, $z$ tali, che sussista l'equazione $a=by-cz$

IV. Risol. si divida per $b$ la quantità $a+cz$, in cui si supponga successivamente $z=0$, 1, 2, 3 ec. fino a $b-1$, con che il numero delle divisioni da farsi viene ad essere $=b$, e tra queste divisioni una sola si farà senza residuo, ma tutte le altre lascieranno un reliduo, e questi residui saranno tutti fra loro differenti, come per se stesso è evidente; onde è, che questi relidui non potranno essere, che i numeri $0, 1, 2, 3 \ldots b-1$. Si prenda pertanto per $z$ quel numero della serie naturale, mediante la di cui sostituzione si è fatta la divisione senza residuo, e per $y$ si prenda il quoziente di questa divisione: Onde se quel valore di $z$ si dirà $=p$, e questo quoziente $=q$, si avrà l'equazione cercata $a=bq-cp$, o sia (ritenendo le stesse denominazioni $y$, $z$) $a=by-cz$.

V. Ho supposto che i numeri $a$, $b$, $c$ siano positivi, al quale stato si possono sempre ridurre o mediante la trasposizione de' termini, o con prendere l'una, o l'altra delle incognite, o tutte due, se così porta il bisogno, negative.

VI. Essendosi adunque trovata l'equazione $a=bq-cp$, nella quale i valori $p$, $q$ soddisfano al quesito, se di nuovo si prenderà l'equazione $a=by-cz$, dalla quale

si sottragga la precedente, si avrà $b \times \overline{y-p} - c \times \overline{z-q} = 0$, e però $\frac{y-p}{z-q} = \frac{c}{b}$, dalla quale (a motivo che $b$, $c$ sono numeri primi fra loro) si deduce $y-p = mc$, cioè $y = p+mc$, e $z-q = mb$, vale a dire $z = q+mb$, ove la lettera $m$ rappresenta un numero qualunque intero positivo, o negativo: Ed ecco, che essendosi trovati al num. IV. i due numeri, $p$, $q$ corrispondenti a $y$, $z$, che soddisfano alla proposta equazione, si può per mezzo loro trovarne una infinità d' altri, e così dare infinite soluzioni al proposto problema.

VII. E siccome per $m$ si può prendere un qualunque numero intero positivo, o negativo, si potrà sempre ottenere per $y$ un numero positivo, o negativo minore di $\frac{c}{2}$, e per $z$ un numero parimente positivo, o negativo minore di $\frac{b}{2}$.

VIII. Prob. 2. Essendo data l' equazione (Δ) $A = z^2 - Bu^2$, nella quale A, B siano numeri interi dati, e $z$, $u$ siano le due incognite, che devono essere numeri interi, e in oltre i due numeri A, $u$ devono essere primi tra loro, cercasi di trasformarla in un' altra, il di cui termine cognito sia $= 1$.

IX. Risol. Poichè A, $z$, $u$ sono numeri interi, e in oltre A, $u$ sono primi tra loro, si può sempre trovare (pel num. IV.) due numeri $m$, $y$ tali, che soddisfino all' equazione $z = mu - Ay$; lo che fatto si sostituisca nell' equazione (Δ) questo valore di $z$, con che essa si cambierà nella seguente $A = \overline{m^2 - B} \times u^2 - 2Amuy + A^2y^2$, che divisa per A è (Θ) $1 = \frac{\overline{m^2-B}}{A} \times u^2 - 2muy + Ay^2$. Ora in questa equazione la quantità $\frac{m^2-B}{A} \times u^2$ deve essere un numero intero, poichè tutti gli altri termini dell' equazione sono (per Ipotesi) numeri interi: Ma A, $u$ sono (per Ipotesi) numeri primi tra loro, dunque bisogna, che $m^2 - B$ sia divisibile per A. Questa quantità poi $m^2 - B$ non è altro che il secondo membro dell' equazione (Δ), in cui si è fatto $z = m$, $u = 1$; e questo numero $m$ può sempre essere preso (pel num. VII.) minore di $\frac{A}{2}$. Quindi acciò l' equazione (Δ) possa sussistere nell' Ipotesi del Problema bisogna, che con fare $u = 1$, si possa trovare un numero tale positivo, o negativo, che supposto in luogo di $z$ renda il secondo membro dell' equazione divisibile pel primo A, e questo numero sarà rappresentato da $m < \frac{A}{2}$. Che se non si potrà trovare questo numero, il problema proposto non ammetterà soluzione nella fatta Ipotesi: Se poi se ne troverà più d' uno, si otterranno altrettante trasformate. Rispetto pertanto all' equazione (Θ) si faccia $\frac{m^2-B}{A} = A'$, con che essa diverrà $A'u^2 - 2muy + Ay^2 = 1$ (Π).

X. Prob. 3. Si debba risolvere l' equazione (Π) in modo, che $n$, $y$ siano numeri interi.

XI. Risol. E' evidente, che i numeri interi da trovarsi per $u$, $y$ debbono essere primi tra loro, altrimenti se avessero una comune misura, per essa pure elevata al quadrato dovrebbe essere divisibile il membro tutto cognito dell' equazione, conseguentemente non potrebbe essere uguale all' unità; e per la stessa ragione i numeri

A',

$A'$, $m$, $A$ non poſſono avere un comun diviſore oltre l'unità. Ciò poſto ſi divida l'equazione (II) per $y^2$, indi ſi faccia $x = \frac{u}{y}$, mediante la quale ſoſtituzione eſſa ſi cambierà in $A'x^2-2mx+A=\frac{1}{y^2}$. Dell' equazione poi $A'x^2-2mx+A=0$ le due radici ſono $x=\frac{m+\sqrt{m^2-AA'}}{A'}$: Ma eſſendo $AA'=m^2-B$, vale a dire $B=m^2-AA'$, egli è $\sqrt{m^2-AA'}=\sqrt{B}$, però le due radici della precedente equazione ſono $x=\frac{m\pm\sqrt{B}}{A'}$. Queſte radici poi non poſſono eſſere numeri interi, ſe il coefficiente del primo termine dell'equazione $A'x^2-2mx+A=0$ non è l'unità; quindi da queſta equazione biſogna dedurne le ſeguenti trasformate

$$(\Sigma)\quad \begin{array}{llll} A''x'^2 & -2m'x' & +A' & =0 \\ A'''x''^2 & -2m''x'' & +A'' & =0 \\ A''''x'''^2 & -2m'''x''' & +A''' & =0 \\ A''''x''''^2 & \text{ec.} & & \end{array}$$

fino all' equazione $A^{n+1}(x^n)^2-2m^nx^n+A^n=0$ (la lettera $n$ diſegna l'apice, non un eſponente), nella quale ſia $A^{n+1}=\pm 1$. Il ſegno ſuperiore vale quando l'apice $n+1$ è impari, ma ſe egli è pari vale il ſegno inferiore.

XII. Devonſi ora trovare i valori di $A'$, $A''$, $A'''$ ec., $m'$, $m''$, $m'''$ ec. Per farlo con tutta facilità, oſſervo, che $x=\frac{m\pm\sqrt{B}}{A'}$. Eſſendo pertanto irrazionale queſto valore di $x$, egli ſi otterrà giuſta il num. 865 con ridurlo a frazione continua, la di cui ultima frazione equivalente ſarà $=\frac{u}{y}$, cioè il numeratore di queſta frazione equivalente ſarà $=u$, e il denominatore $=y$. Ritrovati poi che ſi ſiano così i valori di $u, y$, ſi otterrà per ultimo il cercato valore di $z$ mediante l'equazione $z=mu-Ay$.

XIII. Ma prima di tutto diamo le formole generali eſprimenti i numeratori, e i denominatori delle ſucceſſive frazioni equivalenti di una data frazione continua. La frazione continua, che ſuppongo eſſere il valore di $x$ ſia la ſeguente

$$x=a'+\cfrac{1}{a''+\cfrac{1}{a'''+\cfrac{1}{a''''+\cfrac{1}{a'''''+\text{ec.}}}}}$$

le lettere N', N'', N''' ec. esprimano i numeratori delle successive frazioni equivalenti, e D', D'', D''' esprimano i denominatori; si avrà

$$\begin{array}{ll} N' = a' & D' = 1 \\ N'' = N'a'' + 1 & D'' = a'' \\ N''' = N''a''' + N' & D''' = D''a''' + D' \\ N'''' = N'''a'''' + N'' & D'''' = D'''a'''' + D'' \\ N''''' \text{ ec.} & D''''' \text{ ec.} \end{array}$$

e però sarà $u = \pm N^n$, $y = \pm D^n$ (i segni ambigui sono arbitrarj, purchè si prendano nello stesso tempo o tutti due i superiori, o tutti due gli inferiori). Si vede poi, che essendo $\frac{u}{y} = \frac{N^n}{D^n}$, deve essere $u = N^n$, $y = D^n$, perchè tanto $u$, $y$, come $N^n$, $D^n$ sono numeri primi fra loro.

XIV. Queste formole, come è evidente, dipendono unicamente dai valori di $a'$, $a''$, $a'''$, $a''''$ ec., che sono i denominatori della frazione continua, e questi valori, o sia denominatori non sono altro, che le radici prossime $x = \frac{m+\sqrt{B}}{A'}$, $x' = \frac{m'+\sqrt{B}}{A''}$, $x'' = \frac{m''+\sqrt{B}}{A'''}$ ec. delle equazioni (Σ): Si avranno pertanto questi valori di $a'$, $a''$, $a'''$ ec., e di $A'$, $A''$, $A'''$ ec., $m'$, $m''$, $m'''$ ec. colle seguenti formole

$$\begin{array}{lll} A' = \frac{B-m^2}{A} & a' < \frac{m+\sqrt{B}}{A'} & m' = A'a' - m \\ A'' = \frac{B-m'^2}{A'} & a'' < \frac{m'+\sqrt{B}}{A''} & m'' = A''a'' - m' \\ A''' = \frac{B-m''^2}{A''} & a''' < \frac{m''+\sqrt{B}}{A'''} & m''' = A'''a''' - m'' \\ A'''' = \frac{B-m'''^2}{A'''} & a'''' < \frac{m'''+\sqrt{B}}{A''''} & m'''' = A''''a'''' - m''' \\ A''''' = \text{ec.} & a''''' < \text{ec.} & m''''' = \text{ec.} \end{array}$$

Il segno < dinota, che devesi prendere il numero intero, che è immediatamente prossimo minore. Queste serie poi devonsi continuare fintanto, che due termini della stessa serie, come $A^n$, $A^{n+t}$, $m^n$, $m^{n+t}$ si trovino avere lo stesso valore, cioè $A^n = A^{n+t}$, $m^n = m^{n+t}$, poichè in allora tutti i termini seguenti della serie si troveranno gli stessi, che i precedenti.

XV. Ritrovati così i valori di $a'$, $a''$, $a'''$ ec., fino ad $a^n$ si avrà tosto il valore di $\pm N^n = u$, e di $\pm D^n = y$, e poscia il valore di $z$ mediante l'equazione $z = mu - Ay$, conseguentemente si avranno i cercati valori di $z$, $u$, che soddisfano all'equazione $A = z^2 - Bu^2$. Veniamo all'esempio particolare.

XVI. Prob. Debbansi ritrovare per $z$, $u$ de' numeri razionali interi, che soddisfino alla precedente equazione del num. II $101 = z^2 - 13u^2$.

XVII.

XVII. Risol. Rispetto a questa equazione è A=101, B=13. Si cominci pertanto a trovare un numero $m$ tale, che, essendo minore di $\frac{A}{2} = \frac{101}{2}$, sia $\frac{m^2-B}{A}$, cioè $\frac{m^2-13}{101}$ un numero intero. Dopo alcuni tentativi si trova essere $m=35$, onde si ha $\frac{35^2-13}{101}=12=A'$. Ma acciò $A'$, che nasce dalla prima formola $A'=\frac{B-m^2}{A}$, sia positivo bisogna prendere A=—101. Essendosi adunque trovati i valori di $m=35$, e di $A'=\frac{B-m^2}{A'}=\frac{13-35^2}{-101}=12$, se ne facciano le sostituzioni nelle formole del precedente num. XIV., e si avrà

| I. | II. | III. |
|---|---|---|
| $A'=\frac{13-35^2}{-101}=12$ | $a'<\frac{35+\sqrt{13}}{12}=3$ | $m'=3\times12-35=1$ |
| $A''=\frac{13-1^2}{12}=1$ | $a''<\frac{1+\sqrt{13}}{1}=4$ | $m''=4\times1-1=3$ |
| $A'''=\frac{13-3^2}{1}=4$ | $a'''<\frac{3+\sqrt{13}}{4}=1$ | $m'''=1\times4-3=1$ |
| $A''''=\frac{13-1^2}{4}=3$ | $a''''<\frac{1+\sqrt{13}}{3}=1$ | $m''''=1\times3-1=2$ |
| $A'''''=\frac{13-2^2}{3}=3$ | $a'''''<\frac{2+\sqrt{13}}{3}=1$ | $m'''''=1\times3-2=1$ |
| $A''''''=\frac{13-1^2}{3}=4$ | $a''''''<\frac{1+\sqrt{13}}{3}=1$ | $m''''''=1\times4-1=3$ |
| $A'''''''=\frac{13-3^2}{4}=1$ | $a'''''''<\frac{3+\sqrt{13}}{1}=6$ | $m'''''''=6\times1-3=3$ |

Ora mi fermo qui perchè nella serie I. ho trovato due valori uguali all'unità, cioè $A''''''=A''$, come pure nella serie III. $m''''''=m''$; essendo adunque $A''''''=A^{n+1}$, e però $n=6$, sarà $a^n=a''''''$.

Si sono pertanto trovati i valori di $a'=3$, $a''=4$, $a'''=1$, $a''''=1$, $a'''''=1$, $a''''''=1$, conseguentemente la frazione continua, che dà il valore di $x$ è

$x=$

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}$$

e però le formole del num. XIII. diventano

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N' = 3$ | | | $D' = 1$ | | |
| $N'' = N'a'' + 1 = 13$ | | | $D'' = a'' = 4$ | | |
| $N''' = N''a''' + N' = 16$ | | | $D''' = D''a''' + D' = 5$ | | |
| $N'''' = N'''a'''' + N'' = 29$ | | | $D'''' = D'''a'''' + D'' = 9$ | | |
| $N''''' = N''''a''''' + N''' = 45$ | | | $D''''' = D''''a''''' + D''' = 14$ | | |
| $N'''''' = N^{v} = N'''''a'''''' + N'''' = 74$ | | | $D'''''' = D^{v} = D'''''a'''''' + D'''' = 23$ | | |

Si ha adunque $u = N^{v} = 74$, $y = D^{v} = 23$. Quindi mediante queſti valori di $u$, $y$, e l'equazione $z = mu - Ay$ ſi ha finalmente il valore di $z$, che è $z = 35 \times 74 - 101 \times 23 = 267$. Onde con ſoſtituire queſti ritrovati valori di $z$, $u$ nella data equazione $101 = z^2 - 13u^2$ ſi ottiene la bramata ſoluzione, così $101 = \overline{267}^2 - 13 \times 74^2$.

XVIII. Poichè la quantità $\sqrt{13}$ ha naturalmente doppio ſegno, ſiccome ella ſi è preſa col ſegno + nelle formole precedenti notate II, così eſſa ſi può prendere col ſegno —, nel qual modo ſomminiſtrerà un'altra ſoluzione al problema propoſto. Prendiamola adunque col ſegno —, e così avremo

| I. | II. | III. |
|---|---|---|
| $A' = \frac{13-35^2}{-101} = 12$ | $a' < \frac{35-\sqrt{13}}{12} = 2$ | $m' = 2 \times 12 - 35 = -11$ |
| $A'' = \frac{13-11^2}{12} = -9$ | $a'' < \frac{-11-\sqrt{13}}{-9} = 1$ | $m'' = 1 \times -9 + 11 = 2$ |
| $A''' = \frac{13-2^2}{-9} = -1$ | $a''' < \frac{2-\sqrt{13}}{-1} = 1$ | $m''' = 1 \times -1 - 2 = -3$ |
| $A'''' = \frac{13-3^2}{-1} = -4$ | $a'''' < \frac{-3-\sqrt{13}}{-4} = 1$ | $m'''' = 1 \times -4 + 3 = -1$ |
| $A''''' = \frac{13-1^2}{-4} = -3$ | $a''''' < \frac{-1-\sqrt{13}}{-3} = 1$ | $m''''' = 1 \times -3 + 1 = -2$ |
| $A'''''' = \frac{13-2^2}{-3} = -3$ | $a'''''' < \frac{-2-\sqrt{13}}{-3} = 1$ | $m'''''' = 1 \times -3 + 2 = -1$ |
| $A''''''' = \frac{13-1^2}{-3} = -4$ | $a''''''' < \frac{-1-\sqrt{13}}{-3} = 1$ | $m''''''' = 1 \times -4 + 1 = -3$ |
| $A'''''''' = \frac{13-3^2}{-4} = -1$ | $a'''''''' < \frac{-3-\sqrt{13}}{-1} = 6$ | $m'''''''' = -1 \times 6 + 3 = -3$ |

Avendo trovato due termini della ſerie I. uguali, cioè $A''' = A'''''' = 1$, e così pure due della ſerie III, cioè $m''' = m'''''' = -3$, mi fermo quì. Eſſendo $A'''''' = A^{n+1}$ ſi trova eſſere $n = 7$; ſi oſſervi poi, che dei due termini della ſerie I., e III., ai quali corriſpondono valori uguali, ſe uno ha per indice un numero pari, l'altro lo avrà impari, e *vice verſa*. E poichè ſi ſono trovati i valori di $a'$, $a''$ ec. ſino ad $a'''''' = a^n$, ſi avranno i valori di $N'''''' = N^n$, e di $D'''''' = D^n$ mediante le formole del num. XIII, onde ſarà $u = N^n = 34$, $y = D^n = 13$. Quindi ſi avrà per ultimo il valore di $z$ con ſoſtituire queſti valori di $u$, $y$ nell'equazione $z = mu - Ay$ così $z = 1190 - 1313 = -123$; e però l'equazione data $101 = z^2 - 13u^2$ trovaſi riſoluta così $101 = 15129 - 15028$.

XIX. Allorchè la radice $x$ è negativa biſogna prendere i numeri $u$, $m$ con ſegni contrarj. Per mezzo delle due ſoluzioni trovate ſi potranno poi ottenere le altre infinite, che ammette il Problema. Queſto metodo ſerve non ſolo per l'equazione $A = z^2 - Bu^2$, ma anche per l'equazione $A = z^2 + Bu^2$, ed egli ci è ſtato comunicato dal celebre, e non mai abbaſtanza lodato Sig. De la Grange ne' Tomi XXIII., e XXIV. dell'Accademia di Berlino.

XX. Si oſſervi riſpetto alla quantità $\frac{a+cz}{b}$ del num. IV., che deve eſſere uguale a un numero intero, per eſempio $p$; onde ſarà l'equazione $a+cz = bp$, e riſpetto alla quantità $\frac{m^2-13}{A}$ del num. IX., che deve parimente eſſere un numero intero, per Eſempio $A'$, così che ſia $m^2 - 13 = AA'$, o ſia $m^2 = AA' + 13$, per facilitare la maniera di ritrovare i numeri $p$, $A'$, ſi può far uſo del metodo dato all' Art. IX. del Cap. III., applicando cioè nel primo caſo il metodo alla quantità $\frac{a+cz}{}$

$a+cz$, e offervando quale fra i termini della ſerie, che ne naſcerà, ſia un moltiplo di $b$, poichè in allora un fattore di queſto termine ſarà $=b$, e l'altro $=p$; nel ſecondo caſo ſi dovrà applicare il metodo alla quantità $AA'+13$, in cui $A'$ è l'incognita, e vedere quale fra i termini della ſerie, che ne verrà, ſia un quadrato perfetto, mentre la di lui radice quadrata ſarà $=m$, che ſi cercava.

FINE DEL SECONDO TOMO.

Digitized by Google

| Pag. | Lin. | ERRORI. | CORREZIONI. |
|---|---|---|---|
| XII. | 28 | 95 | 96 |
| 13. | 4 | doveodoſi | dovendoſi |
| 24. | 24 | è $-1 \times \sqrt{ab}$ | $-1 \times \sqrt{ab}$ |
| 29. | 26 | Prodotto totale $a^3bd^3 - {}^2 2a^3b^3d^4$ | Prodotto totale $a^3bd^3 - 2a^3b^3d^4$ |
| 36. | 3 | giuſta il num. | giuſta 1 num. |
| 40. | 4eſeg. | I ſegni +, che ſono nel fine di tutte le righe dalla 3 fino alla 13 ſono ſuperflui | |
| 50. | 5 ult. | $a+b+o+d+e$ | $a+b+c+d+e$ |
| 89. | 13 | adl | dal |
| — | 20e21 | $\frac{A''B'}{A'} - B'' \times t - \frac{A''D'}{A'} + D'' o$ quindi $t = \frac{A'D''-A''D'}{A'B''-A''B'}$. Iſteſſamente fatto uguale $a+D''=o$; zero | $\frac{A''B'}{A'} - B'' \times t - \frac{A''D'}{A'} + D'' = o$; quindi $t = \frac{A'D''-A''D'}{A'B''-A''B'}$. Iſteſſamente fatto uguale a zero |
| 92. | 3 ult. | conſeguente | conſeguentemente |
| 100. | 16 | $x$ è $= \pm 13$ | $x$ è $= \pm 14$ |
| 106. | 8 ult. | e $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}bp}$ | e $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2}$ |
| 107. | ult. | ritrovatl | ritrovati |
| 147. | 28 | numeri | numero |
| 154. | 23 | Aritmatica | Aritmetica |
| 184. | 13 | ſedondo | ſecondo |
| 199. | 19 | $m'$è | m'è |
| 209. | 6 | orizontale | orizzontale |
| 249. | 3 | darci | dargli |
| 280. | 11 | $\sqrt[\varepsilon]{}$ | $\sqrt[3]{}$ |
| 323. | 21 | chè è | che è |
| 353. | 12 | IV. | IV. ec. |
| 372. | 18 | da I. ſi ha | Da I. ſi ha |
| 378. | 11 ult. | $An+Bn^2Cn^3$ | $An+Bn^2+Cn^3$ |
| 407. | 1 | in principio della prima linea ſi legga ineguali | |
| 441. | 22 | permettere | premettere |

Si troveranno di tratto in tratto altri piccoli errori ſimili ai già avvertiti, ma di niun peſo; che però ſi è traſcurato di notarli. Sono bensì ſcorſi in alcune copie varj errori inevitabili a motivo della maggiore, o minor preſſione del torchio: per eſempio ſarà in alcune copie poco ſenſibile l'impreſſione di alcuni apici, e di alcuni eſponenti.

AO 1462492

Digitized by Google